


PROPERTY OF
University of
Michigan
Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

187

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

ERSTER BAND.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

VON

É. VERDET.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. KARL EXNER.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ERSTER BAND.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1881.

VORWORT.

Ich übergebe hiermit der Oeffentlichkeit die erste Abtheilung des ersten Bandes einer deutschen Bearbeitung von É. Verdet's Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Es enthält diese Abtheilung nebst einer geometrisch-optischen und historischen Einleitung die Theorien der Interferenz, Fortpflanzung und Beugung des Lichtes, soweit dieselben von jeder Voraussetzung über die Constitution der Lichtschwingungen unabhängig sind. In dieser Beziehung ergänzende Capitel werden in späteren Theilen des Werkes enthalten sein. Die Vorlesungen Verdet's, auf welche sich dieser erste Theil bezieht, wurden im Jahre 1865/66 in der Sorbonne gehalten. Die gegenwärtige Bearbeitung stützt sich insbesondere auf: *Leçons d'Optique physique par É. Verdet, publiées par M. A. Levistal*, Paris 1869/70.

Ich unterlasse eine vollständige Anführung der ziemlich zahlreichen vorgenommenen Veränderungen und beschränke mich einerseits auf die Bemerkung, dass nichts Wesentliches hinweggelassen wurde (es fehlen in der Bearbeitung nur zwei Paragraphen des französischen Originals), andererseits auf die folgenden speciellen Bemerkungen, welchen die Ueberschriften der Paragraphen beigefügt sind, auf welche sie sich beziehen.

(7) Fermat. Es wurde an die Stelle des analytischen Beweises des Fermat'schen Satzes ein kürzerer synthetischer gesetzt.

(18) Fresnel's Spiegelversuch. Dieser Versuch wurde an seiner Stelle unter den Interferenzerscheinungen belassen, ob-

gleich in jüngster Zeit behauptet worden ist, Fresnel's Interferenzerscheinung sei in Wahrheit eine eben so reine Beugungserscheinung, wie Young's Zweispaltenversuch, Fresnel habe mit Unrecht angenommen, dass in seinen Interferenzerscheinungen keine Diffractionswirkungen vorkommen, er habe mit Unrecht versichert, die Consequenzen seiner Theorie durch Messungen bestätigt gefunden zu haben, und sich über die Tragweite seines Versuches getäuscht, durch welchen er zeigen wollte, dass nicht nur, wie bei Young's Zweispaltenversuch, die gebeugten, sondern dass auch die direct fortgepflanzten Strahlen die Interferenzerscheinungen hervorzubringen im Stande seien.

In Wahrheit entsteht Young's Phänomen durch die Interferenz gebeugter Strahlen, über deren Natur man zur Zeit, als Fresnel seinen Versuch anstellte, nicht hinreichend aufgeklärt war, Fresnel's Phänomen durch die Interferenz nach den Gesetzen der geometrischen Optik fortgepflanzter, allerdings durch Beugung bis zu einem gewissen, von der Versuchsanordnung abhängigen, Grade modificirter Strahlen. Beide Phänomene können als Interferenzphänomene angesehen werden. Wenn Fresnel seinen Versuch ohne Rücksicht auf die Beugung berechnete, so war dies ein durchaus gerechtfertigtes Näherungsverfahren und beruhte keineswegs auf einer Verkennung des wahren Sachverhaltes. Vielmehr hat der geniale Erfinder des Spiegelversuches in seinem *Supplément au deuxième Mémoire sur la diffraction* diesen Gegenstand weitläufig behandelt und gezeigt, wie man seinen Versuch anstellen müsse, um die Störung durch Beugung in hinreichender Weise zu reduciren oder das System der Interferenzfransen von dem Systeme der Beugungsfransen zu trennen. Immerhin bedingt die Diffractionswirkung eine Unvollkommenheit des Fresnel'schen Spiegelapparates, welche derselbe mit den meisten anderen Interferenzapparaten theilt. Als vollkommene Interferenzapparate dürften überhaupt nur mehr die planparallele Glasplatte zur Hervorbringung der Newton'schen Interferenzen und der Interferenzrefractor, beide in Verbindung mit einem Spectralapparate, bezeichnet werden.

(25) Der Lloyd'sche Versuch, (27) Die Billet'schen Halblinsen und die Fizeau'schen Platten wurden eingeschoben.

(28) Nothwendigkeit einer einzigen Lichtquelle. Es wurde an die Stelle der analytischen Ableitung eine einfachere synthetische gesetzt.

(30) Interferenzen bei grossen Gangunterschieden. Es wurde Wrede's und Poggendorff's Antheil an diesem Theile der Interferenztheorie hervorgehoben.

(32) Die Farbenringe, wurde erweitert.

(34) Gesetze. Es wurden die von W. Wernicke, A. Cornu und Jerichau herrührenden Anwendungen der Newton'schen Ringe hinzugefügt.

(38) Näheres über den Gang der Strahlen, (41) Nebenerscheinungen am Farbenglase, (42) Die Stefan'schen Nebenringe, (44) Die Newton'schen Farben und das analysirende Spectrum wurden eingeschoben.

(46) Interferenzen dicker Patten, wurde erweitert.

(47) Berechnung des Brewster'schen Interferenzrefractors, (48) Berechnung des Jamin'schen Interferenzrefractors, (49) Interferenzstreifen als parallele Begleiter der caustischen Linien, (50) Achromatisirung der Interferenzstreifen durch ein Prisma, (55) Synthetische Darstellung der Zusammensetzung der Vibrationsbewegungen, (56) Totalintensität des interferirenden Lichtes wurden eingeschoben.

(62) Wirkung einer Welle von beliebiger Gestalt auf einen äusseren Punkt. Es wurde ein Beweis für die Flächengleichheit der Elementarzonen in der Nähe des Poles hinzugefügt.

(64) Das Soret'sche Fernrohr, (67) Fortsetzung, (75) Einführung von Winkelcoordinaten in einem besonderen Falle, (81) Beugung durch ein lamellares Oeffnungspaar, (82) Beugung durch ein lamellares Gitter wurden eingeschoben.

(83) Bestimmung der Wellenlängen vermittelst der Gittererscheinungen. Es wurden die Tafeln der Wellenlängen vermehrt.

(85) Beugung durch eine grosse Zahl gleich breiter, paralleler und nicht äquidistanter Spaltöffnungen.

Verdet gründete die Behandlung dieses Falles der Lichtbeugung auf den nur in gewissem Sinne und unter Voraussetzung einer bestimmten Anwendung richtigen Satz, nach welchem aus der Interferenz einer sehr grossen Zahl von Schwingungen, welche sich nur der Phase nach unterscheiden, wenn überdies die Phasen der einzelnen Schwingungen völlig zufällig sind, eine Intensität hervorgehen soll gleich der *n* fachen Intensität einer der Schwingungen. Es lässt sich jedoch im Gegentheile beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die resultirende Intensität völlig zufällig ist. Ein Beweis hierfür unter Hinweis auf die betreffende Stelle in Verdet's Optik wurde schon vom Verfasser im LXXVI. Bande der Sitzb. der k. k. Akad. der Wissensch. zu Wien, II. Abth., Oct., Heft 1877, S. 522 gegeben und neuerdings von Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), 10, p. 73, 1880.

Es wurden die entsprechenden Veränderungen dieses Paragraphen vorgenommen.

(86) Das Princip von Babinet wurde eingeschoben.

Die von Verdet noch nach der älteren Diffusionstheorie abgehandelten Phänomene, welche durch die Combination einer Bestäubung und eines Spiegels hervorgebracht werden, wurden an ihre Stelle unter den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen gesetzt und in den Paragraphen (91) Beugung durch ein Oeffnungspaar, (92) Verschiebung einer der beiden Oeffnungen in der Richtung der directen Lichtstrahlen, (93) Combination einer Bestäubungsfläche mit einem Spiegel, (94) Schiefe Lage der Bestäubungsfläche, (95) Der Newton'sche Hohlspiegelversuch, (96) Der Newton'sche Hohlspiegelversuch subjectiv angestellt, (97) Zahlreiche Variationen des Newton'schen Versuches, (98) Die sogenannten Interferenzen diffusen Lichtes abgehandelt.

Was die abweichende, unlängst von E. Lommel aufgestellte Theorie dieser Erscheinungen betrifft, so ist dieselbe sowohl in theoretischer als experimenteller Hinsicht vollständig widerlegt und wurde aus diesem Grunde auf dieselbe nicht eingegangen.

(102) Berechnung der Integrale. Methode von Fresnel. Es wurden die Integraltafeln und die Integralcurven hinzugefügt.

(122) Scintillation. Dieser Paragraph wurde an seine Stelle unter die Fresnel'schen Beugungserscheinungen gesetzt und erweitert.

(123) Virtuelle Beugungsbilder. Dieser Paragraph findet sich im französischen Originale offenbar in Folge eines Versehens gänzlich verfehlt dargestellt, richtig jedoch in der daselbst citirten Originalabhandlung von Knochenhauer. Es wurde die richtige Darstellung eingeführt.

(124) Lamellare Beugungserscheinungen, (125) Verwandte Erscheinungen, (126) Die Talbot'schen Streifen, (127) Fortsetzung. Die vollständige Berechnung, (128) Cornu's Methode zur Discussion der Beugungsprobleme wurden eingeschoben.

(131) Vollständige Erklärung des Regenbogens (Airy) wurde in Rücksicht auf die grosse allgemeine Bedeutung von Airy's Originalabhandlung erweitert und die Integraltafel beigesetzt.

Wien, im Mai 1881.

Karl Exner.

VORWORT

ZUR

ZWEITEN ABTHEILUNG.

Dieser zweite Theil meiner deutschen Bearbeitung der in französischer Sprache von A. Levistal 1869/70 veröffentlichten Vorlesungen É. Verdet's über die Wellentheorie des Lichtes enthält die Lehre von der Interferenz des polarisirten Lichtes und die Theorie der Doppelbrechung.

Die Lehre von der Interferenz des polarisirten Lichtes wurde durch Beisetzung neuerer Versuche ergänzt. Die Theorie der Doppelbrechung umfasst in Verdet's Vorlesungen die Fresnel'sche und die Cauchy'sche Theorie. Es wurde die Ableitung der Gesetze der Doppelbrechung aus den Gleichungen der Elasticität fester Körper hinzugefügt, und bleibt Alles, was sich auf die Einwirkung der Körpermoleküle bezieht, einem nächsten Theile dieses Werkes vorbehalten.

Ausser den schon bezeichneten Veränderungen des französischen Originales sind noch als neu zu bezeichnen die Paragraphen

(137) Versuch von Arago,

(153) Das Ellipsoïd der gleichen Arbeit,

(161) Briot's Ansicht über die Constitution des Aethers,

(172) Brechung einer Planwelle,

(173) Durchgang des Lichtes durch ein doppeltbrechendes Prisma,

ferner das Kapitel

XIX: „Beugung in doppeltbrechenden Mitteln."

Wien, im Januar 1883.

Karl Exner.

INHALT.

I. Geometrische Optik.

II. Geschichte der Entwickelung der Undulationstheorie.

III. Interferenz.

IV. Zusammensetzung der Lichtschwingungen.

V. Fortpflanzung des Lichtes in einem isotropen Mittel.

VI. Ableitung der geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung aus dem Principe der Interferenz der Elementarwellen.

VII. Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen.

VIII. Fresnel'sche Beugungserscheinungen.

IX. Beugung nicht sphärischer Wellen.

X. Interferenz des polarisirten Lichtes.

XI. Transversalität der Lichtschwingungen.

XII. Theorie der Doppelbrechung. Einleitung.

XIII. Theorie der Doppelbrechung. Fresnel.

XIV. Theorie der Doppelbrechung. Cauchy.

XV. Ableitung der Gesetze der Doppelbrechung aus den Gleichungen der Elasticität fester Körper.

XVI. Reflexion und Brechung in doppeltbrechenden Mitteln.

XVII. Die einachsigen Krystalle.

XVIII. Die zweiachsigen Krystalle.

XIX. Beugung in doppeltbrechenden Mitteln.

XX. Dispersion in den doppeltbrechenden Mitteln.

I.

Geometrische Optik.

1. Die Grundsätze der geometrischen Optik.

Die sogenannte geometrische Optik enthält die mathematischen Consequenzen einer beschränkten Zahl von Grundsätzen. Diese sind:

1. Das Gesetz der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes, auf welchem die geometrische Theorie des Schattens beruht.

2. Das Gesetz der regelmässigen Reflexion, welches schon den Alten bekannt war.

3. Das von Descartes aufgestellte Gesetz der Brechung der Lichtstrahlen.

4. Das Gesetz der Dispersion, nach welchem es Gattungen von Lichtstrahlen giebt, welche durch den Grad ihrer Brechbarkeit und durch ihre Einwirkung auf die Retina verschieden sind.

5. Das Gesetz der Summation der Lichtmengen, welche ein Flächenelement von mehreren Lichtquellen empfängt.

6. Das Gesetz der Abnahme der Lichtintensität mit dem Quadrate der Entfernung.

Wir wollen nicht auf die experimentellen Demonstrationen eingehen, durch welche man diese Gesetze abzuleiten pflegt, wollen jedoch sehen, bis zu welchem Grade dieselben eine strenge experimentelle Prüfung vertragen.

2. Experimentelle Prüfung der Grundsätze.

Man wird das Gesetz der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes durch sich allenthalben darbietende Erscheinungen bestätigt finden, man wird von demselben bei Schattenconstructionen mit Vortheil Gebrauch machen. Reducirt man aber, um das Elementarphänomen des

Schattens zu erhalten, die Lichtquelle auf einen Punkt, so zeigen sich Erscheinungen, welche mit dem Gesetze der geradlinigen Fortpflanzung einigermaassen im Widerspruche stehen. Der Schatten erscheint nicht genau begrenzt durch die den Körper berührenden Strahlen, vielmehr erkennt man statt eines plötzlichen Ueberganges zwischen Licht und Dunkelheit das Vorhandensein mehrerer Maxima und Minima der Helligkeit, welche ausserhalb des geometrischen Schattens in unmittelbarer Nähe der Grenze parallel zu derselben verlaufen, und innerhalb des geometrischen Schattens ein rasches und continuirliches Abnehmen der Helligkeit. Reducirt man auch die Grösse des undurchsichtigen Körpers, so modificirt sich die Erscheinung in solchem Maasse, dass von dem Gesetze der geradlinigen Fortpflanzung nichts übrig bleibt.

Die Anwendung der Grundgesetze der geometrischen Optik bei der Herstellung von Mikroskopen und Teleskopen hat die Construction dieser Instrumente auf einen hohen Grad der Vollkommenheit gebracht. Man wird aber vergebens versuchen, die Erscheinung der Höfe aus diesen Gesetzen abzuleiten. Man kann aus dem Brechungsgesetze den Regenbogen berechnen, doch giebt die Rechnung keinerlei Aufschluss über die Existenz der überzähligen Bogen, welche an der Innenseite des inneren und an der Aussenseite des äusseren Hauptregenbogens wahrgenommen werden.

Wenn man, um das Gesetz der Reflexion zu prüfen, die Zenithdistanz eines Sterns bestimmt, indem man das Fernrohr einmal auf den Stern selbst, dann auf sein Bild in dem Spiegel richtet, welcher durch eine freie Quecksilberoberfläche gebildet wird, so gelangt man zwar zunächst zu einem positiven Resultate. Wenn man aber, um die Vollkommenheit des Versuches durch Vermeidung der Aberrationen zu erhöhen und das Bild des Sterns auf einen Punkt zu reduciren, vor das Objectiv des Fernrohres einen mit einer Oeffnung versehenen Schirm bringt und die Oeffnung allmälig verkleinert, so nähert sich zwar anfangs, wie es die Gesetze der geometrischen Optik verlangen, das Bild des Sternes der Punktförmigkeit; ist jedoch ein gewisser Grad der Verkleinerung der Oeffnung erreicht, so dehnt sich das Sternbild, statt sich weiter zu reduciren, zu einer hellen, von Farbenringen umgebenen Scheibe aus.

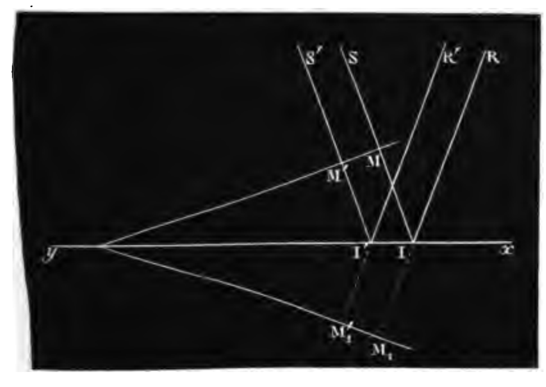
Obgleich also die Gesetze der geometrischen Optik in gewissem Sinne ihre volle Berechtigung haben, vertragen sie doch eine strenge experimentelle Prüfung nicht.

3. Brennflächen.

Wir wollen im Folgenden einige Sätze der geometrischen Optik ableiten, welche uns bei der Entwickelung der Undulationstheorie des Lichtes von Nutzen sein sollen. Wir betrachten den Gang von Lichtstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen und beliebige Reflexionen und Brechungen erfahren.

Es seien (Fig. 1) xy die ebene Trennungsfläche zweier Medien, SI, $S'I'$ Strahlen, welche von einem unendlich entfernten Punkte kommen und nach IR, $I'R'$ reflectirt werden, MM' eine Ebene senkrecht zu SI, M_1M_1' eine Ebene senkrecht zu IR. Es folgt aus dem Gesetze der Reflexion unmittelbar:

Fig. 1.

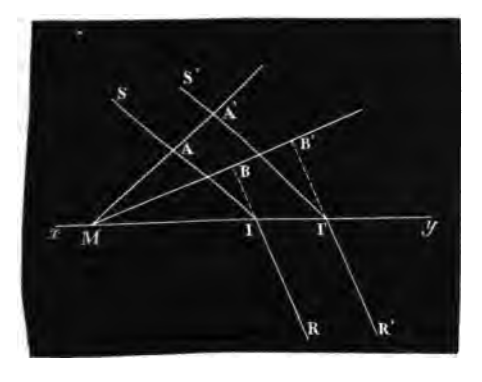


Werden Strahlen, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, von einer ebenen Trennungsfläche reflectirt und construirt man von den Einfallspunkten der Strahlen aus Kugeln, welche die Normalebene der einfallenden Strahlen berühren, so werden diese Kugeln noch von einer zweiten Ebene berührt, welche auf den reflectirten Strahlen senkrecht steht.

Es lässt sich ein ähnlicher Satz für die gebrochenen Strahlen ableiten.

Es seien (Fig. 2) IR, $I'R'$ die gebrochenen Strahlen, AA' und BB Ebenen, welche auf den einfallenden und den gebrochenen Strahlen senkrecht stehen, i, r, n der Einfallswinkel, der Brechungswinkel und der Brechungsexponent.

Fig. 2.



Dann ist

$$\sin i = \frac{IA}{IM} \qquad \sin r = \frac{IB}{IM}$$

$$\frac{IA}{IB} = \frac{\sin i}{\sin r} = n$$

$$IB = \frac{IA}{n}.$$

Es folgt:

Werden parallele Strahlen an einer ebenen Trennungsfläche gebrochen und beschreibt man von den Einfallspunkten aus Kugeln, welche eine Normalebene der einfallenden Strahlen berühren und andere Kugeln, deren Radien sich zu jenen der ersteren verhalten wie $1 : n$, so werden die letzteren Kugeln auf der Seite der einfallenden Strahlen von einer Ebene berührt, welche auf den Verlängerungen der gebrochenen Strahlen senkrecht steht.

Diese Sätze sind einer beträchtlichen Erweiterung fähig. Nehmen wir an, dass die Strahlen von einem Punkte in endlicher Enfernung ausgehen und dass die Trennungsfläche eine beliebige Gestalt habe. Wir können das einfallende Strahlenbüschel in unendlich schmale Elementarbüschel zerlegen, deren Strahlen wir als unter einander parallel ansehen. Indem wir die beiden ausgesprochenen Sätze auf sämmtliche Elementarbüschel anwenden, gelangen wir zu dem folgenden allgemeineren Satze:

Werden Strahlen, welche von einem Punkte, O, ausgehen, an einer beliebigen Trennungsfläche reflectirt und gebrochen, und construirt man von O aus eine beliebige Kugel, S, und von den Einfallspunkten aus Kugeln, welche S berühren, und andere Kugeln, deren Radien zu jenen der ersteren im Verhältnisse $1:n$ stehen, so werden die ersteren Kugeln noch von einer zweiten Fläche berührt, welche auf den reflectirten Strahlen senkrecht steht, und es werden die letzteren Kugeln auf der Seite der einfallenden Strahlen von einer Fläche berührt, welche auf den gebrochenen Strahlen senkrecht steht.

Wir haben den Radius der Kugel O unbestimmt gelassen. Indem wir demselben verschiedene Werthe ertheilen, gelangen wir zu verschiedenen Normalflächen der reflectirten und der gebrochenen Strahlen. In Wirklichkeit geht durch jeden Punkt eines reflectirten oder gebrochenen Strahles eine solche Fläche.

Werden die einmal reflectirten oder gebrochenen Strahlen ein zweites Mal reflectirt oder gebrochen, so kann man dieselbe Construction neuerdings anwenden, wobei an Stelle der Kugelfläche S eine der Normalflächen der einfallenden Strahlen zu setzen ist. Man sieht leicht, wie in dieser Weise der Gang von Strahlen, welche von einem Punkte kommen und an beliebigen Flächen Reflexionen und Brechungen erfahren, durch Construction verfolgt werden kann.

Wir ziehen aus dem vorhergehenden noch den folgenden allgemeinen Satz (Gergonne'sches Theorem):

Wenn Strahlen von einem Punkte ausgehen und an beliebigen Flächen Reflexionen und Brechungen erleiden, so behalten sie gleichwohl die Eigeschaft, Normalflächen zu besitzen.

Wir werden später sehen, dass jede dieser Normalflächen die Eigenschaft besitzt, von sämmtlichen Strahlen gleichzeitig erreicht zu werden.

Wir haben gezeigt, wie eine Normalfläche construirt werden kann. Um eine zweite Normalfläche zu erhalten, hat man von den Durchschnittspunkten der ersten Fläche mit den Strahlen auf diesen im selben Sinne gleiche Stücke abzutragen; die Endpunkte der abgetragenen Stücke bilden ebenfalls eine Normalfläche der Strahlen.

Die Normalflächen stehen zu den caustischen Flächen in einer einfachen Beziehung. Die Brennfläche ist der Ort der Durchschnitte der Strahlen, also die Doppelfläche, welche von den Hauptkrümmungscentren der Normalfläche gebildet wird. Ist insbesondere die Normalfläche eine Umdrehungsfläche, so degenerirt eine der Brennflächen in die Axe der

Rotation, während die zweite Brennfläche selbst eine Rotationsfläche wird, deren Meridian die Evolute des Meridianes der Normalfläche ist.

Wir verdanken die Kenntniss dieser Sätze den Forschungen von Malus[1]), Dupin[2]), Timmermans[3]) und Gergonne[4]).

4. Das Theorem von Sturm[5]).

Wir wollen ein Büschel Lichtstrahlen von unendlich kleinem Querschnitte betrachten, welches von einem Punkte ausgegangen ist und beliebige Reflexionen und Brechungen erlitten hat. Demselben kommt die Eigenschaft zu, Normalflächen zu besitzen. Seien (Fig. 3) $M'NP$ eine solche unendlich kleine Normalfläche, MN, $M'N'$, $M''N''$ Krümmungslinien auf derselben. Wir wissen, dass die einer solchen Krümmungslinie angehörigen Normalen eine abwickelbare Fläche bilden. Es werden also die Strahlen, welche die Normalfläche längs MN durchschneiden, Tangenten der Wendecurve der zu MN gehörigen abwickelbaren Fläche sein. Ist H ein Punkt des zu MN gehörigen Stückchens der Wendecurve, so wird man sagen können, dass die durch MN gehenden Strahlen sich im Punkte H durchschneiden. Ebenso werden sich die durch $M'N'$, $M''N''$ etc. gehenden Strahlen in Punkten wie H', H'' . . . durchschneiden. Sämmtliche Punkte H bilden eine unendlich kleine gerade Linie, durch welche sämmtliche Strahlen des Büschels hindurchgehen. Nun giebt es noch ein zweites System von Krümmungslinien, PQ, $P'Q'$ . . ., und folglich giebt es noch eine zweite unendlich kleine Gerade, KK', welche von sämmtlichen Strahlen geschnitten wird. Wir wollen zeigen, dass die Geraden HH' und KK' in zwei zu einander senkrechten Ebenen liegen.

Fig. 3.



Die durch A, A', A'' ... gehenden Strahlen schneiden sich in K und gehen der Reihe nach durch die Punkte H, H', H'' ... Die durch die Punkte H gebildete Gerade liegt also auf der abwickelbaren Fläche,

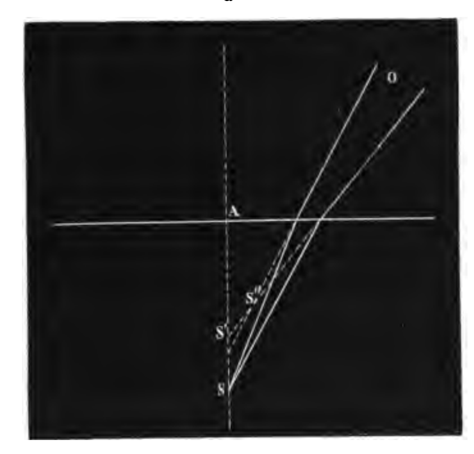
---

1) *Journ. de l'Ec. Polytechn.*, XIV, 1. — 2) *Applic. de Géom. et de Méc.*, IV, 187. — 3) *Correspond. mathem. et phys.*, I, 336. — 4) *Ann. de Math.*, XVI, 307; XIV, 129. — 5) C. R. XX, 554, 761, 1238.

welche durch die Normalen der Krümmungslinie PQ gebildet wird. Ebenso liegt die Gerade KK' auf der abwickelbaren Fläche, welche durch die Normalen der Krümmungslinie MN gebildet wird. Da sich nun diese beiden abwickelbaren Flächen längs der Normale des Punktes A rechtwinklig durchschneiden, so folgt: Sämmtliche Strahlen des betrachteten Büschels von unendlich kleinem Querschnitte gehen durch zwei unendlich kleine gerade Linien, welche in zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen liegen. Diese beiden Brennlinien haben im Allgemeinen eine endliche Entfernung von einander. Wenn sich dieselben durchschneiden, so existirt ein eigentlicher Brennpunkt. Da nämlich sämmtliche Strahlen sowohl durch die eine als durch die andere Brennlinie hindurchgehen müssen, so reduciren sich die beiden Brennlinien in dem betrachteten Falle nothwendig auf ihren Durchschnittspunkt.

Sind die Flächen, an welchen die Reflexionen und Brechungen stattfinden, Rotationsflächen derselben Axe und liegt der leuchtende Punkt auf dieser Axe, so folgt insbesondere für Strahlen, welche mit der Axe kleine Winkel bilden, die Existenz eines Brennpunktes. Irgend eine Normalfläche der austretenden Strahlen ist nämlich in diesem Falle ebenfalls eine Rotationsfläche, deren Durchschnittspunkt mit der Axe ein Nabelpunkt ist, woraus folgt, dass sämmtliche Strahlen sich in einem Punkte der Axe, dem zu jenem Nabelpunkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte, durchkreuzen.

Fig. 4.



Wir wählen als Beispiel den Fall, wo ein unter Wasser befindlicher leuchtender Punkt wahrgenommen wird.

Es sei (Fig. 4) S der leuchtende Punkt, O das Auge. Betrachten wir ein Strahlenbüschel von geringem Querschnitte, welches in das Auge gelangt. Wenn wir von diesem Büschel nur solche Strahlen betrachten, welche mit SA gleiche Winkel bilden, so ist klar, dass deren Verlängerungen sich in einem Punkte der Normale SA treffen, etwa in S'. Betrachten wir andererseits solche Strahlen, welche in derselben, durch SA gehenden, Ebene liegen, so schneiden sich die Verlängerungen derselben in einem Punkte S'', welcher von S' verschieden ist und im Allgemeinen nicht auf SA liegt. Es folgt, dass eine der beiden Brennlinien mit einem Stückchen der Normale SA zusammenfällt, die andere auf der mittleren Brechungsebene des Strahlenbüschels senkrecht steht. Es entsteht also kein eigentliches Bild des leuchtenden

Punktes. Wenn man die gebrochenen Strahlen mit einer Linse auffängt, so convergiren dieselben nicht nach einem Punkte, sondern bilden in verschiedenen Distanzen von der Linse zwei Brennlinien. Hat man als Lichtquelle eine leuchtende Linie, welche mit der Normale SA zusammenfällt, so bilden die Brennlinien, welche durch die einzelnen Punkte der leuchtenden Geraden SA längs dieser Geraden selbst hervorgebracht werden, zusammen ein auf SA fallendes Bild derselben, welches mittelst einer Linse projicirt werden kann.

Geht ein Strahlenbüschel von geringem Querschnitte nahe der Kante durch ein Prisma, so ergiebt die Rechnung, dass die beiden Brennlinien sich schneiden, also ein Brennpunkt entsteht, wenn das Prisma auf das Minimum der Deriation eingestellt ist. Diese Stellung des Prismas eignet sich also allein zur Erzeugung eines guten Bildes und eines reinen Spectrums.

Bibliographie.

Theorie der Brennflächen.

1682. Tschirnhausen, Inventa nova, etc., *Acta eruditorum*, 1682, p. 364.

1690. De la Hire, Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans un quart de cercle, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, IX, 448.

1692. Jean Bernoulli, Solutio curvae causticae per vulgarem geometriam Cartesianam, *Opera*, I, 52.

1693. Jacob Bernoulli, Curvae diacausticae earumque relatio ad evolutas, *Acta eruditorum*, 1693.

1696. L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits*, p. 104.

1807. Malus, Traité d'optique, *Mém. des sav. étrang.*, II, 214.

1808. Malus, Mémoire sur l'optique, *Journ. de l'Éc. Polytechn.*, cah. XIV, p. 1.

1812. Petit, Des caustiques par réflexion et par réfraction, *Corresp. sur l'Éc. Polytechn.*, II, 354.

1817. Ch. Dupin, Mémoire sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion, *Ann. de chim. et de phys.* (2), V, 85.

1822. Ch. Dupin, Sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction, *Applic. de géom. et de mécan.*, p. 187.

1822. Quetelet, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction, *Nouv. Mém. de Brux.*, III, 15.

1823. Gergonne, Recherche analytique des propriétés les plus générales des faisceaux lumineux directs, réfléchis et réfractés, *Ann. de math.*, XIV, 129.

1824. Sturm, Recherches sur les caustiques par réflexion et par réfraction dans le cercle, *Ann. de math.*, XV, 205.

1826. Timmermans, Recherches sur les caustiques, *Corresp. de math. et de phys.*, I, 336.

1826. Saint-Laurent, Recherches sur les caustiques par réflexion dans le cercle, *Ann. de math.*, XVI, 1.

1826. Gergonne, Solution de divers problèmes d'optique, *Ann. de math.*, XVI, 65.

1826. Gergonne, Formules d'optique à trois dimensions, *Ann. de math.*, XVI, 247.

1826. Gergonne, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques et résumé historique de cette recherche, *Ann. de math.*, XVI, 307.

1827. Quetelet, Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, *Nouv. Mém. de Brux.*, IV, 79.

1828—30. Hamilton, An Essay on the Theory of Systems of Rays, *Ir. Trans.*, XV, 69, XVI, 1, 94.

1829. Coddington, *A Treatise of the Reflexion and Refraction of Light* Cambridge.

1833. Quetelet, Analogie entre la théorie des caustiques et celle des développantes et des développées. — Théorie des surfaces et des lignes aplanétiques, *Supplém. à la trad. du Traité de la lumière de J. Herschel,* II, 380.

1838. Sturm, Mémoire sur l'optique, *Journ. de Lionville* (1), III, 357.

1848. Sturm, Sur la théorie de la vision, *C. R.*, XX, 554, 761, 1238.

1848. Plücker, Sur la réflexion de la lumière dans le cas des surfaces du second degré, *Journ. de Crelle,* XXXV, 100.

1854. Vallée, Note sur plusieurs théorèmes relatifs aux systèmes de droites situées dans l'espace, *C. R.,* XXXVIII, 18.

1858. Maxwell, On the General Laws of Optical Instruments, *Quart. Journ. of Math.*, II, 233.

1859. Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, *Journ. de Crelle,* LVII, 189. — *Berl. Monatsber.*, 1860, p. 469.

1861. Meibauer, *De generalibus et infinite tenuibus luminis fascibus, praecipue in chrystallis,* Berolini.

1862. Seidel, Ueber die Brennflächen eines Strahlenbündels, welches durch ein System von concentrirten sphärischen Gläsern hindurchgezogen ist, *Berl. Monatsber.,* 1862, p. 696.

1863. Möbius, Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel, *Leipz. Ber.,* 1862, p. 1.

1863. Meibauer, Ueber allgemeine Strahlensysteme des Lichts in verschiedenen Mitteln, *Zeitschrift für Math.,* 1863, p. 369.

1864. Meibauer, *Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts,* Berlin.

1866. Lévistal, Recherches d'optique géométrique, *C. R.,* LXIII, 458.

1866. Gilbert, Sur la concordance des rayons lumineux au foyer des lentilles, *C. R.,* LXIII, 800.

1867. Lévistal, Sur les propriétés générales des systèmes optiques de rayons rectilignes, *Ann. de l'Éc. Norm.,* IV, 195.

1869. E. Weyr, Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven, *Z. S. f. Math.,* XIV, 376.

1873. J. C. Maxwell, On the focal lines of a refracted pencil, *London. Math. soc.,* 1873.

1875. L. Hermann, Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystalllinse, *Pogg. Ann.,* CLIII, 470.

II.

Geschichte der Entwickelung der Undulationstheorie.

---

5. Die Zeit vor Descartes.

Empedokles, Demokrit, Epikur, Lucrez hielten das Feuer für eine Materie, Aristoteles für eine Bewegung. Später galt die Materialität des Lichtes als ausgemacht. Erst in den Manuscripten Leonardo da Vinci's[1]) und in der Correspondenz Galilei's finden wir wieder Spuren einer Bewegungstheorie. Im 17. Jahrhundert haben Huyghens und andere Forscher sich vielfach mit der Idee beschäftigt, welche das Wesen des Lichtes in einer Bewegung der kleinsten Körpertheilchen sucht.

6. Descartes (1596 bis 1650).

Man hält zuweilen Descartes für den Begründer der Undulationstheorie. Dies war auch die Ansicht Euler's, während Huyghens seine eigene Theorie dem Systeme Descarte's entgegenstellt.

Descartes hat seine Lehren über das Wesen des Lichtes in dreien seiner Werke mitgetheilt[2]). Er geht von der Vorstellung eines absolut erfüllten Raumes aus. Die Molecüle der leuchtenden Körper befinden sich in Bewegung und üben auf ein gewisses Medium einen Druck aus, welcher sich momentan, d. i. zeitlos, auf die entferntesten Punkte überträgt. Er vergleicht diese Art der Fortpflanzung mit der Fortpflanzung eines Druckes von einem Ende eines Stabes zum anderen, indem er diese Art der Fortpflanzung selbst für zeitlos hält.

Um die Zeitlosigkeit der Fortpflanzung zu beweisen, führt er an, dass, wenn das Licht eine Zeit brauchte, wir die Finsternisse nicht in dem Momente wahrnehmen könnten, in welchem Sonne, Erde und Mond eine gerade Linie bilden, sondern etwas später. Die Arbeiten Römer's,

---

[1]) Libri, Geschichte der Mathematik in Italien. — [2]) *Principia philosophiae*, III, — *Dioptrica*, 1637, — *Mundus sive dissertatio de lumine.*

welcher aus dem Zurückbleiben der Jupitermonde die Geschwindigkeit des Lichtes bestimmte, haben diese Beweisführung entkräftet.

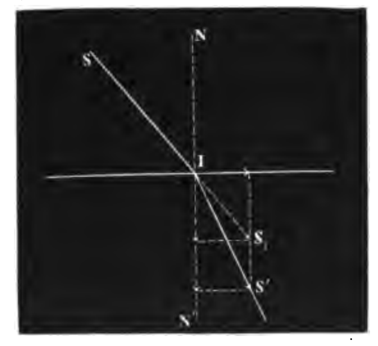
Die Idee der Fortpflanzung des Lichtes durch Wellenbewegung war Descartes vollständig fremd. Gleichwohl stimmt seine Ansicht über das Wesen der Wärme mit unseren jetzigen Vorstellungen vollkommen überein. Er definirt die Wärme als „*une agitation interne des particules des corps*“ und charakterisirt diese Bewegung in Ausdrücken, an welchen auch heute nichts zu ändern wäre. Diese innere Vibrationsbewegung ist nach Descartes bei Körpern, welche gleichzeitig warm und leuchtend sind, der Ursprung der Lichtimpulsion, welche sich zeitlos nach allen Richtungen und auf alle Entfernungen fortpflanzt.

Descartes war in seinen Ansichten über das Wesen des Lichtes keineswegs fest. Die Schwäche seiner Theorie zeigte sich bei der Ableitung des von ihm durch sorgfältige Experimente gefundenen Brechungsgesetzes, welches Snellius, wie es scheint, schon etwas früher entdeckt hatte. Die Annahme einer zeitlosen Fortpflanzung des Lichtes ist so unfruchtbar, dass sich Descartes bei der Erklärung der Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes genöthigt sah, zu einer durchaus unzulässigen Analogie die Zuflucht zu nehmen.

Der Druck, welcher von dem leuchtenden Körper ausgeübt wird, sagt Descartes, muss wie ein sich in der Richtung des Druckes bewegendes Projectil reflectirt werden und es ergiebt sich hieraus das Reflexionsgesetz.

Die Brechung des Lichtes wird verglichen mit dem Durchgange eines Projectils durch eine widerstehende Fläche. Sei (Fig. 5) *SI* die Richtung des Projectils, *I* der Punkt der widerstehenden Fläche, in welchem dieselbe von dem gedachten Projectile durchsetzt wird. Die Geschwindigkeit des Projectils zerlegt sich in zwei Composanten parallel und senkrecht zur widerstehenden Fläche. Die parallele Composante bleibt ungeändert, die senkrechte nicht. Sind v und v' die Geschwindigkeiten des Projectils vor und nach der Brechung, i und r der Einfalls- und Brechungswinkel, so ergiebt sich

Fig. 5.



$$v \sin i = v' \sin r$$

und

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v'}{v}.$$

Das Verhältniss der Sinus wäre hiernach constant und verkehrt proportional den entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

7. Fermat (1608 bis 1665).

Die Theorie Descartes' wurde von Fermat angegriffen[1]. Er fand es bedenklich, dass das Licht in einem Körper desto weniger Widerstand finden solle, je dichter er ist, und fand es nicht zulässig, aus den Gesetzen der Bewegung der Projectile auf jene der Fortpflanzung eines Druckes zu schliessen, da man durch Anwendung derselben Schussweise auf die Flüssigkeiten zu Resultaten gelangt, welche mit der Erfahrung im Widerspruche stehen[1].

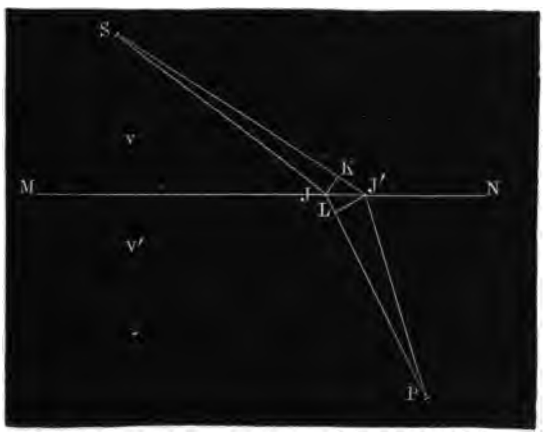
Descartes erwiderte auf den ersten Einwurf mit der Unterscheidung zwischen der Dichte eines Körpers im gewöhnlichen Sinne und seiner optischen Dichte und liess den zweiten Einwurf unbeantwortet.

Die Controverse, welche von Fermat gegen Descartes und später gegen dessen Schüler unterhalten wurde, führte indessen zu einem interessanten Resultate.

Lachambre, ein Zeitgenosse Descartes' und Fermat's, hatte bemerkt[2], dass die Lichtstrahlen nach dem Reflexionsgesetze den kürzesten unter allen Wegen beschreiben, welche zwischen dem leuchtenden und dem beleuchteten Punkte unter Berührung der reflectirenden Ebene gedacht werden können. Fermat dehnte diesen Satz, welchen schon Hero von Alexandrien ausgesprochen hatte, auf die Brechung aus.

Wir wollen die Ableitung in einfacherer Weise geben, als Fermat dies gethan hat.

Fig. 6.



Es sei (Fig. 6) MN die Trennungsebene der Medien, SJ, JP der einfallende und der gebrochene Strahl. Es soll diejenige Lage des

---

[1]) *Litterae ad patrem Mersennum continentes objectiones quasdam contra Dioptricam Cartesii, Epistolae Cartesianae, pars* III, *litt.* 29—46, Paris 1667. — [2]) *De la lumière,* Paris 1662.

Punktes J auf MN gesucht werden, für welche der Weg SJP in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird. Zunächst ist klar, dass die Ebene SJP auf der Ebene MN senkrecht stehen muss. Dies vorausgesetzt, sei $SJ'P$ ein dem Wege SJP unendlich nahe liegender Weg in der Ebene SJP. Dann müssen die Zeiten, in welchen KJ' und JL zurückgelegt werden, gleich sein. Sind v und v' die Geschwindigkeiten in den beiden Medien, so folgt:

$$\frac{KJ'}{v} = \frac{JL}{v'}$$

oder, wenn der Einfalls- und der Brechungswinkel durch i und r bezeichnet werden,

$$\frac{JJ' \sin i}{v} = \frac{JJ' \sin r}{v'}$$

und

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

Fermat erhielt so das Brechungsgesetz Descartes' und für die Brechungsexponenten das Verhältniss $v : v'$, während Descartes $v' : v$ erhalten hatte. Es ist wohl zu bemerken, dass Fermat's Theorie nur auf eine reflectirende oder brechende Ebene passt. Ist die Trennungsfläche gekrümmt, so ist die Zeit, welche das Licht braucht, im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum, kann sogar in besonderen Fällen weder ein Maximum noch ein Minimum sein. Stets jedoch ist die Variation der Zeit für den Punkt der Reflexion oder Brechung der Nulle gleich.

Fermat's Satz lässt sich leicht auf beliebig viele Trennungsflächen ausdehnen: Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von brechenden Mitteln hindurchgegangen ist, welche durch Flächen von continuirlicher Krümmung begrenzt sind, so lässt sich sein Weg durch die Bedingung bestimmen, dass die optische Länge des Strahles zwischen einem seiner Punkte im ersten und einem im letzten Mittel ein Maximum oder Minimum ist [1]).

8. Hooke (1635 bis 1703).

Mehrere Forscher, so Young und Arago, citiren als einen der Begründer der Wellentheorie Robert Hooke, und schreiben ihm die Entdeckung des Princips der Interferenz zu. Seine Lehren über die Natur des Lichtes sind enthalten in seinen Werken *Micrographia* und *Lectures on Light*. Er definirte das Licht als „*A quick, vibratile movement of extremes shortness*" [2]), als eine rasche Vibrationsbewegung von geringer Excursion. Er kam, wie Grimaldi, durch die Beugungs-

---

[1]) Helmholtz, Phys. Optik. — [2]) Micrographia, 55.

erscheinungen zu dem Schlusse, dass das Licht sich als Wellenbewegung eines allverbreiteten Mediums fortpflanze und sprach den Satz aus:

Die Bewegung des Lichtes in einem gleichförmigen Medium, in welchem sie erzeugt wird, pflanzt sich fort durch einfache und gleichförmige Impulse oder Wellen, welche auf der Linie der Fortpflanzungsrichtung rechtwinklig sind. Die letzte Bemerkung war wohl nur ein glücklicher Einfall.

Er schloss aus Versuchen mit einem Drahte, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles unendlich gross sei[1]) und behauptete dasselbe vom Lichte. Er hielt also in dieser Beziehung an Descartes' Anschauung fest und suchte die Schlüsse zu widerlegen, welche Römer aus seinen Beobachtungen der Jupitersatelliten gezogen hatte[2]).

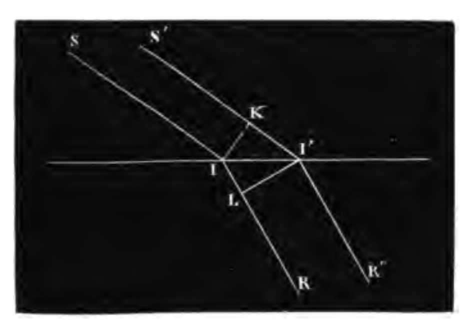
Hooke studirte die Farben dünner Blättchen und brachte dieselben mit Hülfe zweier Prismen hervor, von welchen das eine wenig convex war, so dass er für den Erfinder des sogenannten Newton'schen Farbenglases gelten muss. Er suchte die Ursache der Verschiedenheit der Farben in der Verschiedenheit der Gesetze der Aufeinanderfolge der Impulse und erklärte die Farben dünner Blättchen aus dem Zusammenwirken der an der ersten und an der zweiten Begrenzungsfläche des Blättchens reflectirten Strahlen[3]).

So bedeutend hiernach Hooke's Verdienste um die Optik sind, verfolgte er doch seine Entdeckungen nicht gehörig und war nicht gerüstet, den Kampf mit Newton aufzunehmen, so dass es ihm nur gelang, diesem die Optik zu verleiden, nicht ihn zu überzeugen.

9. Paradies und Ango.

Huyghens hat einen Vorläufer in dem Jesuiten Paradies (1636 bis 1673). Zwar hatte Paradies selbst nichts über das Wesen des Lichtes veröffentlicht, doch wurden seine Ideen von einem anderen Jesuiten, Ango, im Jahre 1682 reproducirt[4]) und Huyghens, welcher seine Manuscripte in Händen hatte, zählt ihn zu den Begründern der Wellentheorie[5]).


Fig. 7.



Man findet in der Optik Ango's eine vorzügliche Darstellung der Vibrationsbewegung, welche das Licht ausmacht. Er vergleicht diese Bewegung mit derjenigen eines Pendels, ferner mit den Wellen, welche

[1]) Micrographia. — [2]) Posthumous Works, 77. — [3]) Micrographia, 64. — [4]) *L'Optique divisée en trois livres etc.,* Paris 1682. — [5]) Optik, 18.

durch einen ins Wasser geworfenen Stein entstehen. Er erklärt die Fortpflanzung des Lichtes durch successive Schwingungen des Aethers und vergleicht dieselbe mit derjenigen des Schalles. Wir reproduciren die folgende treffende Bemerkung [1]).

Es seien (Fig. 7, a. v. S.) $SI, \ldots, S'I'$ Strahlen, welche von einem unendlich entfernten Punkte kommen, II' eine ebene Trennungsfläche, $IR \ldots IR'$ die gebrochenen Strahlen, IK, $I'L$ Ebenen senkrecht zu SI und IR. Die Ebene IK, welche auf den einfallenden Strahlen senkrecht steht, ist eine Wellenfläche der einfallenden Strahlen, eine vom leuchtenden Punkte ausgehende Erschütterung erreicht gleichzeitig die verschiedenen Punkte dieser Fläche. Es ist natürlich, anzunehmen, dass auch eine zu den gebrochenen Strahlen normale Ebene von den Erschütterungen gleichzeitig erreicht wird. Es werden also die Strecken KI' und IL gleichzeitig zurückgelegt und es ergiebt sich:

$$\frac{KI'}{IL} = \frac{v}{v'}$$

und

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

10. Huyghens (1629 bis 1695).

Huyghens veröffentlichte seine Lichttheorie im Jahre 1690 [2]). Derselben mangelt noch die Vorstellung von der Periodicität der Lichtbewegung. Huyghens betrachtet stets Wellen, welche einem einzigen Impulse entsprechen, und obgleich er annimmt, dass Impulse von gleicher Beschaffenheit einander folgen und sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, setzt er doch keine Beziehung zwischen denselben voraus, keine Regelmässigkeit der Aufeinanderfolge. Das Princip der Interferenz blieb ihm unbekannt.

Desto durchgreifender sind seine Vorstellungen über die Art der Fortpflanzung des Lichtes. Er erkennt, dass die Vibrationsbewegung der leuchtenden Körper keine Gesammtbewegung sein kann, wie die der tönenden, dass vielmehr, um die Sichtbarkeit der einzelnen Punkte der Oberflächen der Körper zu verstehen, angenommen werden muss, dass die einzelnen Molecüle für sich schwingen. Er erkennt, dass sich die Lichtschwingungen in einem eigenen Mittel, welches er Aether nennt, fortpflanzen und schliesst auf dessen Existenz aus der grossen Geschwindigkeit des Lichtes im Vergleiche mit der Geschwindigkeit des Schalles.

Um die Art der Fortpflanzung der Wellen in diesem Mittel verständlich zu machen, greift er nach der Analogie mit der Fortpflanzung des Stosses durch elastische Kugeln. Er dehnt diese Analogie aus, um die Existenz einer endlichen Dauer der Lichtfortpflanzung zu beweisen,

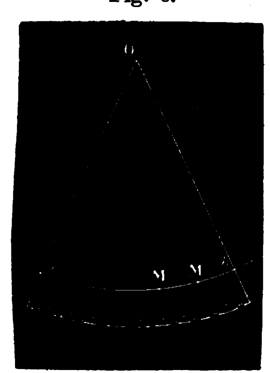
[1]) Optik, 60. — [2]) *Traité de la lumière,* Leyden.

und zeigt an demselben Beispiele, wie sich in einem elastischen Medium gleichzeitig zwei Impulse in entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen können. Lässt man bei dem bekannten Apparate zum Nachweise der Stosswirkung elastischer Kugeln die erste Kugel anprallen, so springt die letzte Kugel der Reihe ab. Lässt man aber beiderseits Kugeln anprallen, so springen beide Kugeln ab. Er machte es also begreiflich, dass Lichtstrahlen sich in einem Punkte kreuzen können, ohne sich gegenseitig zu stören, eine Thatsache, welche die Physiker bis dahin in Verlegenheit gesetzt hatte und für welche Euler später eine nicht zulässige Erklärung gab.

Huyghens führte die Gesetze der geradlinigen Fortpflanzung, der Reflexion und der Brechung auf ein einziges Princip zurück, wir wollen es das Princip der einhüllenden Wellen nennen. Das sogenannte Huyghens'sche Princip ist eine Verbindung dieses Princips mit dem Principe der Interferenz und wir wissen, dass dieses letztere Huyghens fremd war[1]).

Es sei (Fig. 8) O ein leuchtender Punkt, MM' eine von diesem Punkte kommende Welle. Jeder Punkt derselben kann als ein Be-


Fig. 8.



wegungscentrum angesehen werden und die Bewegung eines beliebigen Punktes A ausserhalb MM', kann angesehen werden entweder als hervorgehend aus den Bewegungen sämmtlicher Punkte der Welle MM' oder als hervorgehend aus der Bewegung des Punktes O allein. In irgend einem Momente gehen von den Punkten der Welle MM' elementare Kugelwellen aus. Diese gewinnen während irgend einer Zeit gleich grosse Radien und werden von einer Kugelfläche eingehüllt, deren Centrum auf O fällt. Es ist klar, dass in diesem Momente ausserhalb der Einhüllenden keine Bewegung existirt. Was den Raum innerhalb der Einhüllenden betrifft, so begnügt sich Huyghens damit, anzunehmen, dass die Bewegung daselbst unmerklich sei im Vergleiche mit der Bewegung auf der Einhüllenden und fügt hinzu: *„Ceci ne doit pas être recherché avec trop de soin ni de subtilité."*

Huyghens erklärte aus seinem Principe leicht das Gesetz der geradlinigen Fortpflanzung. Es trete die Welle durch eine Oeffnung in einem Schirme, ab (Fig. 8). Wir beschreiben von den Punkten der Welle ab aus Kugeln mit gleich grossen Radien. Die Einhüllende dieser Kugelflächen liegt ganz innerhalb der Verlängerung der Kegelfläche aob. Ausserhalb derselben befinden sich nur Theile von Elementarwellen, welche nach Huyghens keine merkliche Lichtwirkung hervorbringen. Es folgt also das Gesetz der geradlinigen Fortpflanzung.

---

1) Optik, 17.

Huyghens leitete in gleicher Weise aus seinem Principe die Gesetze der Reflexion und Brechung ab.

Hier werden die Einfallspunkte der Strahlen als Mittelpunkte der Elementarwellen angesehen. Da diese Einfallspunkte von ihren Strahlen nicht gleichzeitig erreicht werden, so entsprechen auch die Radien der Elementarwellen nicht derselben Zeitdauer. Die Einhüllende der Elementarwellen ist die reflectirte oder gebrochene Welle.

Die von Huyghens gegebenen Ableitungen sind dieselben, welche in modernen Lehrbüchern gegeben werden. Wir begnügen uns damit, die von Huyghens für das Brechungsgesetz gegebene Erklärung zu wiederholen.

Es sei (Fig. 9) AA' die einfallende Welle. Nach Verlauf einer Zeit $\frac{A'B}{v}$ wird dieselbe durch B gehen und es wird sich von A aus im neuen Medium eine Elementarwelle vom Radius $\frac{A'B \cdot v'}{v}$ gebildet haben, von C aus eine Elementarwelle vom Radius $\frac{C'B \cdot v'}{v}$ u. s. w. Man sieht leicht, dass sämmtliche Elementarwellen von einer Ebene berührt werden, der gebrochenen Wellenfläche BB'. Zieht man AB', CB'' u. s. w. senkrecht auf BB', so hat man die gebrochenen Strahlen.

Fig. 9.

Es ist nun

$$A'B = AB \sin i$$
$$AB' = AB \sin r$$
$$\frac{v}{v'} = \frac{A'B}{AB'} = \frac{\sin i}{\sin r}.$$

Huyghens beschränkte seine Beweisführungen nicht auf isotrope Mittel. Seine Methode ist in der That unabhängig von der Gestalt der Elementarwellen und lässt sich auch auf optische Mittel anwenden, in welchen die Elementarwellen nicht die Kugelgestalt haben. Er eröffnete so der Theorie das Gebiet der Doppelbrechung, welche von Erasmus Bartholinus im Jahre 1669 am Kalkspath entdeckt wurde. Er berechnete das Phänomen der Doppelbrechung im Kalkspathe und in anderen Krystallen vollständig und bekräftigte seine Theorie durch genaue Messungen. Gleichwohl blieb sein unsterbliches Werk durch ein halbes Jahrhundert unbeachtet, während niemand an der Richtigkeit der von dem berühmten Newton aufgestellten Lichttheorie zweifelte.

Huyghens hielt die Schwingungen des Lichtes für longitudinal, wie die des Schalles, und es war ihm versagt, das Wesen der Polarisation zu erkennen, welche er an zwei Kalkspathrhomboëdern entdeckt hatte.

11. Newton (1642 bis 1727).

Newton, der Schöpfer der Emissionstheorie, nimmt gleichwohl in der Geschichte der Undulationstheorie einen hervorragenden Platz ein durch diejenigen seiner Arbeiten, welche wesentlich zur Einführung des Princips der Periodicität in die Lichttheorie beitrugen. Solcher Art sind seine Arbeiten über die Dispersion und über die Farben dünner Blättchen.

Die Dispersion ist entdeckt von Johannes Markus[1]) und wurde auch von Grimaldi[2]) beobachtet. Es waren aber namentlich die Arbeiten Newton's[3]) über die Dispersion, welche die Aufmerksamkeit der Physiker auf die Existenz verschiedener Gattungen des Lichtes lenkte, und sie lehrte dem entsprechend verschiedene Gattungen der Undulation zu unterscheiden.

Nicht minder haben seine Experimente über die Farbenringe dazu beigetragen, das Princip der Periodicität in die Undulationstheorie einzuführen. Wenn Lichtstrahlen ein dünnes durchsichtiges Blättchen treffen, so ist die Intensität des reflectirten oder durchgelassenen Lichtes bei wachsender Dicke des Blättchens abwechselnd ein Maximum und Minimum, je nach der Wegdifferenz der beiden Strahlen, und man muss hieraus auf periodische Veränderungen schliessen, welche an ein und derselben Stelle eines Lichtstrahles in gleichen Zeitintervallen vor sich gehen.

Die Farben dünner Blättchen wurden zuerst von Robert Boyle 1663 an Seifenblasen beobachtet, später von Lord Brereton an verwitterten Fensterscheiben. Hooke erzeugte dieselben durch Uebereinanderlegen von Gläsern. Newton verfolgte den Gegenstand genauer, stellte durch Messungen die Gesetze der Ringe fest und gab eine Erklärung, in welcher zum ersten Male die Idee der Periodicität, ja selbst periodischer Schwingungen eines elastischen Mittels, des Aethers, auftritt. Newton wusste nicht, dass die reflectirten dunklen Ringe dunkler sind, als das an der Vorderfläche des Blättchens allein reflectirte Licht. Er nahm daher an, dass die an der Vorderfläche reflectirten Strahlen immer vorhanden seien und dass die in das Blättchen eindringenden Strahlen an der Hinterfläche bald reflectirt, bald durchgelassen werden. Um dies zu erklären, nimmt er weiter an, dass ein Lichtmolecül, wenn es die Trennungsfläche zweier Medien trifft, im Aether, welcher alle Körper durchdringt, Schwingungen hervorbringt, welche sich vom Einfallspunkte aus mit einer gewissen Geschwindigkeit, welche grösser ist, als die des Lichtmolecüls, fortpflanzen und das Molecül begleiten. Begünstigen nun

[1]) *Thaumantias, liber de arcu coelesti deque colorum apparentium natura,* Prag 1648. — [2]) *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride, Bononiae* 1665. — [3]) Optik, London 1704.

die Aetherwellen in dem Momente, wo das Molecül an die zweite Begrenzungsfläche gelangt, den Uebertritt, so geht das Molecül durch, wenn nicht, wird es reflectirt.

Diese Erklärung unterscheidet sich wesentlich von jenen, welche später von Boscovich[1]) und Biot[2]) gegeben worden sind und nähert sich merklich den Anschauungen der Undulationstheorie.

Es ist natürlich und bemerkenswerth, dass Newton[3]) die Frage gestellt und beantwortet hat, ob die Hypothese eines Aethers, in welchem sich periodische Schwingungen fortpflanzen, zur Entwickelung einer vollständigen Lichttheorie nicht hinreichen würde. Newton hat diese Frage verneint namentlich in Rücksicht auf die Entdeckung der Lichtpolarisation durch Huyghens selbst, welche, so lange man nur an Longitudinalschwingungen des Aethers dachte, aus der Undulationstheorie nicht erklärt werden konnte, so dass Huyghens selbst klagte: „*Mais pour dire comment cela se fait, je n'ai rien trouvé jusqu'ici qui puisse me satisfaire.*“ Fresnel löste später diese Schwierigkeit in glücklicher Weise durch die Annahme von Transversalschwingungen.

12. Euler (1707 bis 1783).

Die Entdeckungen Newton's führten die Anhänger der Undulationstheorie zur Erkenntniss, dass die Bewegung des Aethers, welche das Licht ausmacht, nicht, wie Huyghens glaubte, aus einzelnen, von einander unabhängigen Erschütterungen besteht, sondern dass man es mit einer Wellenbewegung von bestimmter Periode zu thun habe.

Huyghens' Lehre war durch die Autorität Newton's in Schatten gestellt; erst ein halbes Jahrhundert nach ihrer Veröffentlichung trat Euler neuerdings für die Wellentheorie ein. Er war der erste, welcher mit Nachdruck die Periodicität der Lichtbewegung lehrte und sie in dieser Beziehung mit der Schallbewegung verglich. Er erkannte die Abhängigkeit der Farbe von der Schwingungsdauer und die Analogie zwischen Farbe und Tonhöhe. Zur Erklärung der Farben dünner Blättchen verglich er die optische Wirkung eines dünnen Blättchens mit der akustischen Wirkung einer an beiden Enden offenen Röhre[4]). Er bemerkte, dass kürzere Röhren höhere Töne geben, und schloss daraus, dass jene Lichtstrahlen die geringste Schwingungsdauer haben, welche von den dünnsten Blättchen reflectirt werde, d. i. die violetten oder brechbarsten. Die periodische Wiederkehr einer Farbe bei Verdickung des Blättchens verglich er mit dem Umstande, dass derselbe Ton auf verschiedene Röhren wirkt, deren Längen in gewissen Grössenverhältnissen stehen.

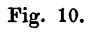
---

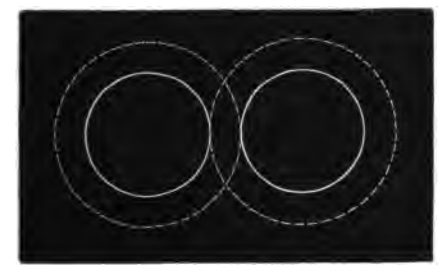
[1]) *Theoria Philosophiae naturalis, Venet.* 1763. — *Dissertatio de lumine,* 1748. — [2]) Physik, IV, 88. — [3]) Optik, III. — [4]) Berliner Akademie, 1746 und 1752.

13. Young (1773 bis 1829).

Young kann als der Erfinder des Princips der Interferenz angesehen werden, welches nicht wenig zur Beseitigung der Emissionstheorie beitrug und seit dem Beginne unseres Jahrhunderts der Ausgangspunkt beträchtlicher Erweiterungen der Wissenschaft wurde. Zwar schreibt man zuweilen die Entdeckung dieses Princips dem Jesuiten Grimaldi [1]) zu, dem Autor eines Werkes über das Licht, veröffentlicht im Jahre 1665 und gewiss ist, dass Grimaldi die Beugung des Lichtes entdeckt hat, und dass er sowohl die ausserhalb als die innerhalb des geometrischen Schattens eines beugenden Körpers entstehenden Streifen in seinem Werke genau beschrieben hat, dessen Hauptzweck die Entscheidung der damals höchst wichtigen Frage war, ob das Licht eine Substanz oder Eigenschaft der Körper sei, eine *qualitas substantialis* oder *accidentalis*; auch sagt Grimaldi in der 22. Proposition seines Werkes, dass in gewissen Fällen zwei Lichtstrahlen sich durch ihr Zusammentreffen abschwächen können: „*Lumen aliquando per sui communicationem reddit obscuriorem superficiem corporis alicande ac prius illustratam*,“ welche Stelle in die *Ann. de ch. et de phys.* [2]) übergegangen ist; allein aus der Beschreibung, welche Grimaldi selbst von dem Experimente giebt, durch welches er diesen Ausspruch stützte, geht hervor, dass die von ihm beobachtete Abschwächung des Lichtes keine Interferenzerscheinung war. Der Versuch, wie ihn Grimaldi selbst beschreibt, ist folgender:

Die directen Sonnenstrahlen treten durch zwei kleine, nahe an einander liegende Oeffnungen des Fensterladens in ein verfinstertes Zimmer. Die von den Oeffnungen ausgehenden Lichtbüschel greifen in einiger Entfernung in einander und werden vermittelst eines Schirmes aufgefangen. Wenn man zuerst eine der Oeffnungen bedeckt, so sieht man auf dem Schirme eine helle Kreisfläche weissen Lichtes, umgeben von einem lichtschwächeren Ringe, dessen äusserer Rand röthlich gefärbt erscheint. Wirken beide Oeffnungen und stellt man den Schirm so, dass die äusseren lichtschwachen Ringe sich theilweise decken und die inneren helleren Kreise sich berühren (Fig. 10), so erscheinen die äusseren Ränder der lichtschwächeren Ringe innerhalb des gemeinsamen Feldes der beiden Lichtbilder minder hell als ausserhalb.


Fig. 10.



---

[1]) *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride, Bononiae*, 1665. — [2]) (2), T. X, p. 306.

Grimaldi sagt nichts Näheres über seine Versuchsanordnung, doch kann man bei den heutigen Kenntnissen von den experimentellen Bedingungen und dem Ansehen der Interferenzerscheinungen behaupten, dass Grimaldi keine Interferenzen wahrgenommen habe. Die durch eine Oeffnung allein hervorgebrachte Erscheinung war eine Beugungserscheinung, die aus dem Zusammenwirken beider Oeffnungen entstandene scheint auf Contrastwirkung beruht zu haben.

Der Schluss, es habe Grimaldi keine Interferenzstreifen wahrgenommen, wird bestätigt durch eine Stelle derselben 22sten Proposition seines Werkes, in welcher ein anderer Versuch beschrieben wird. Es heisst dort, man könne dieselbe Erscheinung wie bei dem oben beschriebenen Versuche wahrnehmen, wenn man im Fensterladen zwei Spalten in grösserer gegenseitiger Entfernung anbringt und die beiden Lichtbüschel vermittelst eines Spiegels auf einem Schirme zur Coincidenz bringt. Wir wissen heute, dass unter solchen Umständen eine Interferenzerscheinung nicht wahrgenommen wird.

Young's erstes Werk, er war Arzt, handelt von der Accommodation des Auges und enthält nichts, was auf die Lichttheorie Bezug hätte. Später führte ihn das Studium des Mechanismus des menschlichen Stimmorgans auf die Theorie der Pfeifen und die Akustik überhaupt, wo er Gelegenheit hatte, die Wirkung der Superposition von Wellen verschiedenen Ursprunges zu beobachten. Er verliess, nachdem er kaum angefangen hatte, sich mit Optik zu beschäftigen, die damals in England herrschende Emissionstheorie, wegen der durch die zunehmende Zahl der bekannten Erscheinungen nothwendig gewordenen Häufung der Hypothesen und wegen ihres Unvermögens die Erscheinung der sich im Brennpunkte einer Linse kreuzenden Strahlen zu erklären. Er adoptirte die Undulationstheorie und hoffte durch die Annahme einer der Superposition der Schallwellen ähnlichen Superposition der Lichtwellen optische Erscheinungen erklären zu können.

Es scheint, dass ihn das akustische Phänomen der Stösse auf das Princip der Interferenz der Vibrationen geführt hat, welches Princip zum ersten Male durch Young in seiner Abhandlung *On the theory of Light and Colours* [1]) ausgesprochen worden ist.

Young erwähnt mehrmals einer Stelle in Newton's Werken als der einzigen Spur der Idee der Interferenz der Wellen, welche er bei seinen Vorgängern habe finden können. Diese Stelle bezieht sich auf die Erklärung von Beobachtungen, welche Halley bei Gelegenheit einer Weltumsegelung zu Ende des 17. Jahrhunderts über anomale Ebbe und Fluth im Chinesischen Meere gemacht hat [2]). Halley bemerkte, dass in einem Hafen von Cochinchina, Namens Batcha, Ebbe und Fluth sehr schwach sind und zweimal im Monate, wenn sich der Mond im Aequator

[1]) Phil. Tr., 1802, p. 12. — [2]) *Philosophiae naturalis principia mathematica* III.

befindet, ganz ausbleiben. Newton bemerkte, dass bei der geringen Ausdehnung des Chinesischen Meeres (500 Meilen von Nord nach Süd, 200 Meilen von Ost nach West) die locale Ebbe und Fluth nicht in Betracht komme, dass vielmehr die Bewegung des Wassers vom Ocean herrühre, welcher durch zwei Meerengen nördlich und südlich vom Philippinischen Archipel mit dem Chinesischen Meere zusammenhängt. Hat also ein Hafen dieses Meeres eine solche Lage, dass die von Süden kommende Fluth mit der von Norden kommenden Ebbe zusammenfällt oder umgekehrt, so wird der Wasserstand sich nur wenig verändern und, wenn die beiden Wirkungen gleich sind, d. i., wenn sich der Mond im Aequator befindet, unverändert bleiben.

Young verallgemeinerte diese Erklärung Newton's und fügte hinzu, dass in Folge der ungleichen Schwingungsdauer der Strahlen von verschiedener Farbe durch Interferenz weisser Strahlen, welche ungleiche Wege durchlaufen, nicht nur ein Phänomen abwechselnd heller und dunkler Streifen, sondern auch eine gesetzmässige Farbenfolge entstehen könne.

Bei zufälliger Betrachtung des Schattens eines durch eine wenig ausgedehnte Lichtquelle beleuchteten Haares bemerkte Young in der Mitte des Schattens einen weissen Streifen zwischen zwei dunklen Streifen. Er wiederholte den Versuch unter Anwendung eines sehr schmalen, undurchsichtigen Schirmes und erkannte im Schatten desselben eine Reihe abwechselnd heller und dunkler Streifen. Der Centralstreifen war weiss und begrenzt von zwei dunklen Streifen, während die übrigen hellen Streifen um so gefärbter erschienen, je entfernter sie von der Mitte waren [1]). Hielt Young das Licht auf der einen Seite des schmalen Schirmes ab, so verschwanden die Streifen vollständig. Dieser Versuch lässt wohl schwer eine andere Deutung zu, als die, dass die Streifen durch die gegenseitige Einwirkung der an den beiden Rändern des Schirmes vorübergehenden Lichtstrahlen entstehen. Was das Eindringen der Lichtstrahlen in den geometrischen Schatten betrifft, so wurde dasselbe oder, wie man seit Newton sagte, die Inflexion der Lichtstrahlen an den Rändern der Schirme von allen Physikern als eine experimentelle Thatsache hingenommen, welche man durch eine Condensation der Luft in der Nähe der Oberfläche der Körper zu erklären suchte.

Ein zweites von Young angestelltes Experiment war noch beweisender [2]). Das Sonnenlicht trat durch eine enge Oeffnung, dann durch zwei weitere nahe an einander in einem Schirme angebrachte solche Oeffnungen. Auf einem zweiten Schirme kamen die beiden Lichtbüschel durch Beugung theilweise zur Deckung. Es zeigte sich nun im geometrischen Schatten des undurchsichtigen Raumes zwischen den

[1]) *Experiments and Calculations relative to Physical Optics, Phil. Tr.* 1804 und *Miscellaneous Works,* I. — [2]) *Lectures on Natural Philosophy.*

beiden Oeffnungen ein System sehr schmaler Streifen. Die Breite derselben nahm ab, wenn die gegenseitige Entfernung der beiden Oeffnungen vergrössert wurde, die Streifen verschwanden, wenn eine der Oeffnungen verdeckt wurde. Sie erschienen nicht, wenn unter Hinweglassung der ersten Oeffnung als Lichtquelle die Sonne oder eine künstliche Flamme, entsprechend der Anordnung Grimaldi's, benutzt wurde. Die Lage der Streifen entsprach genau den Positionen, in welchen nach der Theorie eine gegenseitige Verstärkung oder Schwächung der Vibrationsbewegungen stattfinden musste.

Die Versuche Young's blieben nicht ohne Widerspruch. Die interferirenden Strahlen waren gebeugte Strahlen, d. i. Strahlen, über deren Natur man wenig aufgeklärt war. Auch Fresnel hielt es später für nöthig, nachzuweisen, dass die Fähigkeit zu interferiren, nicht nur den gebeugten Strahlen zukommt, und stellte aus diesem Grunde seinen Spiegelversuch und den Versuch mit dem Doppelprisma an, wo die ungebeugten Strahlen durch Reflexion und durch Brechung abgelenkt und zur Interferenz gebracht werden.

14. Anwendungen des Interferenz-Princips.

Young zeigte die grosse Fruchtbarkeit seines Princips, indem er eine Reihe von Phänomenen in einfacher Weise aus demselben erklärte. Seine Arbeiten hierüber sind enthalten in den drei Abhandlungen: *On the Theory of Light and Colours* [1]) — *An Account of Some Cases of the Production of Colours not hitherto desribet* [1]) — *Experiments and Calculations relative to Physical Optics* [2]). Er wandte sich zunächst der Erscheinung der Ringe dünner Blättchen zu, deren Gesetze Newton erforscht hatte. Er beschränkte sich anfangs auf die Ringe bei normaler Reflexion und ging von dem Gedanken aus, dass, da die Wegdifferenz das Doppelte der Dicke des Blättchens beträgt, ein Maximum oder Minimum der Intensität auftreten müsse, wenn die Dicke des Blättchens ein gerades oder ungerades Vielfache des vierten Theiles einer Wellenlänge ist. Der Versuch ergiebt das gerade Gegentheil hiervon. Das Centrum entsprechend einer bis zur Null abnehmenden Dicke des Blättchens erscheint dunkel, während es hell sein müsste, die durchgelassenen Ringe haben eine complementäre Lage, während sie gleichliegend sein müssten. Diese Thatsache veranlasste Young die Hypothese aufzustellen, dass bei einer der beiden Reflexionen eine halbe Wellenlänge gewonnen werde, oder mit anderen Worten, dass das Vorzeichen der Geschwindigkeit der Vibrationsbewegung gewechselt werde. Unter dieser Voraussetzung entsprechen die Maxima der Intensität im reflectirten Lichte jenen Stellen, an welchen die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfache des vierten Theiles einer Wellenlänge beträgt, und

[1]) *Phil. Tr.* 1802. — [2]) *Phil. tr.* 1804.



die vollkommene Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist hergestellt.

Der Versuch selbst entscheidet nicht, bei welcher der beiden Reflexionen der Zeichenwechsel stattfindet. Young schloss jedoch aus der Analogie mit dem Stosse elastischer Kugeln, dass dies bei der Reflexion vom optisch dichteren Medium stattfinde, also, wenn das dünne Blättchen aus einer Luftschicht zwischen Glas besteht, bei der Reflexion an der Hinterfläche. Jene Analogie führte ihn nämlich zunächst zur Annahme, dass der Zeichenwechsel bei der Reflexion von jenem Medium stattfinde, dessen Aether dichter ist. Geht nun die Fortpflanzung des Lichtes in ähnlicher Weise vor sich, wie die des Schalles, so folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus der Dichte des Aethers verkehrt proportional ist, und da nach der Wellentheorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auch dem Brechungsexponenten verkehrt proportional ist, so ist die Dichte des Aethers in jenem Körper beträchtlicher, in welchem der Strahl sich dem Einfallslothe nähert.

Young suchte nach Bestätigungen seiner Hypothese. Er bemerkte, dass die durchgelassenen Ringe im Centrum hell sind. Diese Ringe entstehen in der That durch Interferenz zweier Strahlen, von welchen der eine direct durch das Blättchen geht, während der andere zweimal im Innern des Blättchens reflectirt wird, also nach Young's Hypothese eine ganze Welle verliert, was einem Verluste gleich Null gleich kommt.

Bringt man ferner zwischen eine Crownglaslinse und eine Flintglasplatte eine Flüssigkeit, deren Brechungsexponent zwischen jenen der Gläser liegt, so erscheinen die Ringe reflectirten Lichtes im Centrum hell. In diesem Falle sind in der That nach Young's Theorie beide Reflexionen mit dem Verluste einer halben Wellenlänge verbunden.

Young hat aus dem Phänomene der Ringe die Wellenlängen und die Schwingungszeiten der einzelnen Farben berechnet. Aus den astronomischen Beobachtungen und der Erscheinung der Aberration des Lichtes geht hervor, dass die verschiedenen Lichtgattungen sich im leeren Raume und in der Luft merklich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen. Bezeichnet man durch λ und T Wellenlänge und Schwingungsdauer, durch v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft, so hat man

$$\lambda = vT$$

und kann T berechnen, wenn λ bekannt ist. Young maass nun die Blättchendicke für die einzelnen Ringe und entwarf eine Tafel der Wellenlängen und Schwingungszeiten für die Hauptfarben des Spectrums.

Mit eben so viel Glück wandte Young das Princip der Interferenzen auf die schon von Newton[1]) studirten Erscheinungen an, welche bestäubte Spiegel zeigen. Er erklärte die Ringe aus der Interferenz der

[1]) Optik II.

bei dem Eintritte durch die Vorderfläche zerstreuten Strahlen mit den bei dem Austritte durch dieselbe Fläche zerstreuten Strahlen und berechnete so in richtiger Weise die einfachsten Erscheinungsformen des Phänomens.

Auch die Farben gemischter Blättchen (*mixed plates*), welche man erhält, wenn man zwischen eine Linse und eine Glasplatte zwei nicht mischbare Flüssigkeiten bringt, wie Wasser und Oel, wurden von Young mit Hülfe der Interferenz erklärt[1]).

Sind v und v' die Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Flüssigkeiten, e die Dicke des Blättchens an irgend einer Stelle, so werden zwei das Blättchen an dieser Stelle passirende Strahlen, von welchen der eine durch Wasser, der andere durch Oel geht, sich bei ihrer Vereinigung auf der Retina durch Interferenz vernichten oder verstärken, jenachdem $\frac{e}{v} - \frac{e}{v'}$ eine ungerade oder gerade Zahl halber Wellenlängen beträgt[2]).

Schliesslich hat Young aus dem Principe der Interferenz die überzähligen Bogen erklärt, welche, an der Innenseite des inneren und an der Aussenseite des äusseren Regenbogens zuweilen wahrgenommen werden, wenn dieselben besonders gut ausgebildet sind.

15. Der Stand der Wissenschaft vor den ersten Arbeiten Fresnel's.

Zur Zeit der ersten Arbeiten Fresnel's auf dem Gebiete der Optik, also um 1815, waren die Consequenzen, welche Young aus seinem Interferenzprincipe gezogen hatte, nur wenig experimentell geprüft; die Anwendung der Undulationstheorie auf die wichtigsten Erscheinungen stiess noch auf grosse Schwierigkeiten, und Physiker, wie Laplace und Poisson verharrten im Widerspruche. Die durch Malus weiter verfolgte Erscheinung der Polarisation, die durch Arago 1811 entdeckte und von Biot und Brewster studirte Wirkung dünner Krystallblättchen auf das polarisirte Licht, sehr mannigfaltige und complicirte Erscheinungen, blieben in dem damaligen Systeme der Wellentheorie unerklärt, welches auf der Annahme von Longitudinalschwingungen beruhte. Young selbst schien nach vergeblichen Versuchen, die Erscheinungen der Polarisation mit seiner Theorie in Einklang zu bringen, bereit, sein System aufzugeben, und der endliche Sieg der Emissionstheorie schien trotz der stets wachsenden Complicirtheit der Hypothesen, welche die Entdeckung jedes neuen Phänomens nöthig machte, gesichert. Es war Fresnel vorbehalten, das so mühsam errichtete Gebäude der Emissionstheorie zu zerstören und durch eine glückliche Verbindung des

1) *Lectures on Natural Philosophy.* — 2) *Brewster, On the Colours of Mixed Plates. Phil. Tr.* 1838, p. 73.



Princips der einhüllenden Flächen mit dem Principe der Interferenz, sowie durch die Annahme transversaler Lichtschwingungen die Undulationstheorie auf eine seither unangefochtene Basis zu stellen.

Wir schliessen hier die historische Einleitung, um zur Darstellung der Undulationstheorie selbst zu gelangen, wie sie sich durch und seit Fresnel entwickelt hat.

Bibliographie.

Geschichte der Optik.

1758. Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris.
1772. Priestley, *The History and Present State of Discoveries relating to Vision, Light and Colours*, London.
1775. Priestley, Geschichte der Optik, übersetzt von Klügel.
1810. Bossut, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, Paris.
1810. Libes, *Histoire philosophique des progrès de la physique*, Paris.
1814. Venturi, *Commentario sopra la storia et la teoria dell' Ottica*, Bologna.
1824. Arago, Notice sur la polarisation de la lumière, *OEuvr. compl.*, t. VII, p. 291.
1830—54. Arago, Notices biographiques sur Fresnel et Malus, *OEuvr. compl.*, t. I, p. 107, et t. III, p. 113.
1835. Lloyd, Report of the Progress and Present State of Physical Optics, *4th Rep. of Brit. Assoc.*
1837. B. Powell, Recent Progress of Optical Science in *British Annual and Epitome of the Progress of Science*, London.
1838. Wilde, *Geschichte der Optik*, Berlin.
1866. Verdet, Introduction aux oeuvres d'Augustin Fresnel, *OEuvres complètes de Fresnel*, t. I, p. 1.

Entwickelung der Undulationstheorie bis auf Fresnel.

1637. Descartes, *Dioptrica*, Lugd. Batav.
1644. Descartes, *Principia philosophiae*, Amstelodami.
1662. La Chambre, *De la lumière*, Paris.
1665. Grimaldi, *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride*, Bononiae.
1665. Hooke, *Micrographia*, London.
1667. Fermat, Litterae ad patrem Mersennum continentes objectiones quasdam contra Dioptricam Cartesianam in *Epistolis Cartesianis*, Paris, 1667, pars III, litter. 29—46.
1670. Erasme Bartholin, *Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici*, Amstelodami.
1672. Newton, New Theory of Light and Colours, *Phil. Tr.*, 1672.
1680—82. Hooke, Lectures on Light in *Posthumous Works of R. Hooke, published by R. Waller*, London, 1705, p. 71.
1682. Ango, *L'Optique divisée en trois livres*, Paris.
1687. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini.
1690. Huyghens, *Traité de la lumière* (par C. H. D. Z.), Leyde.
1693. Halley, Inquiries concerning the Nature of Light, *Phil. Tr.*, 1693, p. 998.

1699. **Mallebranche**, Réflexions sur la lumière, les couleurs et la génération du feu, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1699, p. 22.

1704. **Descartes**, Mundus sive dissertatio de lumine in *Opusculis posthumis,* Amstelodami.

1704. **Newton**, *Optics,* London.

1717. **Mariotte**, Traité de la nature des couleurs, *OEuvres complètes,* La Haye, t. I.

1722—23. **Mairan**, Recherches sur la réflexion, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1722, p. 6, 1723, p. 343.

1736. **Jean Bernoulli**, Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière? *Pièces de prix de l'Académie de Paris,* t. III.

1737. **Mairan**, Sur les analogies du son et de la lumière, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1737, p. 22.

1744. **Euler**, Nova theoria lucis et colorum in *Opusculis varii argumenti,* Berol., t. I, p. 179.

1745. **Euler**, Sur la lumière et les couleurs, *Mém. de Berl.*, 1745, p. 13.

1746. **Euler**, Sur la propagation de la lumière, *Mém. de Berl.*, 1746, p. 141.

1750. **Euler**, Conjectura physica circa propagationem soni et luminis in *Opusculis varii argumenti,* Berol., t. II.

1752. **Euler**, Essai d'une théorie physique des couleurs engendrées sur des surfaces extrêmement minces, *Mém. de Berl.*, 1752, p. 262.

1754. **Euler**, Examen d'une controverse sur la loi de réfraction des rayons de différentes couleurs, *Mém. de Berl.*, 1754, p. 200.

1758. **Boscovich**, *Philosophiae naturalis theoria,* Venetiae.

1768—72. **Euler**, *Lettres à une princesse d'Allemagne,* Pétersbourg.

1772. **Béguelin**, Sur le moyen de découvrir par des expériences comment se fait la propagation de la lumière, *Mém. de Berl.*, 1772, p. 152.

1783—84. **Marivetz**, Sur la propagation de la lumière dans un milieu élastique, *Journ. de phys. de Rozier,* XXIII, 340, XXIV, 40, 230, 275, XXVI, 140.

1784. **Fontana**, Sopra la luce, *Memorie della Società Italiana,* t. I.

1784. **Sénebier**, Sur la lumière, *Journ. de phys. de Rozier,* XXV, 74.

1793. **Franklin**, On Light and Heat, *Trans. of the Americ. Acad.*, III, 5.

1796. **Engel**, Sur la lumière, *Mém. de Berl.*, 1796, p. 194.

1798. **Pierre Prevost**, Principes d'optique, *Phil. Tr.*, 1798, p. 311.

1799. **Dizé**, Sur la matière de la chaleur considérée comme la cause de l'effet lumineux, *Journ. de phys. de Rozier,* XLIX, 177.

1800. **Young**, Outlines of Experiments and Inquiries respecting Sound and Light, *Phil. Tr.*, 1800, p. 106.

1802. **Young**, On the Theory of Light and Colours, *Phil. Tr.*, 1802, p. 12. — *Miscell. Works,* t. I, p. 140.

1802. **Young**, An Account of Some Cases of the Production of Colours not hitherto described, *Phil. Tr.*, 1802, p. 387. — *Miscell. Works,* t. I, p. 170.

1804. **Young**, Experiments and Calculations relative to Physical Optics, *Phil. Tr.*, 1804, p. 1. — *Miscell. Works,* t. I, p. 179.

1804. **Haüy**, *Traité de Physique,* Paris.

1807. **Laplace**, Sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes, *Mém. d'Arcueil,* II, 3. — *Mém. de la première classe de l'Institut,* X, 300.

1807. **Young**, *Lectures on Natural Philosophy,* London.

1814. **Young**, Malus, Biot, Brewster and Seebeck on Light, *Quarterly Review,* avril 1814.

1815—27. **Fresnel**, *OEuvres complètes* publiées par Henri de Senarmont, Émile Verdet et Léonor Fresnel, Paris, 1866.
1816. **Biot**, *Traité de physique mathématique et expérimentale*, Paris.
1817. **Young**, article *Chromatics* dans le *Supplément à l'Encyclopédie Britannique*. — *Miscell. Works*, I, 333.

Aeltere Lehrbücher der Optik.

1813. **Brewster**, *A Treatise on New Philosophical Instruments*, Edinburgh.
1816. **Biot**, *Traité de physique mathématique et expérimentale*, Paris.
1820. **Nobili**, *Nuovo trattato d'ottica*, Milano.
1822. **Fresnel**, article *Lumière* dans le Supplément à la traduction de la 5e édition du *Système de Chemie* de Th. Thomson par Riffaut, Paris.
1826. **E. et W. Weber**, *Wellenlehre*, Leipzig.
1828. **J. Herschel**, *On the Theory of Light*, London.
1830. **Brewster**, article *Optics* in *The Edinburgh Encyclopaedia*, t. XV.
1831. **Airy**, On the Undulatory Theory of Optics in *Mathematical Tracts*, Cambridge.
1831. **Lloyd**, *A Treatise of Light and Vision*, London.
1831. **Brewster**, A Treatise on Optics in *Lardner's Cabinet Cyclopaedia*, London.
1832. **Fechner**, Hauptsächliche Bestimmungen der Undulationstheorie, *Repert. der Experim. Phys.*, II, 345.
1833. **Brewster**, *Manuel d'optique* traduit par Vergnaud, Paris.
1833. **B. Powell**, *A Short Elementary Treatise of Experimental and Mathematical Optics*, Oxford.
1833. **Quetelet**, Supplément à la traduction du *Traité de la lumière* de J. Herschel, Paris, t. II de la traduction.
1836. **Kunzek**, *Die Lehre vom Lichte*, Lemberg.
1839. **Radicke**, *Handbuch der Optik*, Berlin.
1839. **Knochenhauer**, *Die Undulationstheorie des Lichtes*, Berlin.
1841. **B. Powell**, *A General and Elementary View of the Undulatory Theory*, London.
1841. **Lloyd**, *Lectures on the Wave Theory of Light*, Dublin.
1843. **Mossotti**, *Lezioni elementari di fisica matematica*, Firenze.
1846. **Moigno**, *Répertoire d'optique moderne*, Paris.
1852. **Potter**, *An Elementary Treatise on Optics*, London.
1853. **Beer**, *Einleitung in die höhere Optik*, Braunschweig.
1856. **Potter**, *Physical Optics or the Nature and Properties of Light*, London.
1858. **Billet**, *Traité d'optique physique*, Paris.
1862. **Robida**, *Erklärung der Beugung, Doppelbrechung und Polarisation des Lichts*, Klagenfurt.
1864. **Briot**, *Essai sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris.

III. Interferenz.

16. Einleitung.

Die Wellentheorie des Lichtes hat nicht jenen Grad der Vollkommenheit erreicht, welcher es gestattet, die synthetische Methode der Darstellung einzuschlagen. Wir werden daher den analytischen Weg gehen und haben in dem folgenden, von der Interferenz handelnden Theile nicht nöthig, eine andere Annahme zu machen als die, dass das Licht in einer periodischen Vibrationsbewegung von sehr geringer Schwingungsdauer besteht, welche sich mit einer sehr grossen, vom Mittel, in welchem die Bewegung stattfindet, abhängigen Geschwindigkeit fortpflanzt und sich auf unendlich viele verschiedene Arten in Halbvibrationen von genau entgegengesetzter Natur zerlegen lässt.

17. Bedingungen der Interferenzfähigkeit einer Vibrationsbewegung.

Das Experiment lehrt, dass Lichtstrahlen sich durch Interferenz vollständig zerstören können. Diese Thatsache führt uns zu einer ersten Kenntniss über die Art der Vibrationsbewegung, welche das Licht ausmacht.

Sollen nämlich zwei Vibrationsbewegungen, welche von demselben Centrum ausgehen und ungleiche Wege durchlaufen, um unter merklich parallelen Richtungen in einem Punkte zusammenzutreffen, sich daselbst vollständig vernichten können, so muss die Vibrationsbewegung so beschaffen sein, dass die durch eine ungerade Zahl halber Perioden (Schwingungszeiten) getrennten Bewegungszustände desselben genau entgegengesetzter Natur, also die Geschwindigkeiten der Bewegung quantitativ gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind.

Wir wollen hiervon Gebrauch machen, um einen mathematischen Ausdruck für die Vibrationsbewegung eines Molecüles aufzustellen.

Nach dem Fourier'schen Satze[1]) lässt sich jede periodische Function durch eine trigonometrische Reihe von endlicher oder unendlich

---

[1]) *Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris, 1822 — *Lagrange, Anciens Mémoires de l'Academie de Turin*, III, 126 — Duhamel, Infinitesimalrechnung — Thomson und Tait, Theoretische Physik.

grosser Gliederzahl darstellen. Bezeichnen wir durch x die Excursion eines Molecüles zur Zeit t, und durch $A_1 A_2 A_3 \dots \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \dots$ constante Grössen, so ist:

$$x = A_1 \sin m (t + \Theta_1) + A_2 \sin 2m (t + \Theta_2) \\ + A_3 \sin 3m (t + \Theta_3) + \dots$$

Die Schwingungsdauer ist

$$\frac{2\pi}{m},$$

da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ungeändert bleibt, wenn $t + \frac{2\pi}{m}$ für t gesetzt wird. Wir sehen, dass das erste Glied rechts vom Gleichheitszeichen die unendlich kleinen Bewegungen eines einfachen Pendels darstellt, also eine einfache harmonische Bewegung, deren Periode $\frac{2\pi}{m}$ ist, wie die der Gesammtbewegung. Ebenso stellt das zweite Glied der Reihe eine einfache harmonische Bewegung von halb so grosser Periode dar u. s. w.

Soll nun die durch obige Gleichung dargestellte Vibrationsbewegung einer vollständigen Interferenz fähig sein, so ist die Bedingung zu erfüllen, dass der Ausdruck für x der absoluten Grösse nach ungeändert bleibe, aber das Vorzeichen ändere, wenn $t + \frac{\pi}{m}$ für t gesetzt wird. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Reihe sich auf die mit ungeraden Stellenzeigern versehenen Glieder reducirt. Wir haben also in dem für x gefundenen Ausdrucke die geraden Glieder wegzulassen und werden später sehen, dass die Reihe sich überhaupt auf das erste Glied reducirt.

Dass die geraden Glieder der Reihe verschwinden, lässt sich auch wie folgt einsehen. Denkt man sich längs einer Geraden Wellenzüge aufgetragen, deren Wellenlängen sind: λ_1, $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3} \dots$, deren Coexistenz also der obigen Reihe entspricht, und denkt man sich längs derselben Geraden ein zweites, mit dem ersten congruentes System von Wellenzügen aufgetragen, welches gegen das erste um $(2n + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{2}$ verschoben ist, so beträgt die Verschiebung:

$$\begin{aligned} (2n + 1) \frac{\lambda_1}{2} &= (4n + 2) \frac{\lambda_2}{2} \\ &= (8n + 4) \frac{\lambda_4}{2} \\ &= (12n + 6) \frac{\lambda_6}{2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

oder

$$(2n+1)\frac{\lambda_1}{2} = (6n+3)\frac{\lambda_3}{2}$$
$$= (10n+5)\frac{\lambda_5}{2}$$
$$= (14n+7)\frac{\lambda_7}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

d. h. eine gerade Zahl halber Wellenlängen für die geraden und eine ungerade Zahl für die ungeraden λ. Während sich also die den ungeraden λ entsprechenden Wellenzüge durch Interferenz vernichten, verstärken sich im Gegentheile die den geraden λ entsprechenden, wenn sie überhaupt vorhanden sind, und es kann in diesem Falle eine vollständige Interferenz nicht eintreten.

In der Akustik kommen mehrere Fälle von Vibrationsbewegungen vor, für welche sich die Fourier'sche Entwickelung auf die ungeraden Glieder reducirt, und welche folglich einer vollständigen Interferenz fähig sind. So die durch gedeckte Pfeifen hervorgebrachten Schwingungen der Luft, welche den Grundton und die ungeraden harmonischen Obertöne enthalten. Es eignen sich also die gedeckten Pfeifen zur Erzeugung der Interferenzen, welche man die Stösse genannt hat. Um dieses Phänomen hervorzubringen, gebraucht man meist zwei gedeckte Pfeifen von nahezu gleicher Länge. Bei vollkommen gleicher Länge können sich an bestimmten Stellen des Raumes die Bewegungen dauernd vernichten. Bei nicht völlig gleicher Länge sind die Bedingungen gegenseitiger Vernichtung an demselben Orte des Raumes nur zu bestimmten Zeiten erfüllt, deren periodische Wiederkehr die Erscheinung der Stösse hervorbringt. Hiergegen ist die durch die offene Pfeife hervorgebrachte Bewegung der Luft durch die vollständige Reihe repräsentirt. Erzeugt man also das Phänomen der Stösse vermittelst zweier offener Pfeifen, so wird man bei Vernichtung des Grundtones und der ungeraden Obertöne, die Octav des Grundtones wahrnehmen müssen, wenn die geraden Obertöne eine genügende Intensität haben.

Nehmen wir an, dass die durch zwei gleiche offene Pfeifen hervorgebrachten Schallstrahlen ein Lufttheilchen unter einer Phasendifferenz von einer halben Periode treffen, so sind die den beiden Bewegungen entsprechenden Excursionen:

$$x_1 = A_1 \sin m\,(t+\Theta_1) + A_2 \sin 2m\,(t+\Theta_2) + A_3 \sin 3m\,(t+\Theta_3) + \ldots$$
$$x_2 = -A_1 \sin m\,(t+\Theta_1) + A_2 \sin 2m\,(t+\Theta_2) - A_3 \sin 3m\,(t+\Theta_3) + \ldots$$

und die resultirende Excursion nach dem Principe der Superposition kleiner Schwingungen:

$$x_1 + x_2 = 2 [A_2 \sin 2m (t + \Theta_2) + A_4 \sin 4m (t + \Theta_4) + \ldots] .$$

entsprechend einem Tone von der Schwingungsdauer $\frac{\pi}{m}$, also der höheren Octav des Tones einer der Pfeifen.

Diese Consequenz der Theorie lässt sich an offenen Pfeifen wegen der geringen Intensität der Obertöne schwer prüfen, es eignet sich aber hierzu eine von Helmholtz[1]) construirte Sirene.

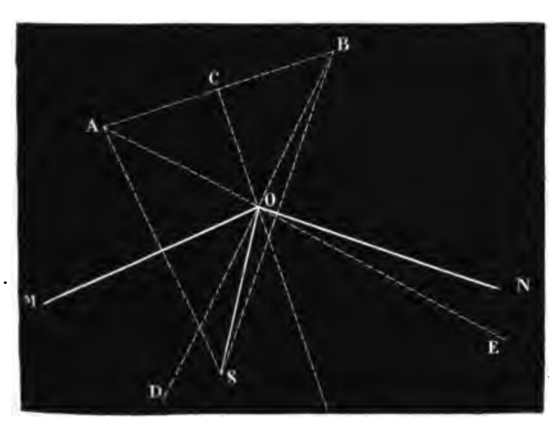
Wir unterscheiden in der Akustik zwei Arten der Interferenz, je nachdem die interferirenden Wellenzüge in gleichen oder entgegengesetzten Richtungen fortschreiten. Im letzteren Falle entstehen sogenannte stehende Schwingungen. So zahlreich die Erscheinungen der Optik sind, welche auf den Interferenzen der ersten Art beruhen, sind doch stehende Lichtschwingungen bisher nicht beobachtet worden.

18. Fresnel's Spiegelversuch.

Dass nicht nur das gebeugte, sondern auch das directe Licht interferenzfähig ist, geht eigentlich schon aus Young's Arbeiten über die Newton'schen Ringe hervor, wurde aber besonders durch den von Fresnel zu diesem Zwecke angestellten Spiegelversuch erwiesen (13).

Lässt man die Strahlen eines leuchtenden Punktes von zwei sich bis zur Durchschnittslinie ihrer Ebenen erstreckenden, unter einem Winkel von nahe 180⁰ gegen einander geneigten ebenen Spiegeln reflectiren, so entstehen in dem den beiden reflectirten Strahlenbüscheln gemeinsamen Raume Interferenzen.

Fig. 11.



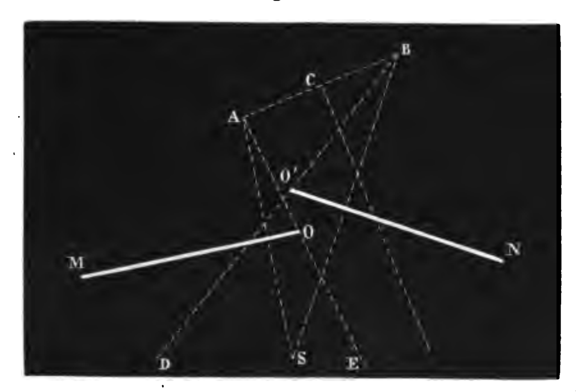
Es seien (Fig. 11) S der leuchtende Punkt, MO, ON die Spiegel. Es werden durch die beiden Spiegel zwei Bilder, A und B, des leuchtenden Punktes entstehen, welche wie zwei identisch schwingende Lichtquellen wirken, was bei zwei von einander unabhängigen Lichtpunkten nicht der Fall ist. Wir nehmen die Ebene SAB zur Ebene der Figur. Die beiden reflectirten Strahlenbüschel sind je von einer Seite durch die Ebenen AOE und BOD be-

[1]) Tonempfindungen, 1865, 241.

grenzt, also der gemeinsame Raum der Strahlenbüschel durch dieselben Ebenen, OD und OE. Der Winkel DOE beträgt das Doppelte des spitzen Winkels der Spiegel. Legen wir eine Ebene CO so in die Figur, dass sie den Winkel DOE halbirt, so stehen sämmtliche Punkte der Ebene CO von A und B gleich weit ab. Es liegt also in dieser Ebene der Centralstreifen oder der achromatische Streifen, für welchen die Wegdifferenz gleich Null ist. Zu beiden Seiten dieses Streifens treten die übrigen Streifen auf, deren Zahl, wie der Versuch zeigt, um so grösser wird, je homogener die Lichtquelle ist.

Bei Anstellung des Versuches muss der spitze Winkel der Spiegel sehr klein sein, wenn die Streifen nicht so schmal werden sollen, dass sie der Wahrnehmung entgehen. Es ist ferner Sorgfalt darauf zu verwenden, dass die Ränder der Spiegel genau coincidiren und nicht einer gegen den anderen vorspringe. Ist hierauf nicht die genügende Rücksicht genommen, so fällt (Fig. 12) die Ebene, welche AB rechtwinklig halbirt und auf welcher der Centralstreifen liegen muss, ganz ausserhalb des den beiden reflectirten Strahlenbüscheln gemeinsamen Raumes, und das Phänomen, welches nur in der Nähe dieses Centralstreifens zur Wahrnehmung kommt, erscheint nicht. Auf diesen Umstand ist um so mehr zu achten, je kleiner der spitze Winkel der Spiegel ist. Will man also breite Streifen erhalten, so thut man gut, erst schmale Streifen hervorzubringen, und hierauf den spitzen Winkel der Spiegel allmälig zu verkleinern, indem man darauf achtet, die Streifen nicht aus dem gemeinsamen Felde der Spiegel treten zu lassen.

Fig. 12.



Beim Fresnel'schen Spiegelversuch interferiren in der That die directen Strahlen. Gleichwohl wird das Phänomen, da die interferirenden Strahlen nahe an den Spiegelrändern reflectirt werden, je nach den Constanten des Versuches mehr oder weniger durch Beugung modificirt und man muss dann, um das Phänomen vollständig durch Rechnung zu erhalten, auf die Berechnung der Interferenz der von sämmtlichen Punkten der Spiegel ausgehenden Elementarstrahlen zurückgehen. Diese Rechnung ist durchgeführt von H. F. Weber[1]).

---

[1]) Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft, 1879, 1. Heft.

Als Lichtquelle dient für Präcisionsversuche ein durch eine Linse erzeugtes Sonnenbildchen, sonst kann an die Stelle eines Lichtpunktes auch eine dem Durchschnitte der Spiegelebenen parallele Lichtlinie gesetzt werden. Als Spiegel benutzte Fresnel zwei an der Rückseite geschwärzte Gläser, welche nahezu senkrecht gegen die einfallenden Strahlen gestellt wurden. Er projicirte bei seinen ersten Versuchen das Phänomen auf einen weissen Schirm, später auf ein matt geschliffenes Glas, auf dessen Rückseite die Streifen vermittelst einer Lupe mit Mikrometer gemessen wurden. Hierbei bemerkte Fresnel, dass die Streifen bei ungeänderter Einstellung der Lupe sichtbar blieben, wenn das matte Glas entfernt wurde [1]), und dass auch die Lupe weggelassen werden konnte, wenn das Auge auf die Stelle des Raumes eingestellt war, an welcher sich der Schirm hätte befinden müssen. Dieser wichtige Umstand ist in folgender Weise zu erklären. Treffen sich mehrere Strahlen in einem Punkte O eines Schirmes, so werden sie daselbst nach allen Richtungen zerstreut und die Intensität in O hängt von den Gangunterschieden ab, unter welchen sich die Strahlen daselbst treffen. Lässt man den Schirm weg, so kreuzen sich die Strahlen in O, um sich in einem Punkte der Netzhaut wieder zu vereinigen, wenn das Auge auf den Punkt O eingestellt ist, und wir werden später zeigen, dass dies unter denselben Gangunterschieden stattfindet, welche die Strahlen im Punkte O hatten. Wenn man also das freie oder mit einer Lupe bewaffnete Auge auf den Schirm einstellt und daselbst ein Lichtbild wahrnimmt, so wird man, wenn der Schirm entfernt wird und die Einstellung des Auges ungeändert bleibt, an derselben Stelle dasselbe Lichtbild wahrnehmen, woraus folgt, dass der Schirm bei der Beobachtung der Interferenzen mit Vortheil weggelassen werden kann.

Das Fresnel'sche Mikrometer, welches dazu diente, die Breiten der Streifen zu messen, bestand aus einer Röhre, welche eine Lupe, eine mit einem feinen Striche versehene Glasplatte, ein rothes Glas, um das Licht homogen zu machen, und ein Diaphragma enthielt. Die Röhre war mit einem Schlitten in Verbindung, welcher durch eine Mikrometerschraube bewegt wurde, deren Gang ungefähr 1 mm Höhe hatte und deren Kopf ungefähr 50 Theilstriche trug. Hat man die Lupe so eingestellt, dass man sowohl den Strich auf der Glasplatte, als die Interferenzstreifen deutlich wahrnimmt und der Strich zu den Streifen parallel ist, so kann man deren Breite messen, indem man den Strich successive mit der Mitte der einzelnen Streifen zusammenfallen lässt und an der Schraube die Verschiebung des Schlittens abliest.

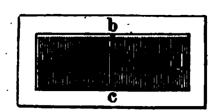
Man kann sich einen Spiegelapparat in der folgenden Weise zusammenstellen [2]). Ein Streifen gutes Spiegelglas von 100 mm Länge, 25 mm Breite und 3 mm Dicke, welches auf die Ebenheit seiner Oberfläche nach dem Oertling'schen Verfahren [3]) geprüft werden kann,

---

[1]) *OEuvres complètes,* I, 67. — [2]) G. Quincke, Pogg. 1867. — [3]) Pogg. 1843.

wird mit dem Diamanten in zwei 50 mm lange Stücke geschnitten. Diese legt man dicht neben einander auf vier nahezu gleich grosse Kügelchen von weichem Wachs *abcd* (Fig. 13), am besten frisch bereiteten Kleberwachs, wie es in der Apotheke käuflich zu haben ist, während die Kügelchen auf der horizontalen Oberfläche eines grösseren Holzklötzchens aufliegen. Die beiden Wachskugeln *b* und *c* liegen unter der Berührungslinie der Spiegel, so dass jeder Spiegel in drei Punkten aufliegt. Auf die beiden Spiegel legt man dann eine grössere Platte Spiegelglas von etwa 200 mm Länge, 50 mm Breite und 3 mm Dicke, und drückt diese mit dem horizontal gelegten Zeigefinger längs der Linie *bc* schwach an. Die grössere elastische Spiegelglasplatte biegt sich dann in der Mitte bei *bc* durch, die beiden Spiegelflächen *a* und *d* sind schwach gegen einander geneigt und nahezu in derselben Ebene. Die Neigung der Spiegel schwankt gewöhnlich je nach der Stärke des Druckes zwischen 2′ und 6′. Der so hergestellte Apparat zeigt die Interferenzstreifen bei Anwendung directen Sonnenlichtes selbst in einem vom Tageslichte erleuchteten Zimmer objectiv.

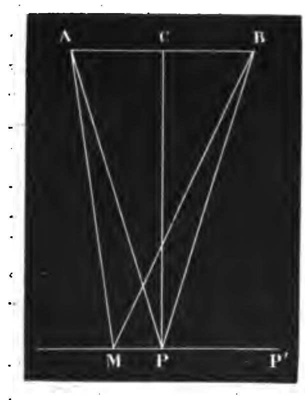
Fig. 13.



19. Gesetze.

Die Interferenzstreifen verlaufen stets normal zur Verbindungslinie der beiden Lichtpunkte; sie verschwinden, wenn man eines der beiden Lichtbüschel durch einen Schirm abhält oder dasselbe nach Arago [1]) durch eine nicht zu dünne Glasplatte treten lässt. Der Centralstreifen steht von den beiden Lichtpunkten gleich weit ab und entspricht einer Wegdifferenz gleich Null.

Fig. 14.



Um die Lage der Streifen nach Fresnel's Theorie zu berechnen, bemerken wir zunächst, was unmittelbar ersichtlich ist, dass die Orte constanter Wegdifferenz, also die Orte der Interferenzflächen Rotationshyperboloide mit zwei Höhlungen sind, d. i. Flächen, welche dadurch entstehen, dass Hyperbeln, deren Brennpunkte *A* und *B* sind (Fig. 14), um *AB* als Axe rotiren. Wird das Phänomen mittelst eines zu *CO* (Fig. 11) senkrechten Schirmes aufgefangen, so erscheinen folglich die Interfererenzstreifen als Hyperbeln, und betrachtet man das Phänomen nur in der Nähe des Centralstreifens, so werden die sichtbaren Theile der Hyperbeln merklich geradlinig erscheinen.

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (2) I, 332.

Wir legen eine Ebene durch die Lichtquelle und ihre beiden Bilder (Fig. 14), und betrachten das Phänomen längs einer in dieser Ebene liegenden Geraden PP' parallel zu AB. Der Punkt P entspricht dem Centralstreifen. Ist M ein beliebiger Punkt auf PP', so hat man, wenn AB und MP kleine Grössen sind und wenn ferner die Wegdifferenz $MB - MA$ durch δ bezeichnet und $PM = x$ gesetzt wird:

$$\delta : AB = x : CP,$$

oder wenn die scheinbare Grösse der Linie AB bezüglich P also der kleine Winkel APB durch i bezeichnet wird:

$$\delta = x \, . \, tang\, i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Ist für einen folgenden Streifen

$$\delta + \lambda = (x + \Delta x)\; tang\; i,$$

so ist die Streifenbreite

$$\Delta x = \frac{\lambda}{tang\; i}.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Gesetze:

1. Die Interferenzfransen haben überall auf dem Schirme die gleiche Breite.

2. Die Breite der Fransen hängt nur von der Wellenlänge und der scheinbaren gegenseitigen Entfernung der beiden Lichtpunkte vom Schirm aus gesehen ab. Sie wächst proportional mit der Wellenlänge und verkehrt proportional mit der scheinbaren Distanz der beiden Lichtpunkte.

Nähert sich (Fig. 11) die Lichtquelle S dem Spiegel, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die scheinbare Grösse i verringert wird. Es folgt:

3. Die Breite der Fransen wächst mit der Annäherung der Lichtquelle an den Spiegel.

Dasselbe findet statt, wenn der spitze Winkel der Spiegel verkleinert wird. Wird dieser Winkel durch u bezeichnet, so ersieht man aus Fig. 11, dass

$$AB = 2\,AO\; sin\, u.$$

Es folgt:

4. Die Breite der Fransen wächst, wenn der spitze Winkel der beiden Spiegel verkleinert wird.

Unmittelbar ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

5. Die Helligkeitsminima sind sämmtlich Null.

6. Die Helligkeitsmaxima haben überall auf dem Schirme die gleiche Intensität.

7. Bei Anwendung weissen Lichtes ist die mittlere Zone der centralen Franse stets weiss.

Nennen wir die durch die Lichtquelle und ihre beiden Bilder bestimmte Ebene den Hauptschnitt, so verlangt Fresnel's Theorie, dass

bei einer Verschiebung des Schirmes in einer zu seiner Ebene normalen Richtung der Durchschnittspunkt eines Streifens von bestimmter Ordnungszahl mit dem Hauptschnitte eine Hyperbel beschreibe, denn offenbar ist die Differenz der Entfernungen dieses Durchschnittspunktes von A und B constant. Es folgt also:

8. Der Ort des Durchschnittes eines Streifens von bestimmter Ordnungszahl mit dem Hauptschnitte ist eine Hyperbel.

Fig. 15.



Um diese Resultate der Theorie gegen das Experiment zu halten, müssen die in der Formel (A) vorkommenden Grössen x und $tang\ i$ gemessen werden.

Fresnel bestimmte die den einzelnen hellen und dunkeln Fransen entsprechenden Werthe von x mit Hülfe seines Mikrometers. Den Winkel i bestimmte Fresnel mit Hülfe zweier Schirme. Einer derselben ging durch P und hatte daselbst eine kleine Oeffnung (Fig. 15), durch welche zwei Strahlen in den Richtungen AP und BP nach dem zweiten, zu AB parallelen Schirme CD gelangten. Aus CD und der gegenseitigen Entfernung der beiden Schirme wurde i berechnet.

Fresnel's Messungen ergaben eine volle Uebereinstimmung mit der Theorie. Der störende Einfluss der Beugung (18) macht sich nach den Beobachtungen von H. F. Weber in merklichen Abweichungen von den Gesetzen 1., 5., 6., 7. bemerkbar.

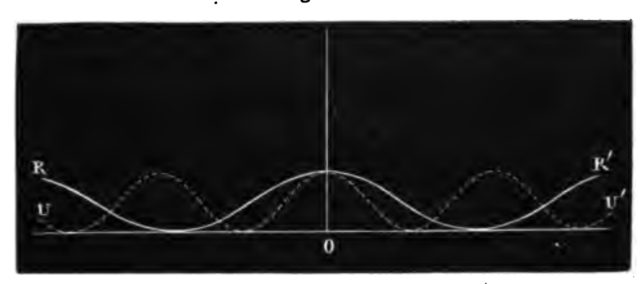
20. Abhängigkeit von der Farbe.

Wendet man homogenes Licht an, so erhält man Streifen, welche Farbe immer das Licht habe. Jede einzelne der Vibrationsbewegungen, aus deren Superposition das weisse Licht besteht, besitzt also die Fähigkeit, Interferenzen hervorzubringen und erfüllt die in (17) angegebenen Bedingungen. Hierbei kann man bemerken, dass brechbarere Lichtgattungen schmalere Streifen geben, und hieraus schliessen, dass die Wellenlänge von Roth gegen Violett an Grösse abnimmt. Es folgt nämlich aus $\frac{n\lambda}{2} = x\ tang\, i$ (19), dass x mit λ abnimmt.

Die Streifen, welche sich bei Anwendung weissen Lichtes zeigen, entsprechen der Uebereinanderlagerung der durch die einfachen Farben,

aus welchen das weisse Licht besteht, hervorgebrachten Streifensysteme. Der Centralstreifen, welcher einer Wegdifferenz gleich Null entspricht, hat für alle Farben dieselbe Lage und entspricht einem Maximum der Intensität. Er erscheint also weisslich und heisst daher auch der achromatische Streifen. Derselbe ist auf beiden Seiten von einem gelblichen, weiter aussen roth gefärbten Saum umgeben. Ist man bei Anstellung des Versuches nicht darauf bedacht, die Einwirkung der Beugung des Lichtes zu vermeiden, so erscheint der achromatische Streifen gefärbt. Auf ihn folgen zu beiden Seiten dunkle Streifen, dann helle, welche mit Violett beginnen u. s. w. Die in Fig. 16 verzeichneten Curven RR' und UU' stellen die Intensitäten eines rothen und eines violetten Strahles

Fig. 16.



dar. Man sieht, dass zu beiden Seiten des Centralstreifens O die Intensität des violetten Lichtes unmerklich wird, während die des rothen Lichtes noch beträchtlich ist. Es folgen hierauf Stellen sehr geringer Intensität, dunkle Streifen, sodann ein Anwachsen des Violett bis nahe zum Maximum, während Roth zur Null absinkt u. s. w.

21. Bestimmung der Wellenlänge.

Schon Young hatte mit Hülfe der Newton'schen Ringe die Wellenlängen bestimmt (14). Auch der Fresnel'sche Spiegelversuch kann hierzu dienen.

Wir hatten für den $n$ten Interferenzstreifen (19)

$$n\frac{\lambda}{2} = x \tang i$$

oder

$$\lambda = \frac{2x \tang i}{n}$$

und sahen, wie x und i gemessen werden können. Es kann also mit Hülfe des Fresnel'schen Spiegelversuches und jener Formel die Länge der irgend einer einfachen Farbe entsprechenden Lichtwelle gefunden werden. Fresnel hat auf diese Weise die Wellenlänge des annähernd

homogenen rothen Lichtes bestimmt, welches durch ein Kupferoxydulglas erhalten wird, und anderen Farben entsprechende Wellenlängen mit Hülfe von Zahlen berechnet, welche Newton durch Messung seiner Farbenringe erhalten hatte. Es ist klar, dass mit der Wellenlänge auch die Schwingungsdauer gegeben ist, welche mit jener durch die Relation

$$\lambda = VT$$

verbunden ist, wo V die Forpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und T die Schwingungsdauer bedeuten.

Die folgende Tabelle enthält die von Fresnel für die sieben Hauptfarben gefundenen Wellenlängen mit den entsprechenden Schwingungszeiten unter Benutzung des von Foucault für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gefundenen Werthes von 298 Millionen Metern in der Secunde.

Farbe	Wellenlänge in Millimetern	Zahl der Schwingungen in der Secunde
Mittleres Roth	0,000,620	480 Billionen
„ Orange	583	511 „
„ Gelb	551	541 „
„ Grün	512	582 „
„ Blau	475	622 „
„ Indigo	449	664 „
„ Violett	423	704 „

Wir werden später eine genauere Methode der Bestimmung der Wellenlänge kennen lernen, doch reicht das Gefundene hin, erkennen zu lassen, von welcher Ordnung die in Rede stehenden Grössen sind. Im Vergleiche mit der Schallbewegung erscheinen Wellenlänge und Schwingungsdauer als überaus kleine Grössen, ein Umstand, auf welchem viele Verschiedenheiten zwischen einander entsprechenden Licht- und Schallerscheinungen beruhen und welcher bei der Erklärung einer grossen Zahl von Erscheinungen von Nutzen ist. Man kann die Länge einer Lichtwelle neben einer selbst sehr kleinen Distanz vernachlässigen und in einem selbst sehr kleinen Zeitelemente noch eine sehr grosse Zahl von Schwingungen voraussetzen. Man kann jedoch die Moleculardistanz nicht neben der Länge einer Lichtwelle vernachlässigen und hat hierauf eine Erklärung der Dispersion des Lichtes gegründet.

22. Beschränkte Zahl der Streifen.

Bei Anwendung weissen Lichtes ist die Zahl der wahrnehmbaren Streifen gering. Es kommt dies daher, dass die Breite der Streifen mit der Farbe variirt. Betrachten wir eine Stelle des Phänomens, welche für eine Farbe von der Wellenlänge λ_1 mit der Mitte eines hellen Streifens zusammenfällt und sei δ die dieser Stelle entsprechende Wegdifferenz, dann ist

$$\delta = 2n \frac{\lambda_1}{2}.$$

Lassen wir die Wellenlängen an Grösse abnehmen, so werden wir dahin gelangen, dass

$$\delta = (2n + 1) \frac{\lambda_2}{2}$$

wird, so dass für eine benachbarte Farbe von der Wellenlänge λ_2 sich an derselben Stelle die Mitte eines dunkeln Streifens befindet. Es folgt aber aus den beiden Gleichungen:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2n + 1}.$$

Ist also n eine grosse Zahl, d. h. liegt die Stelle des Phänomens, welche wir betrachten, weit vom Centralstreifen ab, so wird die Differenz $\lambda_1 - \lambda_2$ sehr klein, so dass dieselbe Stelle für zahlreiche Farben des Spectrums einem Maximum, für zahlreiche andere Farben einem Minimum der Intensität entspricht. Die Vermischung der an der betrachteten Stelle vorhandenen Farben, welche über das Spectrum gleichmässig vertheilt sind, giebt ein weisses Licht, welches sich gleichwohl vom Sonnenlichte wesentlich unterscheidet, da es zerlegt ein Spectrum mit dunkeln Streifen giebt.

Bei annähernd monochromatischem Lichte wird die Zahl der wahrnehmbaren Streifen beträchtlicher. Fresnel zählte bei Benutzung seines unvollkommen monochromatischen rothen Glases einige Hundert Streifen.

Später erzeugten Fizeau und Foucault auf andere Weise Interferenzen bei Gangunterschieden von vielen Tausend Wellen. Gleichwohl müssen wir, wie Fresnel erkannt hat, annehmen, dass, wenn eine gewisse, nicht experimentell festgestellte Grösse des Gangunterschiedes erreicht ist, wegen zeitlicher Veränderungen der Schwingungsweise der Lichtquelle die Interferenzfähigkeit der Strahlen aufhört.

23. Verschiebung der Streifen bei Interposition einer durchsichtigen Platte.

Arago[1]) machte bei Wiederholung des Spiegelversuches eine Bemerkung, welche in Uebereinstimmung mit der Theorie von Huyghens (10) beweist, dass das Licht sich in optisch dichteren Medien langsamer fortpflanzt. Als er in den Weg des einen der interferirenden Strahlenbüschel eine dicke Glasplatte brachte, verschwanden die Streifen.

Fresnel[2]) erklärte diese Thatsache aus der Verzögerung des Lichtes beim Durchgange durch die Platte. Diese Verzögerung hat zur Folge, dass der Ort, welcher einem Gangunterschiede gleich Null entspricht, nicht mehr in den gemeinsamen Raum der beiden interferirenden Strahlenbüschel fällt und folglich der achromatische Streifen und das ganze nur in der Nähe des achromatischen Streifens wahrnehmbare Phänomen verschwinden. Fresnel sagte vorher, dass bei Anwendung einer dünnen Platte, z. B. eines Glimmerblättchens, kein völliges Verschwinden, sondern nur eine Verschiebung der Streifen eintreten würde, was der Versuch bestätigte.

Der Centralstreifen entspricht immer Strahlen, welche gleiche Zeiten unterwegs waren. Bewegen sich also beide Strahlen durch die Luft, so steht der Centralstreifen von den beiden Lichtpunkten gleich weit ab. Geht aber einer der Strahlen theilweise durch ein optisch dichteres Medium, so liegt der Centralstreifen auf der Seite jener Lichtquelle, welche den verzögerten Strahlen angehört.

Die Verschiebung der Streifen liefert ein vorzügliches Mittel, den Brechungsexponenten eines durchsichtigen Blättchens zu bestimmen. Man wird den Strich des Fresnel'schen Mikrometers (18) auf den Centralstreifen einstellen, hierauf das Blättchen senkrecht zur Richtung der Strahlen in eines der beiden interferirenden Strahlenbüschel einschieben und nachsehen, der wievielte Streifen nach der Verschiebung mit dem Striche zusammenfällt.

Ist ε die Dicke des Blättchens, v die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft, u diejenige im Blättchen, so beträgt die Verzögerung eines der beiden Strahlen

$$\frac{\varepsilon}{u} - \frac{\varepsilon}{v}.$$

Ist ferner T die Schwingungsdauer und fällt nach Einschiebung des Blättchens der $k$te Streifen mit dem Striche des Mikrometers zusammen, so ist

1) *Ann. de chim. et de phys.* (2) I, 199, 332. — 2) *OEuvres complètes,* I, 75.

$$\frac{\varepsilon}{u} - \frac{\varepsilon}{v} = k\,\frac{T}{2}$$

und

$$\varepsilon\left(\frac{v}{u} - 1\right) = k\,\frac{vT}{2} = \frac{k\lambda}{2},$$

aus welcher Gleichung $\frac{v}{u}$ oder der Brechungsexponent berechnet werden kann.

Das auf die Verschiebung der Streifen gegründete Verfahren wurde 1818 von Arago und Fresnel auf vergleichende Versuche über die Brechungsexponenten warmer und feuchter Luft angewendet, auf welchen Gegenstand später Arago[1]) allein zurückkam, während Fresnel seine Methode für den Nachweis sehr geringer Differenzen der Geschwindigkeiten in circular polarisirenden Medien und der Variation der Geschwindigkeit mit dem Polarisationsazimuthe in den gewöhnlichen doppelt brechenden Körpern benutzte[2]). Jamin bediente sich derselben Methode bei seinen Studien über die Brechungsexponenten der Gase, des Wasserdunstes und des comprimirten Wassers unter Benutzung des nach ihm benannten Interferenzrefractors[3]), und Fizeau machte von der Methode der Streifenverschiebung Gebrauch, um die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur nachzuweisen und um die Ausdehnung der Krystalle zu messen[4]).

24. Tautochronismus der Strahlen zwischen zwei Brennpunkten.

Wenn Strahlen von einem Punkte ausgehen und eine Reihe von Brechungen und Reflexionen an beliebig gekrümmten Flächen erleiden, so behält das Strahlensystem die Eigenschaft, Normalflächen zu besitzen (3). Dieser Satz wird durch den folgenden ergänzt: Jede der Normalflächen wird von sämmtlichen Strahlen gleichzeitig erreicht.

Betrachten wir zunächst den Fall einer einzigen Brechung: Sei O (Fig. 17, a. f. S.) der leuchtende Punkt, S eine um O beschriebene Kugelfläche, Σ die brechende Fläche, S' die Normalfläche der gebrochenen Strahlen, welche durch die in (3) gegebene Construction erhalten wird, R eine Parallelfläche zu S', d. i. der Ort der Endpunkte gleich langer Normalen der letzteren Fläche. Die Normalfläche S' ist so construirt, dass die Radien IA und IB zweier von einem Punkte I der brechenden Fläche an S und S' gelegten berührenden Kugelflächen sich verhalten

---

[1]) *OEuvres complètes*, X, 298, 312; XI, 718. — [2]) *OEuvres*, I, II. — [3]) C. R. XLII, 482; XLIII, 1191; XLV, 892; *Ann. de chim. et de phys.* (3) LII, 163, 171; LIX, 282. — [4]) C. R. LIV, 1237; LVIII, 923; LX, 1161; *Ann. de chim. et de phys.* (3) LXVI, 429 und (4) II, 143.

wie die Lichtgeschwindigkeiten im ersten und zweiten Medium, welche wir durch v und u bezeichnen wollen.

Es ist klar, dass die von O ausgehenden Strahlen gleichzeitig nach S gelangen. Von S bis R durchlaufen sie Wege, wie AIC. Die Zeit, welche ein Lichtstrahl braucht, um von der Fläche S zur Fläche R zu gelangen, ist also:

$$\tau = \frac{AI}{v} + \frac{IC}{u}.$$

Setzen wir

$$\frac{v}{u} = n,$$

so ist (3)

$$\frac{AI}{n} = IB$$

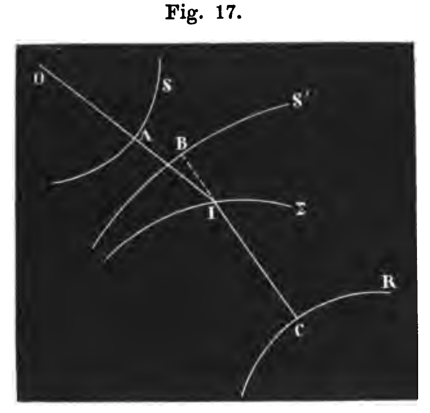
$$\frac{AI}{v} = \frac{IB}{u}$$

und

$$\tau = \frac{IB}{u} + \frac{IC}{u} = \frac{BC}{u}.$$

τ ist also constant, sämmtliche Strahlen brauchen gleiche Zeiten, um von der Normalfläche S zur Normalfläche R zu gelangen, oder, wenn man will, um von O nach R zu gelangen.

Fig. 17.



Man sieht leicht, wie dieser Beweis sich auf eine beliebige Anzahl von Brechungen und Reflexionen ausdehnen lässt.

Man hat für eine zweite Brechung oder Reflexion nur an Stelle der Fläche S die Fläche R zu setzen. Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen und sich durch beliebige, von beliebig gekrümmten Flächen begrenzte Medien bewegen, so sind die Stücke der Strahlen, welche zwischen denselben Normalflächen liegen, tautochron oder sie repräsentiren gleiche optische Längen.

Convergiren die von der letzten Trennungsfläche kommenden Strahlen nach einem Punkte, F, so sind die letzten Normalflächen Kugelflächen und es ist leicht zu ersehen, dass die Strahlen von einer dieser Flächen bis zum Punkte F gleiche Zeiten brauchen. Also:

Gehen Strahlen von einem Punkte aus und kreuzen sich dieselben nach einer beliebigen Zahl von Reflexionen und Brechungen in einem zweiten Punkte, so sind die Phasendifferenzen oder Gangunterschiede der Strahlen in beiden Punkten dieselben.

Dieser Satz gilt nicht nur für isotrope, sondern auch für homogene Medien.

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes haben wir schon gemacht (18). Wenn man die Interferenzstreifen, statt sie vermittelst eines Schirmes aufzufangen, direct mit der Lupe betrachtet, wie dies Fresnel that, so entsteht auf der Retina ein deutliches Bild der Fläche, auf welche die Lupe eingestellt ist. Strahlen, welche sich in einem Punkte dieser Fläche kreuzen, treffen sich nach ihrem Durchgang durch die Lupe und die Medien des Auges in einem Punkte der Retina unter denselben Gangunterschieden, welche sie in ihrem Durchkreuzungspunkte hatten. Das wahrgenommene Phänomen ist also identisch mit jenem, welches sich auf eine in der Focalebene der Lupe angebrachte mattgeschliffene Glasplatte projiciren würde.

25. Der Lloyd'sche Versuch.

Man erhält eine Variation des Fresnel'schen Versuches, wenn man das eine der beiden Spiegelbilder der Lichtquelle durch die Lichtquelle selbst ersetzt; hierbei findet man sich natürlich auf den Fall der streifenden Reflexion beschränkt.

Bei der Reflexion können Aenderungen der Phase und der Intensität eintreten, welche beim Fresnel'schen Spiegelversuche, wo beide Strahlen nahezu dieselben Veränderungen erleiden, keinen Einfluss haben, jedoch in dem Falle, wo der eine Strahl unverändert bleibt, Modificationen des Phänomens hervorbringen müssen, welche einen Rückschluss auf die Veränderungen ermöglichen, welche der Lichtstrahl bei der Reflexion erfahren hat.

Der Versuch wird in der Weise angestellt, dass die von einem Lichtpunkte kommenden Strahlen unter einem Einfallswinkel von nahe 90^0, also streifend, von einem nicht zu kleinen Spiegel reflectirt werden und hierauf mit den directen Strahlen interferiren. Das Phänomen wird mittelst einer Lupe betrachtet, welche auf den Rand des Spiegels eingestellt ist.

Dieser Versuch wurde zum Zwecke der Bestimmung der mit der Reflexion verbundenen Phasen- und Intensitätsveränderungen des Lichtes zuerst von Lloyd[1]) mit Glas- und Metallspiegeln angestellt und später zu demselben Zwecke von G. Quincke[2]) wiederholt und bei Reflexion an und in den verschiedensten Substanzen angestellt. Der Versuch leidet an dem Uebelstande, dass der Spiegel bei der Schiefe der Projection als

---

[1]) Pogg. 1838. — [2]) Pogg. 1871.

Spaltöffnung, d. i. lichtbeugend wirkt. Ueber die mit der streifenden Reflexion verbundenen Phasenänderungen siehe auch Jamin [1]).

26. Das Biprisma.

Fresnel hat die Interferenzfähigkeit der sich ungebeugt fortpflanzenden Strahlen nicht nur an den reflectirten Strahlen durch den Spiegelversuch, sondern auch an den gebrochenen Strahlen durch seinen Versuch mit dem Biprisma nachgewiesen.

Das Biprisma ist ein Doppelprisma aus Glas, dessen Querschnitt (Fig. 18) durch $CC'DD'$ dargestellt ist.

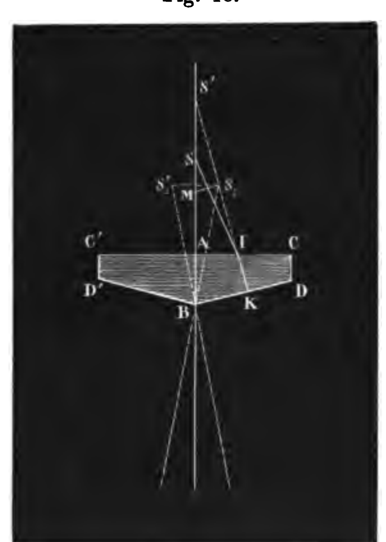
Sei S der leuchtende Punkt, SI ein fallender Strahl, IK der gebrochene Strahl, IS' dessen Verlängerung. Es ist

$$AI = AS \, tang \, i = AS' \, tang \, r$$

$$AS' = AS \cdot \frac{tang \, i}{tang \, r},$$

oder, da mit Rücksicht auf die Bedingungen des Versuches i und r als klein angenommen werden können,

Fig. 18.



$$\frac{tang \, i}{tang \, r} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

und

$$AS' = n \, . \, AS.$$

Die Verlängerungen der gebrochenen Strahlen treffen sich also in einem Punkte S', welcher, wenn

$$AS = h$$

gesetzt wird, durch

$$AS' = nh$$

gegeben ist.

Aehnlich verhält es sich beim Austritte der Strahlen aus dem Prisma. Der Winkel DBD' unterscheidet sich wenig von 180 Graden. Die Strahlen fallen also auf die Begrenzungsflächen BD und BD' nahezu senkrecht auf. Fassen wir beispielsweise die Begrenzungsfläche BD ins Auge. Die Strahlen werden nach ihrem Austritte aus dieser Fläche so verlaufen, als kämen sie von einem Punkte S_1, dessen Lage sich wie folgt bestimmt. Nehmen wir an, IK stehe senkrecht auf BD und setzen wir

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XIX, 296; (3) XXIX, 282.

$$AB = e \qquad KS'B = \alpha,$$

dann ist

$$KS_1 = \frac{1}{n} KS'$$
$$BS' = nh + e$$
$$KS' = (nh + e) \cos\alpha$$
$$KS_1 = \left(h + \frac{e}{n}\right) \cos\alpha$$
$$S'S_1 = KS' - KS_1 = \left[(n-1)\,h + \frac{n-1}{n}\,e\right] \cos\alpha$$
$$SS' = (n-1)\,h$$
$$S'S_1 = \left(SS' + \frac{n-1}{n}\,e\right) \cos\alpha.$$

Nach dieser Formel findet man die Lage des Punktes S_1, wenn man $SM = \frac{n-1}{n}\,e$ aufträgt und $S'M$ auf $S'I$ projicirt.

Die Strahlen, welche bei BD' austreten, verlaufen so, als kämen sie von einem Punkte, S'_1, welcher zu S_1 in Bezug auf SA symmetrisch liegt.

Wir haben also hier, wie beim Spiegelversuche, zwei identisch schwingende Lichtpunkte in geringer gegenseitiger Entfernung. Die Interferenzen finden in dem gemeinsamen, durch die Verlängerungen von S_1B und S'_1B begrenzten Raume der beiden Strahlenbüschel statt, welche aus BD und BD' wie aus zwei Oeffnungen austreten. Ist die Lage der beiden Lichtpunkte berechnet und die des Schirmes, auf welchen sich das Phänomen projicirt, gegeben, so erfolgt die Berechnung der Lage der Streifen, wie beim Spiegelversuche.

Es ist klar, dass auch hier, wie beim Spiegelversuche, Beugungserscheinungen auftreten müssen, welche den Versuch als unvollkommen erscheinen lassen (19).

Wir wollen noch bemerken, dass man aus den obigen Formeln leicht für die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte S_1 und S'_1

$$S_1S'_1 = (n-1)\left(h + \frac{e}{n}\right) \sin 2\alpha$$

erhält und für den Abstand der Mitte der Linie $S_1S'_1$ von A:

$$nh - \left((n-1)\,h + \frac{n-1}{n}\,e\right) \cos^2\alpha =$$
$$h - \frac{n-1}{n}\,e + \left((n-1)\,h + \frac{n-1}{n}\,e\right) \sin^2\alpha,$$

für welchen Ausdruck näherungsweise

$$h - \frac{n-1}{n}\,e$$

gesetzt werden kann.

Das Biprisma ist bequemer zu gebrauchen, als der Spiegelapparat. Da jedoch die Lage der Punkte S_1 und S_1' vom Brechungsexponenten abhängt, so wird bei Benutzung weissen Lichtes eine Complication eintreten, von welcher der Spiegelversuch frei ist.

Dass interferirende Lichtstrahlen sich nicht nur in ihren optischen, sondern auch in ihren chemischen Wirkungen und Wärmewirkungen aufheben, lässt sich leicht nachweisen. Schon Arago[1]) projicirte die Interferenzstreifen auf Chlorsilberpapier und Fizeau und Foucault[2]) untersuchten das Phänomen mit Hülfe eines Weingeistthermometers von sehr geringen Dimensionen.

27. Die Billet'schen Halblinsen und die Fizeau'schen Platten.

Die Billet'schen Halblinsen und die Fizeau'schen Platten dienen ebenfalls dazu, die Interferenzstreifen hervorzubringen.

Die Billet'schen Halblinsen[3]) bestehen aus einer in zwei Hälften getheilten Sammellinse von grosser Brennweite. Eine der Halblinsen hat eine feste Lage, die andere lässt sich in der Richtung senkrecht zur Axe verschieben. Die bewegliche Halblinse wird verschoben, bis die durch einen entfernten Lichtpunkt hervorgebrachten Bilder eine gegenseitige Entfernung von einigen Millimetern gewinnen. Die von diesen Bildern ausgehenden Lichtkegel durchdringen sich in einiger Entfernung und erzeugen Interferenzstreifen, welche mit einem Schirm aufgefangen oder mit einer Lupe betrachtet werden können. Um eines der beiden interferirenden Lichtbüschel gegen das andere zu verzögern, bringt man in den Brennpunkten retardirende Körper an und hat hierbei den Vortheil, dass die eingeschobenen Körper nur in einem geringen Theile ihrer Ausdehnung in Anspruch genommen werden, also die Schwierigkeiten, welche sich aus einer nicht gleichmässigen Dicke und Homogeneität derselben ergeben, vermieden erscheinen.

Man erhält brauchbare Billet'sche Halblinsen, wenn man ein biconvexes Brillenglas von ungefähr 500 mm Brennweite und 1 mm Dicke mit dem Diamanten in zwei Hälften schneidet und mit vier weichen Wachskügelchen (Fig. 19) auf einem Holzringe so befestigt, dass die Schnittflächen ungefähr 0,8 mm von einander abstehen. Die richtige Stellung giebt man den beiden Hälften dadurch, dass man die Spiegelbilder eines entfernten Objectes in beiden gleichzeitig betrachtet und sich decken lässt[4]).

Für viele Zwecke ist es bei den eben beschriebenen Halblinsen nachtheilig, dass die Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkte in

---

1) *OEuvres complètes,* X, 484. — 2) C. R. XXV, 447. — 3) Billet, *Traité d'optique physique,* I, 67. — 4) G. Quincke, Pogg. CXXXII.

einer Horizontalebene ausgehen, im Verlaufe ihres Weges nicht in einer Horizontalebene bleiben. Es hat deshalb schon Billet die Hälften einer gewöhnlichen Linse durch die beiden Hälften einer Cylinderlinse ersetzt, die dann die Vorzüge des Interferenzprismas mit den Vorzügen der gewöhnlichen Halblinsen vereinigen. Auch diese Interferenzerscheinung erfährt eine Störung durch Lichtbeugung (19, 25, 26).

Fig. 19.

Fizeau's Apparat unterscheidet sich von den Halblinsen dadurch, dass das Doppelbild nicht durch Trennung der Linse in zwei Theile, sondern durch Einschiebung eines Plattenpaares zwischen der Lichtquelle und der intacten Linse hervorgebracht wird. Das Plattenpaar besteht aus identischen Glasplatten, welche gegen einander geneigt sind, sich bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte erstrecken und eine in Bezug auf die Axe der Linse symmetrische Lage haben [1]).

28. Nothwendigkeit einer einzigen Lichtquelle.

Wir haben bei der Beschreibung der Interferenzversuche stets vorausgesetzt, dass die interferirenden Strahlen desselben Ursprunges seien, d. i. von ein und demselben leuchtenden Punkte ausgehen. In der That entstehen durch die gegenseitige Einwirkung von Strahlen, welche von zwei verschiedenen Lichtquellen kommen, niemals Interferenzstreifen. Man führt diese Thatsache auf zwei Ursachen zurück: auf einen raschen Wechsel der Schwingungsweise jedes einzelnen Punktes der Lichtquelle und auf die gleichzeitige Verschiedenheit der Schwingungsweise selbst sehr nahe an einander liegender Punkte derselben Lichtquelle.

Setzen wir zunächst zwei punktförmige Lichtquellen von gleicher Farbe und Intensität voraus, d. i. setzen wir eine Uebereinstimmung der Lichtschwingungen in Periode und Amplitude voraus, während wir annehmen, dass Form, Orientation und Phase der Lichtschwingungen einem raschen und unregelmässigen Wechsel unterliegen.

Seien A und A' die beiden leuchtenden Punkte, M ein von beiden Lichtquellen erleuchteter Punkt. In irgend einem Momente werden die von A und A' nach M gelangenden Vibrationen durch ihre Vereinigung in M einen gewissen Grad der Intensität, z. B. ein Maximum der Intensität hervorbringen. Nach einer sehr kurzen Zeit werden sich die Schwingungsarten in A und A' in völlig unabhängiger Weise geändert haben und es entsteht in M ein anderer Grad der Intensität, z. B. ein Minimum. Allgemein wird die Intensität in M einem raschen und un-

[1]) C. R. XXXIII, 349.

regelmässigen Schwanken innerhalb eines gewissen Maximums und Minimums unterliegen, und man wird wegen der Raschheit des Wechsels im Punkte M eine mittlere, merklich gleichmässige Erhellung wahrnehmen.

Wir werden später darauf zurückkommen, dass Fizeau Interferenzen bei Gangunterschieden bis zu 50000 Wellen erhalten hat. Man muss daraus schliessen, dass sich der Schwingungszustand einer Lichtquelle durch die Zeit jener Schwingungen unverändert erhalten kann.

Wenn es gelänge, z. B. durch elektrische Entladungen, Lichtquellen von so kurzer Dauer herzustellen, dass die eben angestellte Betrachtung unzutreffend werden könnte, so gäbe es gleichwohl noch eine andere Ursache, welche das Entstehen der Interferenzstreifen verhinderte. Es ist dies der Umstand, dass wir genöthigt sind anzunehmen, dass selbst sehr nahe an einander liegende Punkte derselben Lichtquelle völlig unabhängig von einander schwingen.

Seien S und S' zwei Lichtquellen, welche wir nun, was in Wirklichkeit immer zutrifft, als merklich ausgedehnt voraussetzen, M ein Punkt, welcher von beiden Lichtquellen bestrahlt wird. Setzen wir ferner abermals eine Uebereinstimmung der beiden Lichtquellen in Farbe und Intensität voraus. In irgend einem Augenblicke werden von zwei Punkten A und A' der beiden Lichtquellen Strahlen nach M gelangen und sich daselbst verstärken oder schwächen. In demselben Augenblicke werden von zwei den Punkten A und A' benachbarten Punkten ebenfalls Strahlen nach M gelangen und sich daselbst verstärken oder schwächen. Die in dem betrachteten Augenblicke resultirende Intensität wird jedoch in beiden Fällen nach der Voraussetzung, welche wir über die Schwingungsweise ausgedehnter Lichtquellen gemacht haben, im Allgemeinen eine verschiedene sein. Berücksichtigen wir die grosse Zahl der in Betracht kommenden Punktepaare, so resultirt im Punkte M, wie früher, eine merklich constante mittlere Helligkeit und es entstehen keine Interferenzstreifen.

Wir wollen unsere Betrachtung auf die Frage nach der Fortpflanzung der Schwingungen einer Lichtquelle von beträchtlichen Dimensionen ausdehnen und insbesondere den Fall untersuchen, wo die Lichtquelle eine leuchtende Kugel, σ, ist und die Wirkung derselben auf einer concentrischen Kugelfläche, S, betrachten. Unserer Voraussetzung nach befinden sich die Bewegungszustände der verschiedenen Punkte der Oberfläche der Kugel σ nicht in gegenseitiger Uebereinstimmung, es wird also auch die resultirende Bewegung in einem Punkte P der Kugelfläche S eine Function der Lage des Punktes P auf S sein, und wir stellen die Frage, in welcher Ausdehnung auf S die Bewegung als merklich dieselbe angesehen werden kann. Sei O der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kugelflächen, ϱ, R ihre Radien, π ein Punkt auf σ. Denken wir uns auf S durch P einen Kreis, s, gelegt, dessen Ebene auf $O\pi$ senkrecht steht. Von P aus auf diesem Kreise fortschreitend werden wir

zu Punkten gelangen, welche wegen ihrer gleichen Abstände von π von diesem Punkte merklich identische Schwingungen empfangen. Denken wir uns zu beiden Seiten von s zwei weitere Kreise, s', s'', parallel zu s, und sei die Entfernung der Punkte des Kreises s' von π um einen kleinen Bruchtheil einer Wellenlänge, $h\lambda$, grösser, als πP und die Entfernung der Punkte des Kreises s'' von π um eben so viel kleiner. Wir können dann annehmen, dass auf der Zone, welche durch s' und s'' begrenzt ist, in der Nähe von P merklich identische Schwingungen vom Punkte π der Lichtquelle anlangen, und zwar ist, wenn die halbe Breite der Zone durch x bezeichnet wird,

$$h\lambda = x \,.\, \sin \pi P O.$$

Der Punkt P erhält nun seine Bewegung nicht nur von π, sondern auch von allen übrigen Punkten der Oberfläche der Kugel σ und es wird jedem einzelnen der Punkte auf σ bezüglich des Punktes P eine Zone, wie die oben betrachtete, entsprechen. Diese sämmtlichen Zonen werden eine gemeinsame Fläche auf S haben, und es ist klar, dass auf dieser Fläche sämmtliche Punkte mit P merklich identisch schwingen; da nämlich die elementaren Schwingungen, welche von den verschiedenen Punkten der Lichtquelle auf zwei Punkte, P, P', der betrachteten Fläche übertragen werden, identisch sind, sind es auch die resultirenden Schwingungen dieser Punkte. Versuchen wir von P aus auf S den grössten von allen kleinen Kreisen zu beschreiben, deren sämmtliche Punkte in jene den erwähnten Zonen gemeinschaftliche Fläche fallen. Um den Radius dieses Kreises zu finden, bemerken wir, dass der grösste Werth, dessen $\sin \pi P O$ fähig ist, $\frac{\varrho}{R}$ ist, dass also, wenn wir in der letzten Gleichung $\frac{\varrho}{R}$ für $\sin \pi P O$ einsetzen, x den Radius des gesuchten kleinen Kreises bedeutet, dessen Punkte mit P übereinstimmend schwingen. Setzen wir $h = \frac{1}{4}$, so erhalten wir für den Durchmesser dieses Kreises

$$2x = \frac{R\lambda}{2\varrho},$$

und da $\frac{2\varrho}{R}$ der scheinbare Durchmesser der Lichtquelle in Bezug auf die Distanz R ist, so kann man sagen, dass auf einer Kugelfläche, welche mit einer leuchtenden Kugel concentrisch liegt, die Schwingungen höchstens auf eine Distanz, gleich einer Wellenlänge dividirt durch den scheinbaren Durchmesser der Lichtquelle, als übereinstimmend angesehen werden können.

Nehmen wir z. B. die Sonne als Lichtquelle an. Wir haben

$$\frac{\varrho}{R} = \operatorname{tang} 16' = 0{,}005,\ \lambda = 0{,}0005$$

und

$$2x = 0{,}05 \text{ Millimeter.}$$

Es folgt, dass auf jedem Quadratmillimeter des Querschnittes eines Bündels Sonnenstrahlen in einem gegebenen Augenblicke ungefähr 400 verschiedene Schwingungszustände angenommen werden müssen.

Setzen wir hingegen voraus, es werde durch eine Linse von 5 mm Brennweite ein Sonnenbildchen erzeugt, dessen Durchmesser 0,05 mm ist. In einer Entfernung von 1 m ist der scheinbare Halbmesser

$$\frac{\varrho}{R} = 0{,}00005$$

und wir erhalten für den Durchmesser einer Kreisfläche, auf welcher die Schwingungen als identisch angesehen werden können,

$$2x = 5 \text{ Millimeter.}$$

Man begreift hiernach, dass man Interferenzstreifen erhält, wenn man auf einen Schirm mit zwei Spaltöffnungen, deren gegenseitige Entfernung nicht sehr gering ist, das von einer kleinen Oeffnung des Fensterladens kommende Sonnenlicht wie bei dem Versuche von Young (13) oder, um eine grössere Intensität zu erhalten, das vom Brennpunkte einer Linse kommende Licht fallen lässt.

29. Einfluss der Ausdehnung der Lichtquelle.

Wir kehren zum Spiegelversuche zurück, bei dessen Berechnung wir eine punktförmige Lichtquelle vorausgesetzt haben, um zu prüfen, welchen Einfluss die Ausdehnung der Lichtquelle auf das Entstehen der Streifen hat.

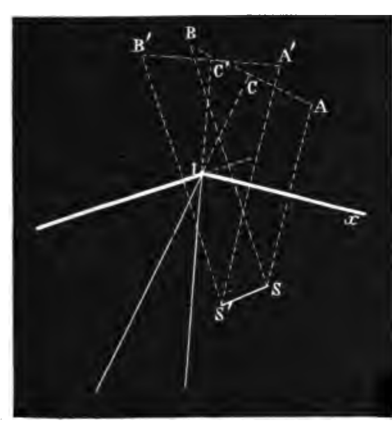
Wenn die Lichtquelle sich auf einen Punkt reducirt, so hat man, wenn der Schirm eine zur Ebene P, welche die Lichtquelle mit ihren beiden Bildern verbindet, normale Lage hat, hyperbolische Streifen, welche in der Nähe der Ebene E, welche die Verbindungslinie der beiden Bilder rechtwinklig schneidet, als geradlinig angesehen werden können (19). Es ist leicht einzusehen, dass eine Ausdehnung der Lichtquelle in der Richtung senkrecht zur Ebene P die Deutlichkeit der Streifen nicht verringert. Zwar bringt jeder Punkt der so entstehenden Lichtlinie sein eigenes Streifensystem hervor, allein innerhalb des Raumes, in welchem das Phänomen wahrgenommen wird, d. i. in der Nähe von E, coincidiren die Streifsysteme und summiren als von verschiedenen Lichtpunkten herrührend ihre Intensitäten. Wir werden auf den letzteren Umstand später ausführlicher zurückkommen.

Anders verhält es sich mit einer Ausdehnung der Lichtquelle in der Ebene P, und es lässt sich zeigen, dass hier das Ueberschreiten einer gewissen Grenze ein Verschwinden der Streifen zur Folge haben muss.

Seien (Fig. 20) SS' die Lichtquelle, I der Durchschnitt der Spiegel, A und B die Bilder des Punktes S, A' und B' die Bilder des Punktes S', σ der scheinbare Durchmesser der Lichtquelle von I aus gesehen, l die

Entfernung von I, in welcher die Streifen hervorgebracht werden, d die Entfernung des Punktes C von dem Centralstreifen des durch S hervorgebrachten Streifensystems, w der spitze Winkel der Spiegel und sei $AB = 2a$, $SI = R$.

Fig. 20.



Der dem Punkte S entsprechende Centralstreifen liegt auf der Verlängerung der Geraden IC, der dem Punkte S' entsprechende auf der Verlängerung der Geraden IC', und es ist

$$SIx = AIx,\ S'Ix = A'Ix$$
$$AIA' = SIS'$$
$$BIB' = SIS'$$
$$CIC' = SIS' = \sigma,$$

also die gegenseitige Entfernung der von S und S' herrührenden Centralstreifen $l\sigma$. Andererseits ist die halbe Streifenbreite des von S herrührenden Streifensystems (19):

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{d}{2a}.$$

Nehmen wir also an, dass das Phänomen verschwinde, wenn das erste Minimum des durch den Punkt S hervorgebrachten Interferenzbildes mit dem Centralstreifen des durch den Punkt S' hervorgebrachten Interferenzbildes zusammenfällt, so haben wir für diesen Fall:

$$l\sigma = \frac{\lambda}{2}\,\frac{d}{2a}$$

oder

$$\sigma = \frac{\lambda d}{4al}.$$

Nähert man sich dieser Grenze, so wird das Phänomen undeutlich, um schliesslich einer allgemeinen Helligkeit Platz zu machen. Die letzte Gleichung kann noch auf eine andere Form gebracht werden.

Es ist
$$\measuredangle\, AIB = 2\omega$$
$$d = l + R\cos\omega$$
$$a = R\sin\omega,$$

so dass als Bedingung der Wahrnehmbarkeit des Phänomens erhalten wird:

$$\sigma < \frac{\lambda}{4R\sin\omega}\left(1 + \frac{R\cos\omega}{l}\right)$$

oder, wenn $\frac{R}{l}$ als eine grosse Zahl vorausgesetzt wird:

$$\sigma < \frac{\lambda}{4l} \cot \omega,$$

also schliesslich

$$4\sigma\omega l < \lambda.$$

Setzt man z. B. für σ den scheinbaren Durchmesser der Sonne und für l ein Meter, so ergiebt sich aus der letzten Formel für ω ein Winkel, welcher kleiner ist, als die Neigungen, welche man den Spiegeln zu geben pflegt.

30. Interferenzen bei grossen Gangunterschieden.

Frésnel, welcher selbst mit dem homogensten, ihm zu Gebote stehenden, Lichte nie mehr als einige Hundert Interferenzstreifen beobachtete, glaubte, dass bei Gangunterschieden, welche mehr als einige Hundert Wellen betragen, keine Interferenz mehr stattfinde. Er erklärte diesen Umstand aus einem raschen und unregelmässigen Wechsel der Schwingungsweise der Lichtquelle (28). In der That, setzen wir die mittlere Zahl der Schwingungen zwischen zwei plötzlichen Veränderungen der Schwingungsweise der Lichtquelle gleich m und beträgt der Gangunterschied der interferirenden Strahlen n Wellen, wo $n < m$, so ist klar, dass Vibrationen, welche gleichzeitig im Durchkreuzungspunkte der Strahlen anlangen, von der Lichtquelle in Momenten ausgehen, welche durch ein Intervall von n Vibrationen getrennt sind. Es werden also von m Paaren von Vibrationen, welche in jenem Punkte zusammentreffen, $m - n$ Paare von solcher Beschaffenheit sein, dass die beiden Vibrationen eines Paares von der Lichtquelle in Momenten ausgehen, welche zu einer Periode gehören, innerhalb welcher die Lichtquelle sich unverändert erhält, und für diese Vibrationen hängt das Resultat der Interferenz nur von der Wegdifferenz ab; was die n übrigen Paare von Vibrationen betrifft, so gehen die beiden Vibrationen jedes Paares von der Lichtquelle in Momenten aus, welche zwei verschiedenen, durch eine plötzliche Veränderung der Schwingungsweise der Lichtquelle getrennten Perioden angehören. Für diese letzteren Vibrationen ändern sich die Bedingungen der Interferenz von einem Augenblicke zum anderen, so dass Helligkeit und Dunkelheit in rascher Aufeinanderfolge den Eindruck einer mittleren gleichmässigen Helligkeit hervorbringen. Sobald also n aufhört, im Vergleiche mit m klein zu sein, werden die Interferenzstreifen an Deutlichkeit abnehmen und vollständig verschwinden, ehe n die Grösse von m erreicht hat. Fresnel wurde durch diese Betrachtung veranlasst, anzunehmen, dass die Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsweise einer Lichtquelle sich unverändert erhält, nicht mehr betrage, als die Dauer einiger Tausend Schwingungen. Allein Fresnel experimentirte mit einer Lichtquelle von sehr unvollkommener Homogeneität und Versuche von Fizeau und Foucault haben bewiesen, dass die Zeitdauer, innerhalb welcher die

Schwingungsweise der Lichtquelle ungeändert bleibt, jedenfalls weit beträchtlicher ist, als Fresnel annahm.

Es ist leicht einzusehen, dass, die Schwingungsweise der Lichtquelle als vollkommen unveränderlich vorausgesetzt, die Zahl der Streifen eine beschränkte sein muss, sobald das Licht nicht vollkommen homogen ist (22). Seien λ und λ' die grössten und die kleinsten Wellenlängen des benutzten Lichtes. Dann werden die Streifen bei einer Wegdifferenz δ verschwinden, wenn, unter p eine ganze Zahl vorhanden,

$$\delta = 2p\,\frac{\lambda}{2} = (2p+1)\,\frac{\lambda'}{2},$$

woraus folgt:

$$p = \frac{\lambda'}{2(\lambda - \lambda')},$$

also dass die Zahl der sichtbaren Streifen in dem Maasse wächst, als $\lambda - \lambda'$ an Grösse abnimmt, d. i. je mehr sich die Lichtquelle der vollkommenen Homogeneität nähert. Das Licht, welches Fresnel durch sein rothes Glas erhielt, ist nun, wie das Spectroskop zeigt, weit entfernt davon, homogen zu sein.

Selbst das von Brewster[1]) als völlig monochromatisch vorgeschlagene Licht der Kochsalzflamme, welches bis zu 500 Interferenzstreifen wahrnehmen lässt, erweist sich, mit dem Spectroskope geprüft, als nicht vollkommen homogen.

Das Verschwinden der Streifen höherer Ordnungszahl beweist also keineswegs das Aufhören der Interferenzfähigkeit der Strahlen. Dass auch an Stellen, wo keine Streifen mehr wahrgenommen werden, noch Interferenz stattfindet, haben Versuche, welche Fizeau und Foucault[2]) im Jahre 1845 anstellten, bewiesen. Die Methode, deren sie sich bedienten, beruht auf dem folgenden Principe:

Wenn man die Interferenzstreifen durch weisses Licht hervorbringt, so verschwindet in einiger Entfernung vom Centralstreifen jede Färbung; gleichwohl ist das Licht, welches von einer solchen Stelle ausgeht, keineswegs mit dem Sonnenlichte identisch, denn es fehlen alle Strahlen, deren Brechbarkeit so beschaffen ist, dass für sie an jener Stelle die Wegdifferenz eine ungerade Zahl halber Wellenlängen beträgt. Wenn man dieses Licht durch ein Prisma zerlegt, so hat die Abwesenheit der durch Interferenz beseitigten Strahlen zur Folge, dass im Spectrum dunkle Linien in um so gedrängterer Folge erscheinen, je weiter die Stelle, welche die Strahlen aussendet, vom Centralstreifen entfernt ist. Diese Linien können wegen der Regelmässigkeit ihrer Aufeinanderfolge und Ausdehnung leicht von den Fraunhofer'schen Linien unterschieden werden.

---

[1]) *Edinb. Trans.*, IX, *part.* II, 433; *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXXVII, 437. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXVI, 138.

Bei dem Versuche von Fizeau und Foucault wurden die Interferenzstreifen auf einen Schirm projicirt, welcher mit einer engen Spaltöffnung parallel zu den Streifen versehen und verschiebbar war, so dass die Spaltöffnung dem Centralstreifen genähert oder von ihm entfernt werden konnte. Das durch die Spaltöffnung tretende Licht wurde vermittelst eines Spectroskopes untersucht.

Die Wegdifferenz der Strahlen, welche nach der Spaltöffnung des Schirmes gelangen, kann passend wie folgt bestimmt werden. Man zähle die dunkeln Streifen, welche im Spectrum innerhalb eines bestimmten Raumes, also zwischen zwei bestimmten Fraunhofer'schen Linien erscheinen. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ die den dunkeln Streifen entsprechenden Wellenlängen, wenn man von Roth gegen Violett fortschreitet, δ die gesuchte Wegdifferenz und x eine ganze Zahl, so ist

$$\delta = (2x + 1)\frac{\lambda_1}{2}$$
$$\delta = (2x + 3)\frac{\lambda_2}{2}$$
$$\delta = (2x + 5)\frac{\lambda_3}{2}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\delta = (2x + 2p - 1)\frac{\lambda_p}{2}.$$

Zählt man z. B. die dunkeln Streifen, welche zwischen den Fraunhofer'schen Linien B und H liegen und bezeichnet man durch λ_b und λ_h die diesen Linien entsprechenden Wellenlängen, so hat man:

$$\lambda_1 = \lambda_b,\ \lambda_p = \lambda_h,$$
$$\delta = (2x + 1)\frac{\lambda_b}{2} = (2x + 2p - 1)\frac{\lambda_h}{2}.$$

Da p durch den Versuch bekannt ist, so genügt die letzte Gleichung, um δ und x zu finden.

Fizeau und Foucault liessen, um grosse Gangunterschiede zu erhalten, Strahlen interferiren, welche von den beiden Flächen einer Glasplatte von ungefähr 1 mm Dicke reflectirt wurden. Sie konnten so die Interferenz von Strahlen bei einem Gangunterschiede von 6000 bis 7000 Wellen noch constatiren.

Schon früher hatte Wrede[1]) einen ähnlichen Versuch angestellt: Krümmt man ein dünnes Glimmerblättchen und zerlegt das Licht der Glanzlinie spectral, so erhält man ein Spectrum mit zahlreichen dunkeln Streifen, welche von der Interferenz des an der Vorder- und Hinterfläche reflectirten Lichtes herrühren. Die hohe Bedeutung der Interferenzerscheinungen im Spectrum wurde zuerst von Poggendorff[2]) am Wrede'schen Versuche erkannt.

---

1) Pogg. Bd. 33. — 2) Pogg. Bd. 41.

Fizeau nahm später die Versuche über Interferenzen bei grossen Gangunterschieden wieder auf und brachte dieselben in einer Arbeit, deren Hauptzweck das Studium des Einflusses der Wärme auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Glas und anderen Körpern war, auf einen höheren Grad der Vollkommenheit [1]).

Das Verfahren, dessen er sich bediente, gründet sich auf den Umstand, dass das Licht der Salzflamme dichromatisch ist.

Eine Mischung von vier Theilen Holzgeist und einem Theile Alkohol mit etwas Kochsalz giebt eine sehr intensive Flamme, deren Spectrum sich auf zwei sehr nahe an einander liegenden Linien reducirt, welche die Fraunhofer'sche D-Linie ausmachen. Durch die Coexistenz von Strahlen verschiedener Brechbarkeit in dem Lichte dieser Flamme wird, obgleich die Verschiedenheit nur gering ist, das Verschwinden der Streifen jenseits einer gewissen Grenze herbeigeführt.

Bezeichnen wir durch λ und λ' die Wellenlängen der beiden D-Linien und durch δ die Wegdifferenz, bei welcher die Streifen zum ersten Male verschwinden, so haben wir

$$\delta = 2p\,\frac{\lambda}{2} = (2p + 1)\,\frac{\lambda'}{2},$$

wo p ungefähr 500 ist.

Wenn diese Wegdifferenz sich verdoppelt, so wird:

$$2\delta = 4p\,\frac{\lambda}{2} = 2(2p + 1)\,\frac{\lambda'}{2}.$$

Es haben also für Wegdifferenzen, welche 2δ nahe liegen, die Maxima und Minima der beiden Streifensysteme wieder dieselbe Lage und folglich sind die Streifen wieder wahrnehmbar. Sie verschwinden zum zweiten Male bei einer Wegdifferenz 3δ u. s. w. Lässt man die Wegdifferenz continuirlich zunehmen, so kann man dieses Verschwinden und Wiedererscheinen der Streifen constatiren, und es wird das $n$te Wiedererscheinen der Streifen einer Wegdifferenz $2n\,.\,500\,\lambda$ entsprechen.

Um diese periodische Wiederkehr der Streifen zu erhalten, liess Fizeau das Licht der Kochsalzflamme senkrecht auf ein Newton'sches Farbenglas auffallen, welches aus einer Glasplatte und einer Linse von geringer Krümmung bestand, welche letztere durch eine Mikrometerschraube von der Glasplatte entfernt werden konnte. Wenn die Linse anfangs die Platte berührte und dann langsam von derselben entfernt wurde, so zogen sich die Ringe zusammen, um im Centrum zu verschwinden, während sich an der Peripherie neue Ringe bildeten. Nachdem ungefähr 500 Ringe im Centrum verschwunden waren, wurden die nachrückenden Ringe undeutlich und blieben aus, erschienen wieder, wenn die Entfernung der Linse von der Glasplatte verdoppelt wurde u. s. w. Fizeau beobachtete eine 50malige Wiederkehr der

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), LXVI, 429; *Compt. rend.* LIV, 1237.

Ringe; bei weiterer Entfernung der Linse wurden keine Ringe mehr wahrgenommen. Man kann hieraus den Schluss ziehen, dass für die Lichtquelle, welche hier benutzt wurde, die Zeit, innerhalb welcher man die Vibrationsbewegung der Lichtquelle als unveränderlich ansehen kann, mindestens 50000 Schwingungszeiten des gelben Lichtes gleichkommt, d. i. ungefähr $^1/_{10000000000}$ Secunden.

Da eine so geringe Differenz in der Wellenlänge, wie die zwischen den beiden gelben Linien, welche die *D*-Linie ausmachen, hinreicht, eine Verschiebung um mehrere, bis 50, Streifen hervorzubringen, so erweisen sich die Interferenzen bei grossen Gangunterschieden als ein vorzügliches Mittel, kleine Differenzen in der Wellenlänge oder Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu messen. E. Ketteler[1]) verglich nach dieser Methode die Wellenlängen von Natrium, Lithium und Thallium und J. J. Müller[2]) benutzte dieselbe Methode bei Untersuchungen über die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von seiner Intensität. Die letzteren Untersuchungen ergaben, dass in zweiter Näherung, welche Differenzen von Milliontheilen des eigenen Werthes und kleinere berücksichtigt, ein Zusammenhang zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und lebendiger Kraft der Aetherbewegung anzunehmen sei und dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes mit der Helligkeit desselben zunehme oder, was dasselbe ist, die Wellenlänge mit der Amplitude.

31. Farben dünner Blättchen. Einleitung.

Die lebhaften Farben, welche sich beim Durchgange oder der Reflexion des Lichtes an dünnen Blättchen durchsichtiger Körper zeigen, wurden ohne Zweifel zu allen Zeiten beobachtet. Die Bedingungen ihres Entstehens finden sich häufig vor und sie entgehen auch der oberflächlichen Beobachtung nicht. Doch beschäftigte sich zuerst Boyle[3]) eingehender mit den Farben, welche Blasen aus Seifenwasser und anderen Flüssigkeiten und dünnwandige Glaskugeln zeigen. Er erkannte die Unabhängigkeit der Farben von der Substanz der Blättchen.

Hooke[4]) studirte die Erscheinungen mittelst des Mikroskopes und erfand das Farbenglas, bei welchem die Farben durch eine dünne Luftschicht zwischen zwei schwach gekrümmten Glaslinsen hervorgebracht werden. Er erkannte, dass beim Farbenglase die Farben sich in regelmässigen Ringen aneinanderreihen und die Farbenfolge die des inneren Regenbogens ist, dass die Farbe von der Dicke des Blättchens abhängt und dass Blättchen von überall gleicher Dicke in ihrer ganzen Ausdeh-

---

[1]) Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase, Bonn 1865. — [2]) Pogg. 1872. — [3]) Boyle's Werke, herausgegeben von Shaw, II, 70; siehe auch die Geschichte der Optik von Priestley, 153. — [4]) Micrographia 47.

nung dieselbe Farbe zeigen. Seine Theorie nähert sich in bemerkenswerther Weise der Wahrheit. Er sagt:

„In Folge dieser Betrachtungen wird es einleuchtend, dass die Reflexion von der unteren oder entfernteren Seite der Lamelle die Hauptursache der Entstehung dieser Farben ist. Auf ein Glimmerblättchen, das an dem einen Ende dünner und dicker an dem anderen ist, falle ein Strahlenbündel, das von der Sonne oder einem anderen entfernten leuchtenden Gegenstande kommt, in schräger Richtung auf das dünnere Ende, so wird ein Theil des Lichtes an der Vorderfläche der Lamelle reflectirt. Da aber die Lamelle durchsichtig ist, so wird ein anderer Theil an der Vorderfläche auch gebrochen und nach der Hinterfläche fortgepflanzt, von welcher er reflectirt und von der Vorderfläche abermals gebrochen wird, so dass dann nach zwei Brechungen und einer Reflexion eine Art von schwächerem Strahle entsteht, dessen Wellenschlag nicht allein in Folge der beiden Brechungen an der Vorderfläche, sondern auch wegen der Zeit, die während seines Hin- und Herganges zwischen den beiden Oberflächen der Lamelle verfliesst, nach dem von der Vorderfläche reflectirten Wellenschlage folgt. So entsteht, wenn die Flächen der Lamelle so nahe an einander sind, dass das Auge sie nicht unterscheiden kann, ein aus beiden reflectirter vereinigter oder ein verdoppelter Wellenschlag, dessen stärkerer Theil vorangeht, und dieser verdoppelte Wellenschlag wird auf der Netzhaut die Empfindung der gelben Farbe verursachen. Dies Gelb wird tiefer erscheinen, wenn der schwächere (von der Hinterfläche reflectirte) Wellenschlag bei einer grösseren Tiefe der dünnen Platte aus der Richtung des stärkeren ersten (von der Vorderseite reflectirten) mehr heraustritt, bis endlich der Eindruck der rothen Farbe auf das Auge gemacht wird u. s. w."

Hooke hat keine Messungen angestellt; die Gesetze der Erscheinungen wurden erst durch die classischen und erschöpfenden Arbeiten Newton's[1]) bekannt. Dieser benutzte verschiedene homogene Lichtquellen, erkannte, dass die Durchmesser der Ringe bei wachsender Brechbarkeit des Lichtes an Grösse abnahmen, und wurde hierdurch zur Erklärung der complicirten Farbenfolge bei Anwendung weissen Lichtes geführt. Er erkannte, dass Blättchen, deren Dicke im Verhältnisse der auf einander folgenden ungeraden Zahlen wächst, dieselbe Farbe reflectiren und gründete hierauf seine Theorie, welche später von Fresnel vollständig widerlegt wurde.

Euler[2]) nahm die von Huyghens und Hooke versuchte Erklärung mit Hülfe der Wellentheorie wieder auf. Er erkannte die Abhängigkeit der Farbe von der Oscillationsgeschwindigkeit, doch brachte er es nicht zu einer genügenden Erklärung der Farbenringe. Es war Young vorbehalten, aus dem Principe der Interferenzen eine befriedigende Erklärung der Farben dünner Blättchen zu geben. Seine Theorie

---

1) Optik, II. — 2) *Mém. de l'acad. de Berlin* 1752, VIII, 262.

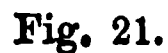
wurde später von Fresnel [1]) weiter ausgeführt, welcher auch die mehrfach reflectirten Strahlen in Rechnung zog. Eine letzte Schwierigkeit, welche sich aus dem Umstande ergab, dass die Messungen Newton's für den Fall der schiefen Incidenz mit den Resultaten der Interferenztheorie nicht stimmten, wurde durch die Versuche von Provostaye und Desains [2]) behoben.

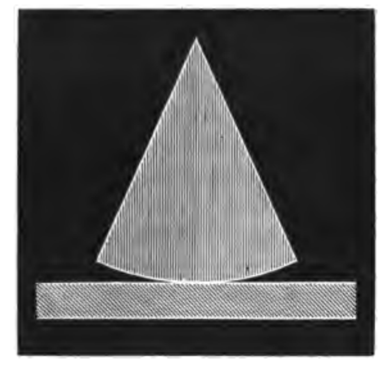
Wir geben zunächst dem Lehrgange dieses Werkes entsprechend nur die elementare Theorie der in Rede stehenden Erscheinungen und behalten die vollständige Theorie einem späteren Capitel vor.

32. Die Farbenringe.

Die Farben, welche dünne Blättchen zeigen, erweisen sich als abhängig von der Dicke der Blättchen. Es liegt daher nahe, das Studium dieser Erscheinungen auf die Untersuchung planparallel begrenzter durchsichtiger Blättchen zu gründen. In der That liefert diese Art der Untersuchung, verbunden mit der spectroskopischen Zerlegung des Lichtes, ausgezeichnete Resultate.

Man kann aber auch dünne Blättchen benutzen, deren Dicke sich nach einem bekannten Gesetze ändert. Das Newton'sche Farbenglas liefert eine Luftschicht, welche diese Bedingung erfüllt. Dasselbe besteht beispielsweise aus einer sphärischen Glaslinse von sehr geringer Krümmung, oder einem Glasprisma, dessen Rückenfläche schwach sphärisch gekrümmt ist (Fig. 21), welche auf einer horizontalen Glasplatte ruht. Newton verwendete Linsen von 40′ bis 50′ Krümmungshalbmesser. Die zwischen den Gläsern befindliche Luftschicht bringt die Interferenzfarben hervor.


Fig. 21.



Befindet sich das Auge oberhalb der Linse und ist das Glas weissem Lichte ausgesetzt, so nimmt man um den Contactpunkt eine Anzahl concentrischer, kreisrunder Farbenringe wahr.

Die Folge der Farben ist nach Newton [3]) von innen nach aussen:

---

[1]) *OEuvres complètes,* I, 51, 144, 252, 686, 695; *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXIII, 129. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXVII, 423. — [3]) Optik.

1.	2.	3.
Schwarz,	Violett,	Purpur,
Blau,	Blau,	Blau,
Weiss,	Grün,	Grün,
Gelb,	Gelb,	Gelb,
Roth.	Roth.	Roth.

4.	5.	6.	7.
Grün,	Grünblau,	Grünblau,	Grünblau,
Roth.	Roth.	Blassroth.	Röthlichweiss.

Je weiter man sich vom Centrum der Ringe entfernt, desto mehr nähert sich die Farbenfolge einem Wechsel von Grün und Roth und zwar bemerkt man Maxima der Intensität an den Uebergangsstellen von Grün zu Roth und Minima an den Uebergangsstellen von Roth zu Grün.

Lässt man ein homogenes Spectrum auf das Farbenglas fallen, so erstrecken sich die Ringe bis an den Rand des Glases und erscheinen an jeder Stelle nur in einer Farbe, welche eben dahin fällt, abwechselnd hell und dunkel. Lässt man auf dieselbe Stelle des Glases successive die verschiedenen Farben des Spectrums fallen, so sieht man, wie die Ringe sich beim Uebergange von Violett zu Roth erweitern.

Durch Veränderung der Stellung des Auges kann man die Ringe unter verschiedenen Incidenzen beobachten. Hierbei ändert sich das allgemeine Ansehen der Erscheinung nicht, es variirt nur die Breite der Ringe. Will man unter genau normaler Incidenz beobachten, so kann man zwischen das Auge und das Farbenglas eine gegen die Axe des letzteren unter einem Winkel von 45° geneigte Glasplatte bringen und die Lichtstrahlen in horizontaler Richtung auf die Glasplatte fallen lassen, von welcher sie in verticaler Richtung nach dem Farbenglase reflectirt werden. Newton hat von dieser Vorrichtung keinen Gebrauch gemacht, sondern unter Benutzung des Umstandes, dass die Ringe in der Nähe der normalen Incidenz ihre Radien nur langsam ändern, bei Incidenzen von 3 bis 4 Graden beobachtet.

Um die Ringe im durchgelassenen Lichte zu erhalten, stellt man das Glas vertical und bewirkt die gegenseitige Annäherung der Gläser durch eine Schraubenvorrichtung. Die Ringe im durchgelassenen Lichte zeigen an jeder Stelle die der reflectirten complementäre Farbe, und folglich ist die Mitte weiss; andererseits sind die durchgelassenen Ringe minder wahrnehmbar, als die reflectirten.

Die Zahl der wahrnehmbaren Ringe ist sowohl im reflectirten als durchgelassenen Lichte, wie bei allen Interferenzerscheinungen, eine beschränkte bei Anwendung weissen Lichtes, eine grosse bei Anwendung vollkommen homogenen Lichtes.

Die folgende Tafel enthält die Farbenfolge, welche dünne Luftlamellen bei wachsender Dicke zeigen, nach Brücke und Wertheim[1]).

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.*, 1854.

Newton'sch

Farben, welche eine Luftschichte für senkrecht auffallende Strahle

Ord-nung	Ring	Nr.	Luftdicke in 0,000001 mm	Reflectirte Farben	Durchgelassene Fark
		1	0	Schwarz	Weiss
		2	20	Eisengrau	Weiss
		3	48,5	Lavendelgrau	Gelblich Weiss
		4	79	Graublau	Bräunlich Weiss
	1	5	109	Klares Grau	Gelbbraun
		6	117	Grünlich Weiss	Braun
		7	129,5	Fast rein Weiss	Klares Roth
		8	133,5	Gelblich Weiss	Carminroth
1		9	$\frac{\lambda}{4}$ 137,5	Blasses Strohgelb	Dunkel Rothbrau
		10	140,5	Strohgelb	Dunkel Violett
		11	153	Klares Gelb	Indigo
		12	166	Lebhaftes Gelb	Blau
	2	13	215	Braungelb	Blaugrau
		14	252,5	Röthlich Orange	Bläulich Grün
		15	268	Warmes Roth	Blasses Grün
		16	$\frac{2\lambda}{4}$ 275,5	Tieferes Roth	Gelblich Grün
		17	282,5	Purpur	Helleres Grün
		18	287,5	Violett	Grünlich Gelb
		19	294,5	Indigo	Goldgelb
	3	20	332	Himmelblau	Bronze
		21	364	Grünlich Blau	Bräunlich Orange
		22	373,5	Grün	Hell Carminroth
2		23	$\frac{3\lambda}{4}$ 413	Helleres Grün	Purpur
		24	421,5	Gelblich Grün	Violett Purpur
		25	433	Grünlich Gelb	Violett
		26	455	Reines Gelb	Indigo
	4	27	474	Orange	Dunkelblau
		28	499	Lebhaft röthlich Orange	Grünlich Blau
		29	$\frac{4\lambda}{4}$ 550,5	Dunkel Violett-Roth	Grün

Farbenringe.

…m reflectirten und durchgehenden Lichte zeigt ($\lambda = 0{,}0005506$ mm).

…rd- …ung	Ring	Nr.	Luftdicke in 0,000001 mm	Reflectirte Farben	Durchgelassene Farben
		30	564	Helles Bläulich-Violett	Gelblich Grün
		31	575,5	Indigo	Unreines Gelb
	5	32	629	Grünlich Blau	Fleischfarbe
		33	667	Meergrün	Braunroth
3		34	$\frac{5\lambda}{4}$ 688	Glänzendes Grün	Violett
		35	713	Grünlich Gelb	Graublau
		36	747,5	Fleischfarbe	Meergrün
	6	37	767	Carminroth	Schön Grün
		38	810,5	Matt Purpur	Matt Meergrün
		39	$\frac{6\lambda}{4}$ 826	Violett-Grau	Gelblich Grün
		40	841	Graublau	Grünlich Gelb
		41	835,5	Matt Meergrün	Gelbgrau
	7	42	872	Bläulich Grün	Malven-Grauroth
		43	905,5	Schön Hellgrün	Carminroth
4		44	$\frac{7\lambda}{4}$ 963,5	Hell Graugrün	Grauroth
	8	45	1003,5	Grau, fast Weiss	Graublau
		46	$\frac{8\lambda}{4}$ 1024	Fleischroth	Grün
5	9	47	$\frac{9\lambda}{4}$ 1169	Matt Blaugrün	Matt Fleischroth
	10	48	$\frac{10\lambda}{4}$ 1334	Matt Fleischroth	Matt Blaugrün

In derselben ist die Wellenlänge λ für mittlere gelbe oder weisse Strahlen gleich 0,0005506 mm genommen. Luftdicken, die Vielfache von $\frac{\lambda}{4}$ sind, begrenzen die einzelnen Farbengruppen, die den verschiedenen hellen und dunkeln Ringen entsprechen. Die Farben der ersten und zweiten Gruppe geben die Farben erster Ordnung u. s. w. Die Farbe ändert sich mit wachsender Luftdicke am schnellsten in der Nähe der Stellen, wo die Dicke ein gerades Vielfache von $\frac{\lambda}{4}$ ist, also in der Nähe der Grenzen der verschiedenen Ordnungen; daselbst finden sich also die sogenannten empfindlichen Farben, *teintes sensibles*.

Zerlegt man das von einem dünnen Blättchen kommende Licht spectral, so erscheinen in regelmässiger Folge gewisse Farben des Spectrums ausgelöscht. Die Zahl der verdunkelten Stellen wächst mit der Dicke des Blättchens, so dass zuletzt das Spectrum von zahlreichen regelmässig auf einander folgenden dunkeln Linien parallel den Fraunhofer'schen Linien durchzogen erscheint. Die Angabe der Lage dieser Minima im Spectrum liefert ein vorzügliches Mittel zur Definition der Interferenzfarben [1]).

33. Messung der Ringe.

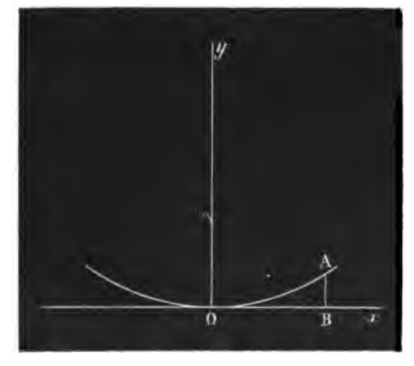
Es sei (Fig. 22) O der Contactpunkt der beiden Gläser, oy die Axe der Linse, OA, Ox die Flächen der Gläser, welche die Luftschicht begrenzen, R der Radius von OA. Man hat

$$AB : BO = BO : 2R - AB,$$

oder näherungsweise

$$AB : BO = BO : 2R.$$

Fig. 22.



Setzen wir $AB = e$, $OB = r$, so wird

$$e = \frac{r^2}{2R}.$$

Diese Gleichung giebt die Dicke der Luftschicht als Function des Radius des Ringes. Die Radien der Ringe maass Newton mit dem Zirkel. Um den aus der Brechung der Strahlen beim Durchgange durch die Linse entspringenden Fehler möglichst zu reduciren, maass er die Durchmesser senkrecht zu der durch das Auge und die Mitte der Ringe gehenden

[1]) Rollet, Wien. Ber. 1877.

Verticalebene. Diese Methode führte bei der schiefen Incidenz zu merklich unrichtigen Resultaten.

Babinet maass die Durchmesser der Ringe mit Hülfe eines an der Innenseite des Planglases angebrachten Netzes feiner, äquidistanter Linien, auf welches sich die Ringe projicirten.

Bei den Versuchen von Provostaye und Desains[1] wurde das Farbenglas auf einer horizontalen Kupferplatte befestigt, welche durch eine Mikrometerschraube in horizontaler Richtung bewegt werden konnte. Die Ringe wurden mittelst eines Fernrohres betrachtet, welches in einer Verticalebene senkrecht zur Richtung der Mikrometerschraube beweglich war. Es wurde zuerst das Fadenkreuz auf den Mittelpunkt der Ringe eingestellt, dann das Farbenglas mit Hülfe der Schraube verschoben, bis das Fadenkreuz mit einem Punkte eines Ringes zusammenfiel, dessen Radius bestimmt werden sollte. Dies geschah durch Ablesung an der Mikrometerschraube. Hier ist keinerlei Correction wegen der Strahlenbrechung im Glase nöthig, wenn die obere Fläche der Linse eben ist. Der Winkel zwischen der Axe des Fernrohres und der Verticalen oder der Austrittswinkel der Strahlen kann durch Aenderung der Entfernung des Fernrohres von der Mikrometerschraube variirt werden und ist dem Incidenzwinkel gleich. Bei beträchtlich schiefer Incidenz müssen die an der äusseren Fläche der Linse reflectirten Strahlen durch einen Schirm abgehalten werden.

34. Gesetze.

Newton maass bei Anwendung weissen Lichtes und bei normaler Incidenz die Durchmesser der Ringe in der oben angegebenen Weise und fand: die Quadrate der Durchmesser der dunkeln Ringe im reflectirten Lichte verhalten sich wie die geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, 8, . . . (den Mittelpunkt als den ersten dunkeln Ring gerechnet), die Quadrate der Durchmesser der hellen Ringe wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, . . . Es folgt, dass die Fläche zwischen zwei Ringen constant ist und dass (34) die den hellen Ringen entsprechenden Werthe der Dicke des Blättchens sich wie die ungeraden, die den dunkeln Ringen entsprechenden wie die geraden Zahlen verhalten. Diese Gesetze lassen sich besser unter Anwendung homogenen Lichtes nachweisen. Wiederholt man die Messungen für die verschiedenen einfachen Lichtgattungen, so zeigt sich, dass die Durchmesser der Ringe in dem Maasse an Grösse zunehmen, als man von Violett gegen Roth fortschreitet, also dass die Durchmesser der Ringe mit der Wellenlänge an Grösse zunehmen.

Fresnel verglich die von Newton gefundenen Werthe der den einzelnen Ringen entsprechenden Dicke der Luftschicht mit der von

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXVII, 423.



ihm durch den Spiegelversuch für rothes Licht bestimmten Wellenlänge und fand, dass bei normaler Incidenz die hellen Ringe Stellen entsprechen, deren Dicke ein ungerades Vielfache einer Viertel-Wellenlänge, die dunkeln Ringe Stellen, deren Dicke ein gerades Vielfache einer Viertel-Wellenlänge beträgt; oder mit anderen Worten, dass der im Blättchen zurückgelegte Weg für die hellen Ringe eine ungerade Zahl, für die dunkeln Ringe eine gerade Zahl halber Wellenlängen beträgt.

Die Erscheinung der Ringe bei weissem Lichte lässt sich aus der Superposition der den einzelnen einfachen Farben entsprechenden Ringsysteme ableiten.

Bei der schiefen Incidenz erkannte Newton das Gesetz, dass die einem Ringe reflectirten Lichtes von bestimmter Ordnungszahl entsprechende Dicke der Luftschicht im geraden Verhältnisse zur Secante des Incidenzwinkels steht, d.i. des Einfallswinkels, unter welchem der Strahl die zweite Begrenzungsfläche der Luftschicht trifft. Dieses Gesetz wird das Secantengesetz genannt. Newton glaubte auf Grund ungenauer Messungen, dass dieses Gesetz nur für Incidenzen gelte, welche kleiner sind als 50^0, und gab für grössere Incidenzen eine complicirte empirische Formel. Die genaueren Messungen von Provostaye und Desains (33), welche die Incidenzen bis zu 85^0 21′ ausdehnten, haben jedoch gezeigt, dass das Gesetz in Uebereinstimmung mit der Undulationstheorie für alle Incidenzen gilt.

Provostaye und Desains[1]) fanden bei einer Incidenz von 85^0 21′ für den siebenten Ring einen Durchmesser = 4753, während das Secantengesetz 4755, und die Newton'sche Formel 4011 verlangen. Es wurde hierdurch eine Schwierigkeit beseitigt, welche von J. Herschel[2]) für ein schwerwiegendes Argument gegen die Undulationstheorie gehalten wurde, und welche Fresnel dahin führte, anzunehmen, dass das Brechungsgesetz bei sehr schiefer Incidenz Modificationen unterliege[3]). Sind die Krümmungen der Linse, welche den oberen Theil des Farbenglases bildet, sehr gering, so kann der Winkel der Incidenz mit dem Winkel identificirt werden, welchen der austretende Strahl mit der Verticalen bildet. Um das Secantengesetz zu prüfen, reicht es dann hin, diesen letzteren Winkel zu messen, d. i. bei der Versuchsanordnung von Provostaye und Desains (33) den Winkel, welchen die Axe des Fernrohres mit der Verticalen bildet.

Die Ringe durchgelassenen Lichtes sind für jede Incidenz complementär zu den Ringen reflectirten Lichtes. Dies wird nach Arago durch das folgende Experiment bewiesen. Man bringt das Farbenglas in eine solche Lage gegen eine gleichmässig erhellte weisse Wand, dass die Axe des Glases der Wand parallel ist: Die Ringe verschwinden vollständig, um wieder zu erscheinen, wenn man die durchgehenden Strahlen

1) Pogg. 1849. — 2) *Phil. trans.*, 1807, 180; 1809, 259; 1810, 149. — 3) *Mémoire couronné sur la diffraction.*

durch einen zwischen der Wand und dem Glase angebrachten Schirm aufhält[1]).

Ein letztes Gesetz bezieht sich auf die Abhängigkeit der Ringe von der Substanz des dünnen Blättchens. Indem Newton an die Stelle der Luft Wasser setzte, fand er die einem Ringe reflectirten Lichtes von bestimmter Ordnungszahl bei ungeänderter Incidenz entsprechende Dicke des Blättchens dem Brechungsexponenten der Substanz des Blättchens verkehrt proportional. Dieses Gesetz hat eine theoretisch wichtige Consequenz; es beweist, dass die Wellenlänge und in Folge der Gleichung

$$\lambda = VT$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in optisch dichtere Medien geringer sind. Wir haben dieselbe Folgerung schon aus der Erscheinung der Verschiebung der Interferenzstreifen bei Interposition einer durchsichtigen Platte gezogen (23).

Die Abhängigkeit der Durchmesser der Ringe vom Brechungsexponenten wurde von W. Wernicke zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Substanzen benutzt, welche nur in sehr dünnen Schichten durchsichtig sind[2]), die Abhängigkeit der Lage der Interferenzcurven von der Gestalt der Begrenzungsflächen der Lamelle von A. Cornu[3]) zur Bestimmung der Deformation der Oberflächen fester elastischer Körper durch einwirkende Kräfte. Ein Glasprisma von rechteckigem Querschnitt ward symmetrisch auf zwei Stützen gelegt und an den Enden mit gleichen Gewichten belastet. Dadurch bogen sich die obere und untere Fläche. Lässt man nun verticale Lichtstrahlen durch eine horizontale Glasplatte auf die obere Fläche fallen, so interferiren die an der unteren Fläche der Glasplatte und an der oberen des Prisma reflectirten Strahlen längs Linien, in denen ein System horizontaler Ebenen im Abstande einer halben Wellenlänge die krumme Fläche schneidet. Die Curven in der Nähe des Berührungspunktes der beiden Glasplatten können daher angesehen werden als Kegelschnitte, welche identisch sind mit dem Dupin'schen Kegelschnitte, welcher die Krümmung der gebogenen Glasfläche in diesem Punkte anzeigt. Cornu hat zur Ausführung der Messung die Interferenzcurven photographirt. Als Lichtquelle dienten Inductionsfunken, die zwischen Magnesiumpolen übersprangen ($\lambda = 0{,}000383$ mm). Hierbei konnten Interferenzstreifen bei einem Gangunterschiede von mehr als 1000 Wellenlängen wahrgenommen werden.

Auf der Abhängigkeit der Ringe von der gegenseitigen Entfernung der beiden Platten des Farbenglases beruht ein von Jerichau[4]) angegebenes Thermomikrometer. Das bewegliche Ende eines sich durch Erwärmung ausdehnenden festen Körpers befindet sich in fester Verbindung

[1]) *OEuvres complètes,* X, 16. — [2]) Pogg. CXXXIX, 132. — [3]) C. R. LXIX. — [4]) Pogg. 1841.

mit einem der beiden Gläser. Die Ausdehnung oder Zusammenziehung des thermometrischen Körpers bewirkt eine Variation der gegenseitigen Entfernung der Gläser und erscheint in der Bewegung der Ringe ausserordentlich vergrössert.

35. Theorie der Anwandlungen.

Newton verwarf die Undulationstheorie, welche zu seiner Zeit weder die Erscheinungen der Polarisation, noch die einfachsten Erscheinungen der Lichtfortpflanzung zu erklären vermochte, da das Princip der Interferenz und dasjenige der Transversalität der Lichtschwingungen noch fehlten (10, 11, 13, 15).

Er erklärte die Farben dünner Blättchen aus der von ihm adoptirten Emissionstheorie und stellte die Hypothese auf, dass die Brechung den Lichtmolecülen eine periodisch wechselnde Disposition bald für Reflexion, bald für Brechung verleihe, und dass die Dauer der Periode von der Farbe des Lichtes abhänge; er war ausserdem durch den Umstand, dass sich die Erscheinung nur an sehr dünnen Blättchen zeigt, genöthigt, anzunehmen, dass dieser Zustand der Lichtmolecüle nur kurze Dauer habe. Je nach der Dicke des Blättchens wird ein Molecül, welches an die zweite Begrenzungsfläche gelangt, zur Reflexion oder zur Brechung disponirt sein. Bei einer gewissen Dicke des Blättchens wird der an der zweiten Fläche reflectirte Strahl den an der ersten reflectirten verstärken und es wird ein Maximum der Intensität wahrgenommen werden; bei einer anderen Dicke wird der an der zweiten Fläche reflectirte Strahl fehlen und es wird ein Minimum der Intensität entstehen. Dies ist die Grundidee der Theorie Newton's.

Nach dieser Theorie entstehen also die Minima der Intensität durch das an der ersten Begrenzungsfläche reflectirte Licht allein, die Maxima der Intensität durch die Summe des an der ersten und zweiten Begrenzungsfläche reflectirten Lichtes.

Newton suchte die Ursache der periodischen Disposition der Lichtmolecüle, in ein neues Medium einzutreten oder an demselben reflectirt zu werden, in einer Wellenbewegung des Aethers des dünnen Blättchens, hervorgerufen durch den Stoss des Lichtmolecüls an der ersten Begrenzungsfläche des Blättchens. Später hat Roscovich[1]) eine Polarität der Lichtmolecüle angenommen, verbunden mit einer Rotationsbewegung, in Folge deren sie der reflectirenden Fläche abwechselnd verschiedene Seiten zukehren. In ähnlicher Weise hat Biot die Theorie in seinem Jahrbuche der Physik (IV, 1) dargestellt.

Nach Newton's Theorie müssten die Minima im reflectirten Lichte nicht eine Intensität gleich Null, sondern die Intensität des an der ersten Begrenzungsfläche des Blättchens reflectirten Lichtes haben.

---

[1]) *Philosophiae naturalis theoria; Venetiae* 1758.

Fresnel hat Newton's Theorie widerlegt, indem er zeigte, dass die dunkeln Ringe im reflectirten Lichte vollkommen dunkel sind.

Das Experiment ist folgendes: man gebe der Linse eine solche Lage, dass ihr Berührungspunkt mit dem Planglase in die Nähe des Randes des letzteren fällt; man sieht dann unvollständige Ringe und kann sich überzeugen, dass die dunkeln Ringe eine geringere Intensität zeigen, als die Theile der Linse, welche über das Planglas hinausragen; erscheinen also die dunkeln Ringe dunkler als das an der ersten Begrenzungsfläche des Blättchens reflectirte Licht, so können sie nicht von der Abwesenheit des an der zweiten Begrenzungsfläche reflectirten Lichtes allein herrühren.

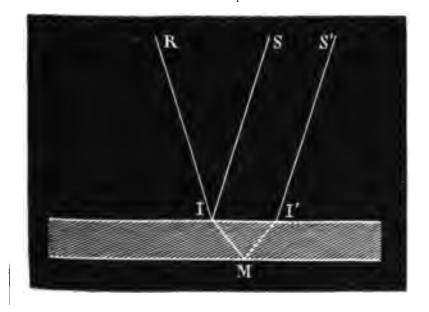
Ein zweiter, von Fresnel herrührender, gewichtiger Einwurf gegen die Anwandlungstheorie ist der folgende: da man nicht annehmen kann, dass die Dispositionen der Molecüle zur Reflexion plötzlich in die zur Brechung übergehen, vielmehr ein allmäliger Uebergang angenommen werden muss, und da die Brechung in der Emissionstheorie einer anziehenden Kraft zugeschrieben wird, so müsste die Grösse dieser Kraft, und folglich der Brechungsindex von der Phase abhängen, in welcher sich das Molecül befindet, wenn es die Hinterfläche des Blättchens trifft.

36. Erklärung der Ringe bei normaler Incidenz.

Die Undulationstheorie gestattet in einfacher Weise, mit Hülfe der Interferenzen, das Phänomen der Newton'schen Ringe zu erklären.

Betrachten wir zunächst die Ringe reflectirten Lichtes bei normaler Incidenz, und bemerken wir, dass in der Nähe des Contactpunktes die Begrenzungsflächen des dünnen Blättchens ohne merklichen Fehler als parallel angesehen werden können.

Fig. 23.



Sei (Fig. 23) SI ein nahezu senkrecht einfallender Strahl; derselbe wird an der Vorderfläche des Blättchens nach IR reflectirt, wo er mit einem Strahle zusammentrifft, welcher an der zweiten Begrenzungsfläche des Blättchens bei M reflectirt wird. Die Wegdifferenz der beiden sich längs IR fortpflanzenden Strahlen ist bei nahezu normaler Incidenz merklich gleich der doppelten Dicke des Blättchens. Es scheint also, dass eine gegenseitige Verstärkung oder Schwächung durch Interferenz eintreten müsse, je nachdem die Dicke des Plättchens e

$$e = 2n \frac{\lambda}{4}$$

oder

$$e = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

In Wirklichkeit findet jedoch das Gegentheil statt. Will man also mit den Erscheinungen in Uebereinstimmung bleiben, so muss man dem sich aus den durchlaufenen Wegen ergebenden Gangunterschied der Strahlen eine halbe Welle hinzufügen. Um dies zu erklären, bemerkt Young, dass die beiden Reflexionen unter wesentlich verschiedenen Bedingungen vor sich gehen; die eine derselben findet an einem optisch dichteren, die andere an einem optisch dünneren Medium statt. Man nimmt nun an, dass eine der beiden Reflexionen mit dem Verluste einer halben Wellenlänge verbunden ist, und zwar nach Analogie mit der Erscheinung des Stosses elastischer Kugeln, dass dies bei der Reflexion vom optisch dichteren Medium stattfinde.

Um diese seine Hypothese durch ein Experiment zu stützen, hat Young einen bemerkenswerthen Versuch angestellt (13). Als zwischen eine Crownglaslinse und eine Flintglasplatte eine Flüssigkeit gebracht wurde, deren Brechungsindex zwischen jenem des Crown- und des Flintglases liegt, erschienen die Ringe reflectirten Lichtes in der Mitte hell, diejenigen durchgelassenen Lichtes in der Mitte dunkel. Besteht die Platte zur Hälfte aus Crown-, zur Hälfte aus Flintglas, so erscheint das Centrum des Phänomens im reflectirten Lichte auf der Seite des Flintglases weiss, auf der Seite des Crownglases schwarz und jeder Ring besteht aus einem hellen und einem dunkeln Halbringe. Ist die Substanz des dünnen Blättchens optisch dichter, als die der begrenzenden Körper, so müssen die Ringe reflectirten Lichtes im Centrum schwarz zeigen, denn die beiden Reflexionen sind von verschiedener Gattung. Auch diese Consequenz der Theorie fand Arago bestätigt, als er zwischen eine Linse aus Crownglas und ein Prisma aus Flintglas Cassiaöl brachte.

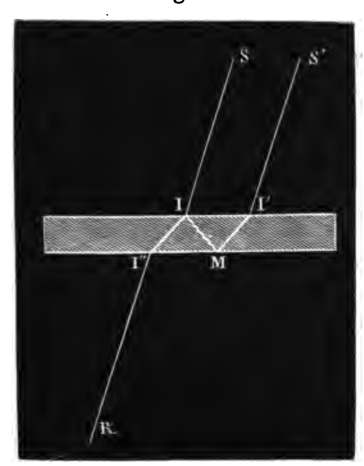
Man hat also der Differenz der von den beiden Strahlen durchlaufenen Wege eine halbe Wellenlänge hinzuzufügen oder nicht, je nachdem die beiden Reflexionen verschiedener oder gleicher Art sind. Wir wollen dies für jetzt als eine sich aus den Beobachtungen ergebende Consequenz nehmen und später auf die Theorie des Gegenstandes zurückkommen.

Betrachten wir nun die Ringe durchgelassenen Lichtes. Sie entstehen durch Interferenz von Strahlen, welche direct durch das Blättchen gehen, und Strahlen, welche im Innern desselben zweimal reflectirt werden (Fig. 24). Bei normaler Incidenz ist die Wegdifferenz gleich der doppelten Dicke des Blättchens. Ist der Brechungsindex des Blättchens grösser oder kleiner, als die der begrenzenden Körper, so sind die beiden Reflexionen gleicher Art, liegt der Brechungsindex des Blättchens der Grösse nach zwischen jenen der begrenzenden Körper, so sind die beiden

Reflexionen verschiedener Art, und es folgt also, wie man sieht, aus unserer Theorie im Einklange mit den Resultaten des Versuches, dass die Ringe durchgelassenen Lichtes unter allen Umständen zu jenen reflectirten Lichtes complementär sind.

Es bleibt zu erklären, warum die reflectirten Ringe sichtbarer sind, als die durchgelassenen. Es wird dies begreiflich, wenn man bedenkt, dass unter den gegebenen Bedingungen eine Reflexion mit einem grossen, eine Brechung mit einem geringen Intensitätsverluste verbunden ist. Betrachten wir zunächst die Ringe reflectirten Lichtes. Von den beiden interferirenden Strahlen hat der erste eine Reflexion, der zweite eine Reflexion und zwei Brechungen erlitten. Der Intensitätsunterschied ist gering und die Minima sind nahe gleich Null.

Fig. 24.



Anders verhält es sich bei den Ringen durchgelassenen Lichtes, wo einer der beiden interferirenden Strahlen zwei Reflexionen mehr erleidet, als der andere. Hier sind die Intensitäten der interferirenden Strahlen merklich ungleich und die Intensität der Minima bleibt eine beträchtliche.

Mit Hülfe der eben aufgestellten Gleichung

$$e = 2n\frac{\lambda}{4}$$

kann λ berechnet werden, wenn e bekannt ist. Die Wellenlängen, welche sich in dieser Weise für die Hauptfarben ergeben, stimmen mit den Resultaten überein, welche durch den Fresnel'schen Spiegelversuch erhalten werden (21).

Desains[1]) verband eines der beiden Gläser des Newton'schen Apparates zur Hervorbringung der Ringe mit einer Mikrometerschraube, so dass durch die Bewegung der Schraube, während eines der Gläser in Ruhe blieb, das andere in der Richtung der Axe der Gläser bewegt werden konnte. Mit Hülfe dieser Schraube konnte also die Dicke der Luftlamelle zwischen den Gläsern allmälig vergrössert werden. Hierbei ziehen sich die Ringe zusammen, um im Centrum zu verschwinden, während an der Peripherie des Glases neue Ringe entstehen. Ist der $n$te Ring im Centrum verschwunden, so beträgt die Bewegung des Glases oder der Schraube

---

1) C. R. LXXVIII.

$$n \frac{\lambda}{2}.$$

Für die nächsten und alle folgenden n Ringe muss die Drehung der Schraube genau dieselbe sein, woran man die Richtigkeit der Schraube mit grosser Genauigkeit prüfen kann. Desains fand bei Anwendung von Natrium-Licht für $n = 60$ eine Drehung der Schraube gleich 12,85 Grad. Die Ganghöhe der Schraube betrug 0,5 mm. Hieraus ergiebt sich

$$60 \cdot \frac{\lambda}{2} = 0{,}5 \text{ mm} \cdot \frac{12{,}85}{360}$$
$$\lambda = 0{,}000594 \text{ mm}.$$

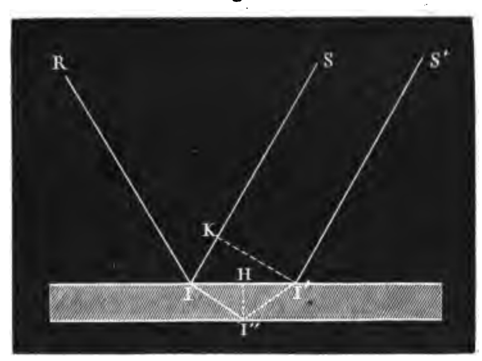
Sind x_n und x_{n+1} die Radien des $n$ten und $n+1$ten Ringes und R der Radius des convexen Glases, so hat man

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = R\lambda.$$

37. Erklärung der Ringe bei schiefer Incidenz.

Wir betrachten zunächst die Erscheinung im reflectirten Lichte (Fig. 25). Längs IR pflanzen sich die Strahlen SIK und $S'I'I''IR$ fort, um deren Interferenz es sich handelt. Wir sehen das Blättchen zwischen I und I' als gleichmässig dick an, ziehen $I'K$ senkrecht auf SI, bezeichnen durch $I''H = e$ die Dicke des Blättchens, durch v und u die Lichtgeschwindigkeiten in der Substanz des Blättchens und in der Substanz der begrenzenden Körper, durch T die Schwingungsdauer des Lichtes, durch m eine ganze Zahl, durch i den Incidenzwinkel $HI''I$, durch λ die Wellenlänge im Blättchen und durch n den Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus der Substanz des Blättchens in die der begrenzenden Körper.

Fig. 25.



Die Strahlen SI und $S'I'$ langen gleichzeitig in K und I' an. Bis zu ihrer Vereinigung in I beschreibt dann der eine Strahl den Weg KI mit der Geschwindigkeit u, der andere den Weg $I'I''I$ mit der Geschwindigkeit v. Die hierdurch zwischen den beiden Strahlen entstehende Zeitdifferenz ist

$$\frac{I'I'' + I''I}{v} - \frac{KI}{u}.$$

Sind die beiden Reflexionen ungleichartig, so muss eine halbe Schwingungsdauer hinzugefügt werden. Die beiden interferirenden Strahlen werden sich also verstärken oder zerstören, je nachdem

$$\frac{I'I'' + I''I}{v} + \frac{T}{2} - \frac{KI}{u} = 2m\frac{T}{2}$$

oder

$$\frac{I'I'' + I''I}{v} + \frac{T}{2} - \frac{KI}{u} = (2m + 1)\frac{T}{2}.$$

Nun ist:

$$I'I'' = I''I = \frac{e}{\cos i}$$

$$KI = II' \sin KI'I$$

$$\frac{\sin i}{\sin KI'I} = n$$

$$KI = II' \frac{\sin i}{n}$$

$$II' = 2IH = 2e \operatorname{tang} i$$

$$KI = \frac{2e \operatorname{tang} i \sin i}{n}.$$

Es folgt für die hellen Ringe

$$\frac{2e}{\cos i} - \frac{v}{nu} 2e \operatorname{tang} i \sin i = (2m - 1)\frac{\lambda}{2},$$

und für die dunkeln

$$\frac{2e}{\cos i} - \frac{v}{nu} 2e \operatorname{tang} i \sin i = 2m\frac{\lambda}{2}.$$

Bezeichnen wir durch E die Dicke des Blättchens, welche bei normaler Incidenz dem $m$ten hellen oder dem $m$ten dunkeln Ringe entspricht, deren Doppeltes also gleich $(2m - 1)\frac{\lambda}{2}$ oder $2m\frac{\lambda}{2}$ ist, und nehmen wir an, dass e demselben Ringe bei der Incidenz i entspreche, so geben die Messungen von Provostaye und Desains oder Newton's Secantengesetz (34):

$$e = \frac{E}{\cos i}.$$

Soll also die oben gefundene Gleichung mit dem Experimente übereinstimmen, so muss

$$2e \cos i = 2E = \frac{2e}{\cos i} - \frac{v}{nu} 2e \operatorname{tang} i \sin i.$$

Diese Gleichung lässt sich aber auch schreiben

$$1 = \frac{1}{\cos^2 i} - \frac{v}{nu} \tan g^2 i$$

oder

$$\sin^2 i \left(1 - \frac{v}{nu}\right) = 0$$

oder

$$\frac{v}{u} = n.$$

Die Theorie der Farbenringe führt uns also auf anderem Wege zu dem schon erkannten Satze, dass der Brechungsexponent dem Verhältnisse der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien gleich ist.

Die eben gegebene Berechnung setzt voraus, dass der obere der beiden das Blättchen begrenzenden Körper unendlich ausgedehnt sei. Doch lässt sich dieselbe ohne Modification auf den gewöhnlicheren Fall übertragen, wo der obere der beiden begrenzenden Körper eine Linse ist, welche von den Strahlen unter beliebiger Incidenz getroffen wird. Um dies zu begreifen, hat man sich die in (24) erhaltenen Resultate zu vergegenwärtigen, nach welchen die von einem Punkte kommenden, sich im Innern der Linse fortpflanzenden Strahlen von Normalflächen geschnitten werden, welche von sämmtlichen Strahlen gleichzeitig erreicht werden. Man hat sich dann in Fig. 25 unter $I'K$ ein Element einer solchen Normalfläche zu denken, welche von den Strahlen SK und $S'I'$ gleichzeitig erreicht wird.

Die Theorie der durchgelassenen Ringe bei schiefer Incidenz ist derjenigen der reflectirten Ringe analog.

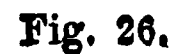
Aus den gegebenen Entwickelungen geht hervor, dass die Dicke des Blättchens, welche einem Ringe von bestimmter Ordnung entspricht, der Wellenlänge in der Substanz des Blättchens, also auch der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in derselben proportional ist. Dies steht in Uebereinstimmung mit den Experimenten Newton's, welcher fand, dass jene Dicke dem Brechungsindex des Blättchens verkehrt proportional ist.

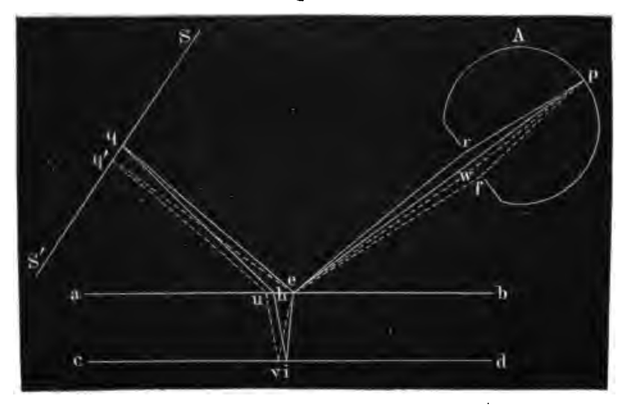
38. Näheres über den Gang der Strahlen.

Zur Beobachtung der Ringe am Farbenglase kann eine ausgedehnte Lichtquelle, z. B. eine Salzflamme, dienen, welche in endlicher Entfernung angebracht ist. Auge, Mikroskop oder Fernrohr werden auf einen Punkt der dem Auge zugewendeten Begrenzungsfläche des Blättchens eingestellt. Die Erfahrung lehrt, dass die Ringe um so undeutlicher werden, je mehr man sich von dieser Einstellung entfernt.

Sei (Fig 26) die Lichtquelle eine leuchtende Fläche SS' und das Auge A auf den Punkt e der Lamelle $abcd$ eingestellt. Von diesem

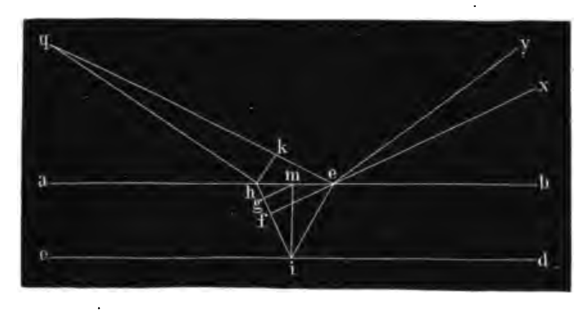
Punkte gelangt der Strahl *qep* ins Auge und nur noch ein von *q* ausgehender Strahl *qhierp*, wenn auf die wiederholten Reflexionen keine Rücksicht genommen wird. Diese beiden von demselben leuchtenden Punkte *q* kommenden Strahlen (28) treffen sich im Punkte *p* der Retina,


Fig. 26.



um daselbst zu interferiren; und zwar ist die Phasendifferenz der Strahlen in *p* dieselbe wie in *e* (24). Das Auge nimmt also in *e* einen Grad der Helligkeit wahr, welcher von der Phasendifferenz der Strahlen *qe* und *qhie* in *e* abhängt. Zwar gelangen wegen der Grösse der Pupille auch noch andere Strahlenpaare nach *p*, wie *q'efp* und *q'uvewp*, deren Gangunterschied ein etwas anderer sein muss, so dass die Reinheit des Phänomens gestört erscheinen könnte. Der Versuch lehrt jedoch, dass die Differenz der beiden Gangunterschiede in den gewöhnlichen Fällen nicht hinreichend ist, um eine solche Störung zu bewirken. Wir verweisen übrigen auf die folgende Betrachtung.

Fig. 27.



Es sei (Fig. 27) *qex* der an der Vorderfläche des Blättchens und *qhiey* der an der Hinterfläche reflectirte Strahl. Die Wegdifferenz der interferirenden Strahlen *ex* und *ey*, bezogen auf die Substanz des Blättchens, ist, da die Wege *ke* und *hf* gleichzeitig zurückgelegt werden,

$$fi + ie = fi + hi$$
$$= 2gi$$
$$= 2e \, . \cos i,$$

wenn durch e und i die Dicke des Blättchens und der Incidenzwinkel him bezeichnet werden. Ist ferner n der Brechungsexponent des Blättchens, so ist die Wegdifferenz der beiden Strahlen, bezogen auf das äussere Medium,

$$2ne \cos i,$$

und der Gangunterschied oder die Zahl der Wellen in Luft, um welche die Strahlen differiren,

$$\frac{2en \cos i}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

Fassen wir nun ein anderes Strahlenpaar ins Auge, welches von einem dem Punkte q benachbarten Punkte q' der Lichtquelle kommt, durch e geht und dieselbe Stelle der Netzhaut trifft, wie das früher betrachtete.

Es werden nun die Strahlen jedes Paares unter einander, nicht aber Strahlen verschiedener Paare interferiren, vielmehr wird eine einfache Summation der Helligkeiten sämmtlicher Strahlenpaare stattfinden (28) und das Phänomen wird verschwinden, wenn die Gangunterschiede der einzelnen Strahlenpaare aufhören, merklich dieselben zu sein. Dem zweiten Paare kommt ein Gangunterschied zu gleich

$$\frac{2en \cos i'}{\lambda} + \frac{1}{2},$$

und es ergiebt sich hieraus für die Differenz der beiden Gangunterschiede

$$\frac{2en}{\lambda} (\cos i - \cos i').$$

Nehmen wir die normale Incidenz an, so ist die Differenz der Gangunterschiede der beiden Strahlenpaare

$$\frac{2en}{\lambda} (1 - \cos i') = \frac{en}{\lambda} \cdot i'^2$$

und ist α der scheinbare Radius der Pupille vom fixirten Punkte der Lamelle aus gesehen, so ist für die denkbar grösste Differenz der Gangunterschiede

$$\sin \alpha = n \sin i',$$

also die Differenz der Gangunterschiede

$$\frac{e\alpha^2}{\lambda n} = \frac{k\alpha^2}{2n^2},$$

wenn für die dem $k$ten hellen Ringe entsprechende Lamellendicke

$$e = \frac{k\lambda}{2n}$$

gesetzt wird. Beispielsweise beträgt für

$$k = 40000$$
$$n = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{200}$$

die grösste Differenz der Gangunterschiede nach der obigen Formel $\frac{1}{2}$ Wellenlänge. Auf diese Trübung des Phänomens durch den Einfluss des Durchmessers der Pupille bezieht sich wohl eine Aeusserung E. B. Jerichau's[1]), welcher sagt, man sehe bei Anwendung der Salzflamme mit dem Mikroskope nur eine geringe Zahl Ringe, da dieses die dunkeln Ringe zunehmend heller zeigt.

Auch scheint es nicht unwichtig, dieses Resultat gegen Fizeau's Versuch (30) zu halten.

Beim Newton'schen Farbenglase ist durch die Krümmung der Linsen eine Complication eingeführt, obgleich man annimmt, dass jedes sehr kleine Stück der Luftlamelle als planparallel begrenzt angesehen werden kann. In der That haben die Rechnungen von A. Wangerin[2]) gezeigt, dass diese Voraussetzung in den gewöhnlichen Fällen zutrifft.

Wir fanden oben für die Wegdifferenz der interferirenden Strahlen

$$2\,e\,\cos i.$$

Dieselbe Wegdifferenz ist bei normaler Incidenz für eine andere Lamellendicke E vorhanden, so dass

$$2\,E = 2\,e\,\cos i$$

oder

$$e = \frac{E}{\cos i},$$

das von Newton entdeckte Secantengesetz (37).

39. Einfluss der wiederholten Reflexionen.

Poisson[3]) hat auf die Unvollständigkeit der gegebenen Theorie der Newton'schen Ringe aufmerksam gemacht. In jeder Richtung, wie IR (Fig. 28), pflanzen sich in der That ausser den beiden schon in Betracht gezogenen Strahlen noch zahlreiche andere Strahlen fort, welche im Inneren des Blättchens eine ungerade Zahl Reflexionen erfahren haben. Ebenso pflanzen sich längs einer Richtung, $I_1 R_1$, Strahlen fort,

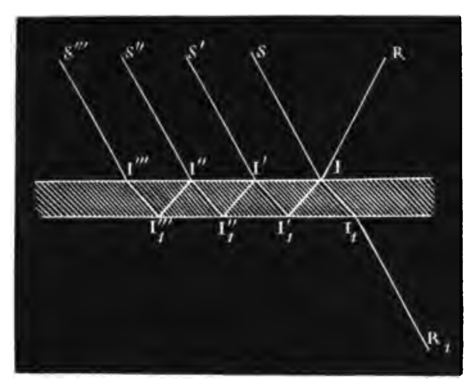
[1]) Pogg. 1841. — [2]) Pogg. CXXXI. — [3]) *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXII, 337.

welche im Inneren des Blättchens eine gerade Zahl von Reflexionen erfahren.

Die Intensität der Strahlen nimmt mit wachsender Zahl der Reflexionen ab und kann daher die Zahl der sich längs IR oder $I_1 R_1$ fortpflanzenden Strahlen als unendlich gross angesehen werden.

Fresnel[1]) hat gezeigt, dass nach der Interferenztheorie durch die mehrfach reflectirten Strahlen die Lage der Maxima und Minima nicht geändert werden kann und dass sich für die reflectirten Minima, wie es das Experiment verlangt, die Intensität Null ergiebt. Seine Theorie beruht auf den folgenden zwei Voraussetzungen:

Fig. 28.



1. Die Intensität des einfallenden Lichtes ist die Summe der Intensitäten des reflectirten und des gebrochenen Lichtes.

2. Die reflectirten und durchgelassenen Ringe sind complementär.

Gehen wir von diesen beiden Voraussetzungen aus, welche als experimentell erwiesen gelten können, und betrachten wir zunächst die Strahlen, welche sich längs IR fortpflanzen, indem wir annehmen, dass der Punkt I nach der Theorie, welche nur zwei Strahlen berücksichtigt, einem Minimum entspreche.

Die Geschwindigkeit der Vibrationsbewegung ist eine periodische Function der Zeit, $F(t)$, multiplicirt mit einem Coëfficienten (17). Setzen wir den Coëfficienten der Geschwindigkeit für den einfallenden Strahl gleich 1 und nehmen wir an, dass derselbe bei der äusseren Reflexion am Blättchen im Verhältnisse $1 : m$, bei der Reflexion im Inneren des Blättchens im Verhältnisse $1 : m'$, beim Eintritte des Strahles in das Blättchen im Verhältnisse $1 : p$ und beim Austritte im Verhältnisse $1 : p'$ reducirt werden.

Die beiden Strahlen, welche auch die elementare Theorie in Rechnung zieht, SIR und $S'I'I_1'IR$, werden, da sie einem Minimum der Intensität entsprechen, in einem Punkte, g, der Geraden IR unter einer Zeitdifferenz von einer ungeraden Zahl halber Schwingungen anlangen, also die Vibrationsgeschwindigkeiten von einander zu subtrahiren sein. Diese Geschwindigkeiten sind bei Unterdrückung des constanten Factors $F(t)$ für den ersten Strahl m, für den zweiten $m'pp'$. Der dritte Strahl, $S''I''I_1''I'I_1' IR$, hat in g eine Vibrationsgeschwindigkeit m'^3pp',

1) *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXIII, 129.

und die Zeitdifferenz zwischen diesem und dem zweiten Strahle entspricht einer geraden Zahl halber Schwingungen, da der dritte Strahl drei mit Zeichenwechsel verbundene Reflexionen erfährt, der zweite Strahl nur eine. Die Vibrationsgeschwindigkeit des zweiten und dritten Strahles sind also zu addiren. In Verfolgung dieser Betrachtung ergiebt sich, dass der Geschwindigkeitscoëfficient der resultirenden Bewegung auf IR auszudrücken ist durch

$$m - (m'pp' + m'^3pp' + m'^5pp' + \ldots) = m - \frac{m'pp'}{1 - m'^2}.$$

Das Quadrat dieser Grösse misst die Intensität des längs IR reflectirten Lichtes.

Betrachten wir nun die durchgelassenen Strahlen, welche sich längs I_1R_1 fortpflanzen; die elementare Theorie verlangt hier ein Maximum, die Zeitdifferenz der Strahlen S, S' in einem Punkte von I_1R_1 beträgt ein gerades Vielfache einer halben Schwingungsdauer. Es befinden sich also sämmtliche längs I_1R_1 fortschreitende Strahlen der Phase nach in Uebereinstimmung, während ihre Geschwindigkeitscoëfficienten der Reihe nach pp', m'^2pp', $m'^4pp'_1 \ldots$ sind und der Geschwindigkeitscoëfficient der resultirenden Bewegung ist

$$\frac{pp'}{1 - m'^2}.$$

Das Quadrat dieses Grösse misst die Intensität des durchgelassenen, längs I_1R_1 fortgepflanzten Lichtes.

Aus der Annahme, dass die reflectirten und die durchgelassenen Ringe complementär sind, folgt nun

$$\left(m - \frac{m'pp'}{1 - m'^2}\right)^2 + \left(\frac{pp'}{1 - m'^2}\right)^2 = 1;$$

andererseits folgt aus der ersten der beiden von Fresnel zu Grunde gelegten Annahmen:

$$m^2 + p^2 = 1$$
$$m'^2 + p'^2 = 1,$$

also

$$\frac{pp'}{1 - m'^2} = \sqrt{\frac{1 - m^2}{1 - m'^2}}$$

und mit Rücksicht auf die frühere Gleichung:

$$\left(m - m'\sqrt{\frac{1 - m^2}{1 - m'^2}}\right)^2 + \frac{1 - m^2}{1 - m'^2} = 1$$

und

$$m = m'.$$

Die Intensität des reflectirten Lichtes war

$$\left(m - \frac{m' p p'}{1 - m'^2}\right)^2;$$

setzt man in diesen Ausdruck für m', p, p' die gefundenen Werthe, so wird derselbe gleich Null und es folgt, dass im reflectirten Lichte die Minima vollständig dunkel sind.

Anders verhält es sich mit den durchgelassenen Ringen. Die Maxima haben eine Intensität gleich 1; für die Minima erhalten wir einen Geschwindigkeitscoëfficienten gleich

$$pp' - m'^2 pp' + m'^4 pp' - m'^6 pp' + \dots,$$

oder

$$pp'(1 - m'^2 + m'^4 - m'^6 + \cdots) = \frac{pp'}{1 + m'^2}.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke für m', p, p' ihre Werthe und erheben wir ins Quadrat, so ergiebt sich für die Intensität der dunkeln Ringe durchgelassenen Lichtes

$$\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2,$$

eine Grösse, welche keineswegs der Null gleich ist. Die Minima der durchgelassenen Ringe sind also nicht völlig dunkel.

40. Consequenz in Bezug auf den mathematischen Ausdruck der Lichtbewegung.

Wird ein Bündel paralleler Lichtstrahlen von einem dünnen Blättchen reflectirt, so entspricht das reflectirte Bündel dem Resultate der Interferenz zweier im gleichen Raume fortschreitender Bündel. Werden die Vibrationsgeschwindigkeiten der beiden interferirenden Strahlen ausgedrückt durch (17):

$$v = A_1 \sin m(t + \Theta_1) + A_3 \sin 3m(t + \Theta_3) + A_5 \sin 5m(t + \Theta_5) + \cdots$$
$$v' = A_1 \sin m(t + \Theta_1 + \varphi) + A_3 \sin 3m(t + \Theta_3 + \varphi) + A_5 \sin 5m(t + \Theta_5 + \varphi) + \cdots$$

so ist die resultirende Geschwindigkeit

$$v + v'.$$

Wir haben keinen Grund anzunehmen, dass das reflectirte Licht sich vom einfallenden anders, als nach Intensität und Phase unterscheide, und nehmen daher an, dass der mathematische Ausdruck für die Bewegung des reflectirten Lichtes von derselben Form sein müsse, wie der des einfallenden.

Setzen wir nun

$$\varphi = \frac{\pi}{(2n + 1)m},$$

wo m irgend eine ganze Zahl ist, so fehlen in dem sich für $v + v'$ ergebenden Ausdrucke alle Glieder, deren Coëfficienten $A_{(2n+1)}$, $A_{3(2n+1)}$, $A_{5(2n+1)} \ldots$, allgemein $A_{(2k+1)(2n+1)}$ sind. Es würde also die resultirende Vibrationsbewegung durch eine Reihe ausgedrückt erscheinen, in welcher wenigstens für gewisse Gangunterschiede mehrere Glieder fehlen könnten, was mit unserer Voraussetzung nicht im Einklange steht. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, genügt es anzunehmen, dass die für die Geschwindigkeit der Vibrationsbewegung aufgestellte Reihe sich auf ihr erstes Glied reducire. Wir werden also in der Folge die Geschwindigkeit der Vibrationsbewegung durch die einfachere Gleichung

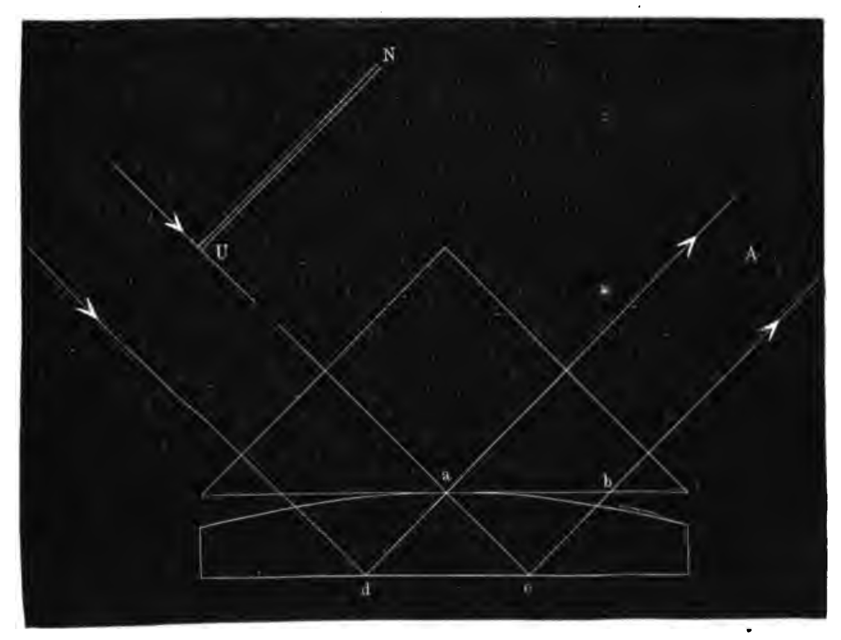
$$v = A \sin m\,(t + \Theta)$$

ausdrücken.

41. Nebenerscheinungen am Farbenglase.

Besteht das Farbenglas aus zwei schwachgekrümmten Platten oder einem Prisma und einer Platte (Fig. 21), so entstehen durch die Reflexionen im Inneren der Platten Modificationen der Erscheinung, welche durch Anwendung zweier Prismen vermieden werden können.

Fig. 29.

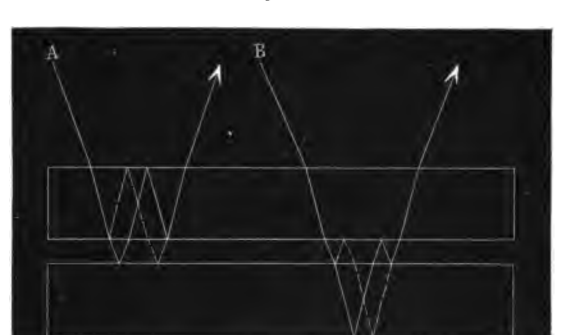


Bestehe beispielsweise das Farbenglas aus einer Platte und einem Prisma (Fig. 29). Das Auge A nimmt bei a das Centrum eines reflec-

tirten Ringsystems wahr und bei *b* das eines durchgelassenen in Folge der Reflexion bei *c*. Schiebt man den Schirm *MN* ein, so wäre zu erwarten, dass die dem Auge zugekehrten Hälften der Ringsysteme *a* und *b* verschwinden. Man wird aber finden, dass diese Hälften durch complementäre Halbringe ersetzt sind in Folge der Reflexion bei *d*, und man kann hieraus schliessen, dass auch das ursprünglich bei *a* wahrgenommene reflectirte Ringsystem einer Uebereinanderlagerung eines reflectirten und eines durchgelassenen Ringsystems entsprach.

Es entstehen also am Newton'schen Farbenglase in seiner gewöhnlichen Form durch die inneren Reflexionen zahlzeiche Ringsysteme,

Fig. 30.



und es findet unter Umständen auch eine gegenseitige Interferenz verschiedener Ringsysteme und in Folge dessen eine Bildung neuer Interferenzstreifen statt. Solcher Art sind die von J. Koox (1815) zuerst beobachteten und von V. D. Willegen[1]) zuerst berechneten Streifen, welche die Newton'schen Ringe senkrecht zu der durch das Auge gelegten Verticalebene durchschneiden. Sie entstehen durch Interferenz von Strahlen, welche (Fig. 30) Wege wie *A* oder *B* gehen.

42. Die Stefan'schen Nebenringe.

Das Newton'sche Farbenglas zeigt bei Anwendung weissen Lichtes nur eine geringe Zahl Streifen (22, 32).

Bedeckt man jedoch die Hälfte der Pupille mit einem Glimmerblättchen von etwa 0,05 mm Dicke, so gewahrt man auf der Seite des unbedeckten Auges entfernt von dem centralen Systeme ein System feiner Halbkreise, welche merklich zu demselben Centrum gehören, abwechselnd hell und dunkel sind und nur bei Anwendung sehr dünner Blättchen Farben zeigen.

[1]) Pogg. CXXIII.



Der Abstand des mittleren dieser Halbkreise ist proportional der Wurzel aus der Dicke des Blättchens.

Die Ursache dieser Erscheinung liegt in einer Herabsetzung des Gangunterschiedes zwischen jenen Strahlen, welche von der Vorderfläche reflectirt werden, und durch das Blättchen gehen, und jenen, welche von der Hinterfläche reflectirt werden und frei gehen. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich auch bei anderen Interferenzerscheinungen, so bei den Ringen, welche senkrecht zur Axe geschnittene Kalkspathplatten zeigen, und bei den im Nicol sichtbaren Interferenzstreifen. Wenn man schief gegen das Farbenglas sieht, so ist das Licht theilweise polarisirt. Bringt man ein Nicol zwischen Farbenglas und Auge, so dass das Glas dunkel erscheint, und zwischen Farbenglas und Nicol eine parallel zur Axe geschnittene Quarzplatte von 1 bis 2 mm Dicke, so dass die optische Axe gegen den Hauptschnitt des Nicol um 45° geneigt ist, so sieht man am Farbenglase eine Reihe von Nebenringen, die zu demselben Centrum gehören und um so entfernter sind, je dicker die Glasplatte ist[1]).

Weitere Ausführungen wurden von E. Mach[2]) gegeben.

43. Farben gemischter Blättchen.

Die Farben gemischter Blättchen wurden von Young entdeckt, als er durch zwei sich nahezu berührende, an den Innenflächen feuchte Glasplatten nach einer Kerzenflamme blickte[3]). Diese Farben zeigen sich immer, wenn sich zwischen zwei sehr nahe an einander befindlichen durchsichtigen Platten zwei nicht mischbare Flüssigkeiten oder Tröpfchen einer und derselben Flüssigkeit befinden, so dass eine Lamelle entsteht, welche aus zwei Substanzen von verschiedener Brechbarkeit mosaikartig zusammengesetzt ist.

Nach Brewster, welcher zahlreiche Versuche über diesen Gegenstand anstellte[4]), erhält man diese Erscheinung am besten, wenn man auf die Gläser etwas geschlagenen Eiweissschaum bringt, diesen einige Augenblicke über einer Flamme erwärmt und sodann die Gläser übereinanderlegt. Die Farben werden sowohl im durchgelassenen als im reflectirten Lichte wahrgenommen; ist eines der Gläser ein wenig convex, so erhält man Ringe. Diese sind beträchtlich breiter, als die gewöhnlichen Newton'schen Ringe. Hat man z. B. Luft und Wasser, so sind die Durchmesser der entsprechenden Ringe $\sqrt{6}$ mal so gross, als diejenigen, welche durch eine Luftschicht hervorgebracht werden. Die Ringe werden bei schiefer Incidenz zahlreicher.

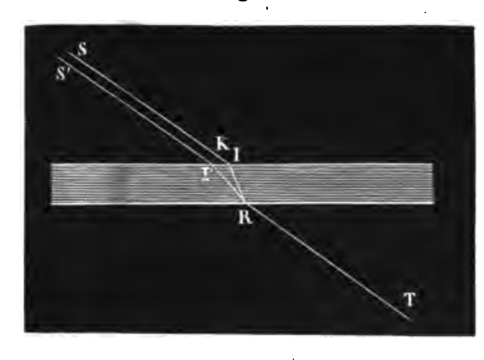
---

1) Stefan, Pogg. CXXIII, CXXV. — 2) Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, Pogg. CL. — 3) *Phil. Trans.* 1802, 387; *Lectures on Natural Philosophy,* 369. — 4) *Phil. trans.,* 1838, 73; *Instit.,* VI, 262.

Young hat das Phänomen der Interferenz von Strahlen zugeschrieben, welche beim Durchgange durch die dünne Schicht ihren Weg durch verschiedene Substanzen nehmen. Die Regelmässigkeit der Erscheinung und ihre Unabhängigkeit von der Gestalt und Grösse der Tröpfchen beweist, dass man es nicht, wie Brewster meinte, mit einem Beugungsphänomen zu thun hat.

Wir geben im Folgenden die Erklärung Young's und beschränken uns hierbei auf die Farben durchgelassenen Lichtes. Wir sehen die Dicke e des Blättchens (Fig. 31) innerhalb einer geringen Ausdehnung als constant an, denken dasselbe als aus zwei verschiedenen Substanzen, m, m', zusammengesetzt, und setzen voraus, dass m die optisch dichtere Substanz sei. Längs RT pflanzen sich zwei Strahlen fort, SIR, $S'I'R$, von welchen der erste durch die Substanz m, der zweite durch die Substanz m' gegangen sein soll. Bezeichnen wir durch u, v, v' die Lichtgeschwindigkeiten im äusseren Medium und in den beiden Substanzen des Blättchens, durch l, λ, λ' die entsprechenden Wellenlängen, durch i, i' die Einfallswinkel der Strahlen bei ihrer zweiten Brechung, durch r den Einfallswinkel bei der ersten Brechung, so haben wir:

Fig. 31.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{u} = \frac{\lambda}{l} \qquad \frac{\sin i'}{\sin r} = \frac{v'}{u} = \frac{\lambda'}{l} \qquad \frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v}{v'}.$$

Die Zeitdifferenz der beiden Strahlen ist:

$$\frac{IK}{u} + \frac{IR}{v} - \frac{I'R}{v'},$$

ferner ist

$$IR = \frac{e}{\cos i} \qquad I'R = \frac{e}{\cos i'}$$

$$IK = II' \sin r \qquad II' = e\,(\tang i' - \tang i)$$

und wir erhalten durch Substitution der letzteren Werthe in den für die Zeitdifferenz gefundenen Ausdruck:

$$\frac{e\,(tang\,i' - tang\,i)\,sin\,r}{u} + \frac{e}{v\,cos\,i} - \frac{e}{v'\,cos\,i'}$$

$$= \frac{e}{v}\left[\frac{\lambda}{l}\,(tang\,i' - tang\,i)\,sin\,r + \frac{1}{cos\,i} - \frac{\lambda}{\lambda'}\cdot\frac{1}{cos\,i'}\right]$$

$$= \frac{e}{v}\left[\frac{1}{cos\,i} - \frac{\lambda}{l}\,tang\,i\,sin\,r - \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\cdot\frac{1}{cos\,i'} - \frac{\lambda}{l}\,tang\,i'\,sin\,r\right)\right]$$

$$= \frac{e}{v}\left[\frac{1}{cos\,i} - tang\,i\,sin\,i - \frac{\lambda}{\lambda'}\left(\frac{1}{cos\,i'} - tang\,i'\,sin\,i'\right)\right]$$

$$= \frac{e}{v}\left[cos\,i - \frac{\lambda}{\lambda'}\,cos\,i'\right].$$

Es ergiebt sich sonach ein Maximum oder ein Minimum der Intensität, je nachdem die letztere Grösse gleich $2n\,\frac{T}{2}$ oder gleich $(2n+1)\,\frac{T}{2}$ ist, also ein Maximum für

$$e\left(cos\,i - \frac{\lambda}{\lambda'}\,cos\,i'\right) = 2n\,\frac{\lambda}{2},$$

und ein Minimum für

$$e\left(cos\,i - \frac{\lambda}{\lambda'}\,cos\,i'\right) = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}.$$

Bei normaler Incidenz reduciren sich diese Gleichungen auf

$$e\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) = 2n\,\frac{\lambda}{2}$$

und

$$e\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}.$$

Vergleichen wir dieselben mit den entsprechenden Ausdrücken für die gewöhnlichen Newton'schen Ringe. Für diese sind, wenn die Lamelle ganz aus der Substanz m' besteht, die Maxima der Intensität bestimmt durch

$$e' = 2n\,\frac{\lambda'}{4}$$

und die Minima durch

$$e' = (2n+1)\,\frac{\lambda'}{4}.$$

Wir haben also für helle Ringe derselben Ordnungszahl im einen und anderen Falle

$$\frac{4e'}{\lambda'} = \frac{2e\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)}{\lambda}$$

und für dunkle Ringe

$$\frac{e'}{e} = \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right).$$

Sind beispielsweise m und m' Wasser und Luft, so ist

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{3}{4},$$

und

$$\frac{e'}{e} = \frac{1}{6};$$

und die Durchmesser der Ringe gleicher Ordnung verhalten sich in den beiden Fällen wie $1 : \sqrt{6}$, was durch das Experiment bestätigt wird.

Untersuchen wir noch, wie die Breite der Ringe von der Incidenz abhängt; nach den oben gefundenen Ausdrücken wird die Ringbreite um so geringer, je grösser

$$\cos i - \frac{\lambda}{\lambda'} \cos i'$$

ist. Es genügt also, die Variationen dieses Ausdruckes oder, was auf dasselbe zurückkommt, diejenigen von

$$\lambda' \cos i - \lambda \cos i'$$

in Betracht zu ziehen. Die Derivirte dieses Ausdruckes in Bezug auf i ist

$$- \lambda' \sin i + \lambda \sin i' \frac{\delta i'}{\delta i}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\lambda' \cos i \, di = \lambda \cos i' \, di'$$

$$\frac{di'}{\delta i} = \frac{\lambda' \cos i}{\lambda \cos i'};$$

folglich die Derivirte:

$$\frac{\lambda'}{\cos i'} (\sin i' \cos i - \cos i' \sin i) = \frac{\lambda' \sin (i' - i)}{\cos i'}.$$

Da also diese stets positiv bleibt, wächst $\cos i - \frac{\lambda}{\lambda'} \cos i'$ beständig mit i und folglich müssen sich die Ringe bei wachsender Incidenz zusammenziehen.

44. Die Newton'schen Farben und das analysirende Spectrum.

Zwar hat das Farbenglas bei der Bestimmung der grössten Gangunterschiede, unter welchen Interferenz stattfindet, unübertroffene Dienste

geleistet (30), doch ist unmittelbar einleuchtend, dass eine Versuchsanordnung in den meisten Beziehungen vorzuziehen ist, welche auf der Verwendung paralleler Strahlen und eines planparallel begrenzten Blättchens beruht und die prismatische Zerlegung des Interferenzlichtes gestattet, also eine Combination eines Interferenzblättchens mit einem Spectralapparate. Wir haben schon früher eines von Fizeau und Foucault angestellten Versuches Erwähnung gethan (30), bei welchem das durch Reflexion an einer 1 mm dicken Glasplatte entstandene Interferenzlicht spectral zerlegt wurde.

Das Spectrum erscheint von einem Systeme dunkler Interferenzstreifen parallel den Fraunhofer'schen Linien durchzogen, welche, wie die Newton'schen Ringe, durch Interferenz der an der Vorderfläche und Hinterfläche des Blättchens reflectirten Strahlen entstehen.

Mit Hülfe des analysirenden Spectrums hat W. Wernicke[1]) die mit der Reflexion verbundenen Phasenveränderungen bestimmt.

Bringt man eine Seite eines Blättchens eines durchsichtigen Körpers zur Hälfte mit einem anderen Medium in Berührung, so erhält man zwei Streifensysteme dicht über einander, und die Verschiebungen der Streifen des neuen Systems gegen die Streifen des ursprünglichen geben die relativen Phasenveränderungen an, welche das Licht bei der Reflexion an der Grenze des Blättchens und Luft einerseits und an der Grenze des Blättchens und des mit demselben in Berührung gebrachten Körpers andererseits erlitten hat. Da die beiden Streifensysteme durch eine haarfeine Linie getrennt unmittelbar aneinanderstossen, so lassen sich selbst geringe Aenderungen der Phase sofort erkennen und zwar gleichzeitig für eben so viele Wellenlängen, als Streifen im Spectrum vorhanden sind.

Wernicke untersuchte nach dieser Methode die Reflexion an der Grenze durchsichtiger Körper und es ergab sich:

Die Phasenänderung, welche das Licht bei normaler Reflexion erleidet, ist Null, wenn das erstere Medium das grössere Brechungsvermögen hat, und entspricht einem Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge, wenn das zweite Medium das stärker brechende ist, für alle transparenten Medien und alle Farben des Spectrums.

Dieses Resultat steht in Uebereinstimmung mit den Resultaten von Young (36), Quincke[2]) und Glan[3]). Die untersuchten Substanzen waren: Jodsilberschichten, Glaslamellen, Luft, Wasser, Alkohol, Aether, Petroleum, Benzin, Olivenöl, Canadabalsam, Schwefelkohlenstoff.

Ganz andere Resultate ergaben sich bei der Reflexion an Körpern mit elektiver Absorption, als bei der Reflexion in Glas an Fuchsin, Triphenyl-Diphenyl-Monophenyl-Rosanilin, Anilingrau, Anilinviolett.

Während bei der normalen Reflexion an der Grenze zweier durchsichtiger Mittel keine Phasenveränderung nachgewiesen werden konnte, welche sich merklich von Null oder 180° unterschied, wurden bei jenen

[1]) Pogg. 1876. — [2]) Pogg. CXLI. — [3]) Pogg. CLV.

Körpern alle möglichen Phasenänderungen zwischen 0 und 180° beobachtet und zwar zeigten sich bei demselben Körper verschiedene Phasenänderungen für verschiedene Farben.

Wieder andere Resultate ergab die Reflexion an der Grenze von Metallen.

Die Absorption des Lichtes in Silber bewirkt eine Phasenverzögerung von nahezu 90° für alle Farben des sichtbaren Spectrums, wenn das Licht vom Silber im Glase unter dem Einfallswinkel 0° reflectirt wird. Die Phasenänderung bei normaler Incidenz ist stets eine Phasenverzögerung und zeigt für kein Metall und keine Farbe eine starke Abweichung von der entsprechenden des Silbers.

Die dunklen Interferenzstreifen, welche man bei der prismatischen Zerlegung der Interferenzfarben beobachten kann, geben auch ein vorzügliches Mittel ab, die Scale jener Interferenzfarben zu übersehen [1]). Die spectralen Erscheinungen dieser Scale können in ihrem Zusammenhange graphisch dargestellt werden.

Betrachten wir die durch eine Luftschicht von wachsender Dicke bei Anwendung weissen Lichtes und normaler Incidenz hervorgebrachte Folge Newton'scher Farben. Dieselbe ist eine durchaus bestimmte. Bedeutet D die Dicke der Luftschicht, so ist die Intensität ein Maximum, wenn

$$\frac{4D}{\lambda} = 2n - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

und ein Minimum, wenn

$$\frac{4D}{\lambda} = 2(n - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Zerlegen wir das einem bestimmten D entsprechende reflectirte Licht spectral, so erscheinen im Spectrum den für diese bestimmte Dicke vorhandenen Maximis und Minimis der einzelnen Farben entsprechend Stellen von besonderer Helligkeit und dunkle oder schwarze Streifen, deren Lage durch die Gleichungen (A) und (B) gegeben ist. Denken wir uns D von o an bis zu einem beliebig grossen Werthe wachsend, so entspricht jedem dieser Werthe ein anderes Spectrum.

Die Werthe, welche n in den Gleichungen (A) und (B) bei jeder beliebigen Dicke für die einzelnen Werthe von λ annimmt, entsprechen der Ordnungszahl des hellen oder dunklen Ringes, welcher bei den entsprechenden Werthen von D und λ auftreten würde, wenn nach dem Vorgange von Prevostaye und Desain als $n$ter heller Ring jener bezeichnet wird, für welchen die Dicke der Schicht das $2n - 1$ fache der Dicke für den ersten hellen Ring ist, als $n$ter dunkler Ring jener, für welchen die Dicke der Schicht das $2(n - 1)$ fache der Dicke für den ersten hellen Ring ist.

---

[1]) A. Rollett, Wien. Ber. 1877



So lange D so klein ist, dass nur eine Auflösung der Gleichungen (A) und (B) beim Durchlaufen aller Werthe von λ möglich ist, wird nur ein dunkler Streifen oder nur eine Stelle von besonderer Helligkeit im Spectrum vorhanden sein. Mit wachsendem D werden die Streifen im Allgemeinen immer zahlreicher.

Man denke sich nun in Fig. 32 (a. f. S.) von dem Punkte O die Wellenlängen λ_H bis λ_A der Fraunhofer'schen Linien H, G, F, E, D, C, B, A als Abscissen auf Ox aufgetragen. Als Ordinaten seien die Dicken

$$D = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ n\,\frac{\lambda}{4}$$

aufgetragen, für welche für die betreffende Fraunhofer'sche Linie abwechselnd ein Maximum oder ein Minimum vorhanden ist, dann stellen die geraden Linien *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* etc. die Lage der Maxima derselben Ordnung als Function der Wellenlänge dar und in gleicher Weise 2, 3, 4, 5 etc. die Lage der Minima derselben Ordnung. Wie leicht ersichtlich ist, werden alle diese Linien die Abscissenaxe in O schneiden. Alle diese Betrachtungen lassen sich in analoger Weise auch für die Newton'schen Farben im durchgelassenen Lichte anstellen. Mit der ausgeführten Construction für reflectirtes Licht ist aber natürlich auch jene für durchfallendes Licht gegeben, nur bedeuten dafür 1, 2, 3, 4, 5 etc. die Maxima und *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* etc. die Minima.

Eine gerade Linie parallel der Abscissenaxe verschoben giebt nun alle mit wachsender Dicke der Luftschicht sich folgenden Sprectren an, und die Anzahl und den Ort der in jedem Spectrum vorhandenen hellen und dunkeln Streifen. Denkt man sich die Construction nach aufwärts weiter fortgeführt, so kommt man endlich auf die grosse Zahl dunkler Streifen bei grossem Gangunterschiede, von welchen in (30) die Rede war.

Rollett fand für Roth erster Ordnung einen breiten, schlecht begrenzten dunkeln Streifen zwischen F und E. Das Complement zeigte eine Verkürzung des rothen und violetten Endes.

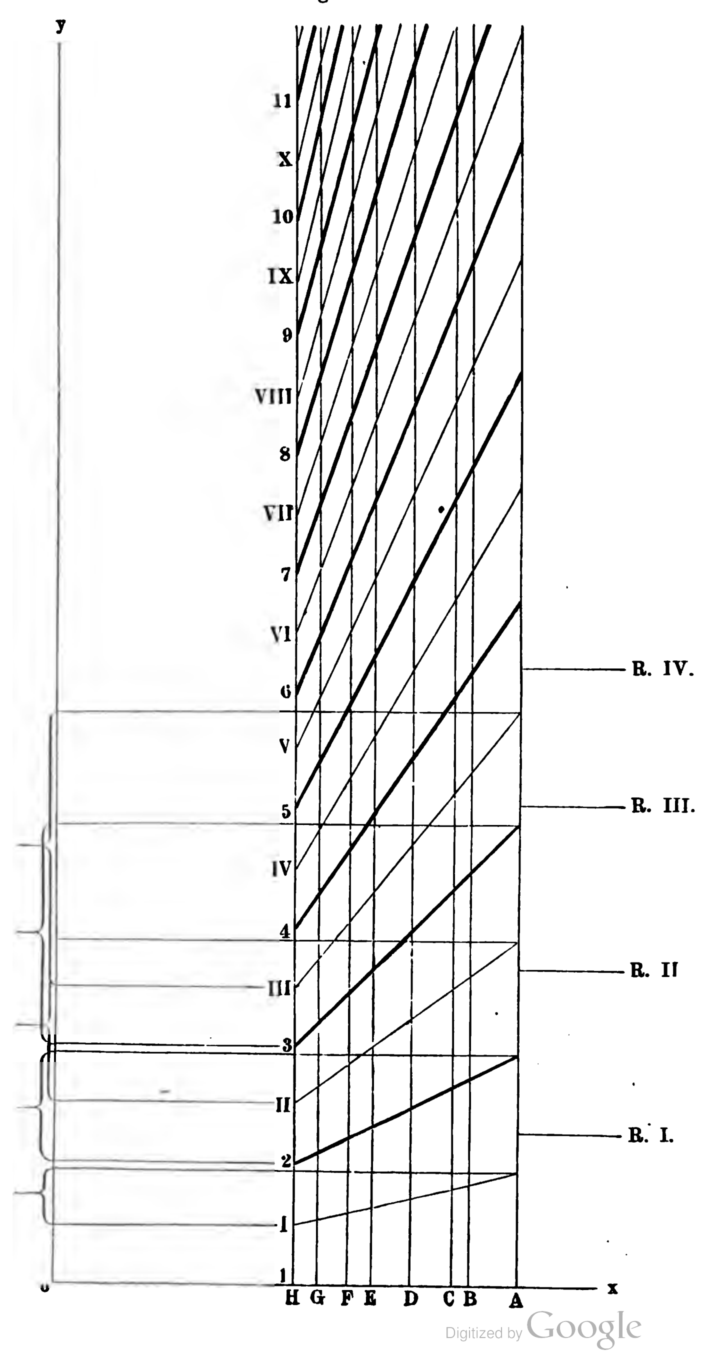
Roth zweiter Ordnung zeigte einen schmäleren, schärfer begrenzten dunkeln Streifen, dessen Mitte mit E zusammenfiel, das Complement deutliche Verkürzung des violetten und rothen Endes.

Roth dritter Ordnung zeigte einen dunkeln Streifen, dessen Mitte von E etwas gegen D abwich, das Complement einen dunkeln Streifen zwischen H und G, einen zweiten zwischen D und C, letzterer näher.

Roth vierter Ordnung zeigte einen dunkeln Streifen zwischen H und G, einen zwischen F und E, einen bei B, das Complement einen dunkeln Streifen zwischen G und F, und einen zweiten, dessen Mitte mit D zusammenfiel.

Der Ort dieser vier Roth ist in der Figur angegeben.

Fig. 32.


y
11
X
10
IX
9
VIII
8
VII
7
VI
6
V
5
IV
4
III
3
II
2
I
1
x
H G F E D C B A
R. IV.
R. III.
R. II
R. I.

45. Eigenfarben der Körper.

Newton glaubte in den Farben dünner Blättchen die Erklärung der Eigenfarben der Körper gefunden zu haben. Er nahm an, eine oberste Schicht des Körpers wirke wie ein dünnes Blättchen, und es hänge sonach die Eigenfarbe eines Körpers von der Dicke jener obersten Schicht nach den Gesetzen der Farben dünner Blättchen ab.

Er verglich die Eigenfarben einer Anzahl von Körpern mit den Farben verschiedener Ordnungen der dünnen Blättchen und hielt beispielsweise das Grün der Blätter für identisch mit dem Grün dritter Ordnung, das Blau des Himmels für identisch mit dem Blau erster Ordnung. Indem er aus der Farbe der Körper die Dicke jener obersten Schicht berechnete, versuchte er es, selbst die Grösse der Körpermolecüle zu bestimmen [1]).

Die Erklärung Newton's ist dadurch widerlegt, dass die Eigenfarben der Körper keineswegs mit den Interferenzfarben identisch sind. Brewster [2]) hat durch zahlreiche Experimente nachgewiesen, dass, selbst wenn die Farbe eines Körpers mit derjenigen eines Farbenringes übereinstimmt, die Zerlegung durch ein Prisma ganz verschiedene Resultate ergiebt; dass z. B. die Spectra der verschiedenen Grün der Pflanzen durchaus anders zusammengesetzt sind, als die Spectra der verschiedenen Grün des Farbenglases (44).

Zu den Farben dünner Blättchen gehören jedoch die Farben der Seifenblasen und sehr dünnwandiger Glaskugeln, die Farben, welche sich zeigen, wenn sich an der Oberfläche einer Flüssigkeit eine dünne Schicht einer anderen, leichteren Flüssigkeit befindet, z. B. eine Oelschicht auf Wasser, die farbigen Streifen im Inneren gewisser Krystalle, welche von Spaltungen herrühren, die Anlauffarben der Metalle, die Farben des verwitterten Glases u. s. w.

46. Interferenzen dicker Platten.

Die Interferenzen dicker Platten, welche nicht mit den Interferenzen bei grossen Gangunterschieden verwechselt werden dürfen, wurden von Brewster [3]) im Jahre 1817 entdeckt. Von ihm rührt der folgende Versuch her.

Eine innen geschwärzte Röhre T (Fig. 33, a. f. S.) ist an einem Ende bis auf eine kleine Oeffnung, O, verschlossen, am anderen Ende befinden

---

[1]) Optik II, 3. Prop. 5, 6, 7; Biot, Physik, IV, 123. — [2]) *Edinb. Trans.* XII. — [3]) *Edinb. Trans.* VII.

sich zwei Glasplatten von genau gleicher Dicke von 2 oder 3 mm. Eine der Platten, *M*, steht senkrecht auf der Axe der Röhre, die andere, *N*, ist gegen die erste um einen Winkel von einigen Minuten geneigt. Blickt man durch das Plattenpaar nach der Oeffnung *O*, so gewahrt man zunächst ein Bild der Oeffnung, welches durch die directen Strahlen hervorgebracht wird; man gewahrt aber auch ein seitliches Bild, welches von parallel zur Durchschnittslinie der Platten verlaufenden Interferenzstreifen durchsetzt erscheint. Diese Streifen entstehen durch Strahlen, welche erst an der Platte *N*, dann an der Platte *M* reflectirt werden. Man sieht leicht, dass es vier Arten solcher Strahlen giebt, deren Gang in Fig. 34 durch *A*, *B*, *C*, *D* versinnlicht ist. Um die Figur deutlicher zu machen, wurde eine Brechung vom Lothe vorausgesetzt, wodurch unsere Betrachtung nicht alterirt wird.

Fig. 33.

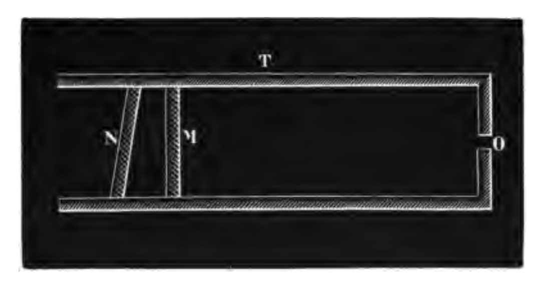
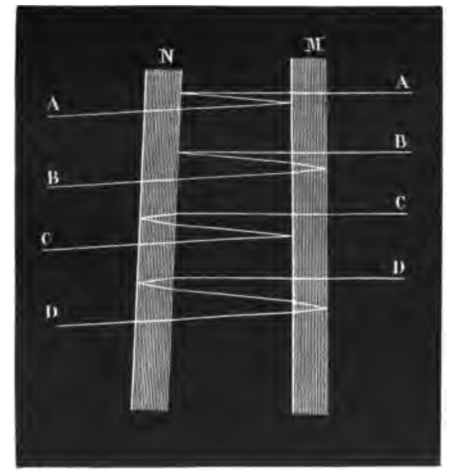


Fig. 34.



Ist e die Dicke einer der Platten und i die Dicke der Luftschicht zwischen den Platten, so sind die von den vier Strahlen innerhalb des Plattensystems zurückgelegten Wege näherungsweise

$$2e + 3i \text{ für } A$$
$$4e + 3i \text{ für } B$$
$$4e + 3i \text{ für } C$$
$$6e + 3i \text{ für } D.$$

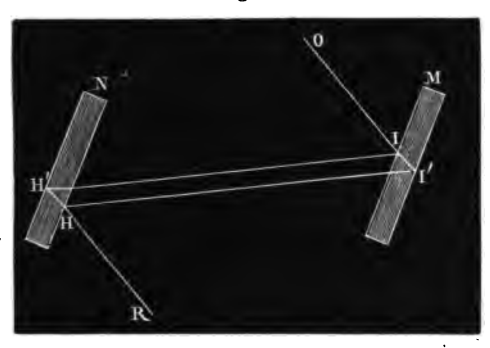
Da e gegen eine Wellenlänge sehr gross ist, können nur Strahlen, welche Wege wie *B* und *C* zurückgelegt haben, Interferenzerscheinungen hervorbringen, zwischen welchen wegen der geringen Neigung der Platte *N* gegen die Axe eine sehr kleine Wegdifferenz besteht.

Auf dem Principe der Interferenzen dicker Platten beruht auch der von Jamin [1]) construirte Interferenzrefractor. Zwei Glasplatten von ungefähr 1 cm Dicke, *M*, *N* (Fig. 35), sind in hinreichender Entfernung

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) LII, 163, 171.

von einander in parallele Lage gebracht. Ein bei *R* befindliches Auge empfängt längs *HR* zwei Strahlen, welche die Wege *OIH'HR*, *OII'HR* zurückgelegt haben. Wenn die beiden Platten genau parallel sind und genau gleiche Dicke haben, so befinden sich die in *HR* vereinigten Strahlen in Uebereinstimmung der Schwingungen; wenn diese Bedingungen nicht genau erfüllt sind, so bestehen kleine Gangunterschiede, welche das Entstehen von Interferenzstreifen verursachen. Die in *HR* vereinigten Strahlen erscheinen auf ihrem Wege zwischen den Platten getrennt und man kann daselbst jeden der beiden Strahlen für sich durch eine mit einer Flüssigkeit oder einem Gase gefüllte Röhre gehen lassen. Sind die beiden Flüssigkeitssäulen gleich lang und haben sie denselben Brechungsindex, so erscheint der Gangunterschied der beiden Strahlen nicht alterirt; die geringste Aenderung im Brechungsindex einer der beiden Substanzen wird aber den Gangunterschied verändern und eine Verschiebung der Streifen verursachen.

Fig. 35.



Was die Entfernung, *E*, der beiden Strahlen *H'I* und *HI'* betrifft, welche für die Einrichtung der Röhren oder sonstigen einzuschaltenden Apparate von Wichtigkeit ist, so findet man leicht

$$E = 2\,e\,\cos\alpha\,\tang\beta,$$

wenn durch α und β Einfalls- und Brechungswinkel des Strahles *OI* bezeichnet werden. Diese Entfernung hat ein Maximum für

$$\sin^4\alpha - 2\,n^2\,\sin^2\alpha + n^2 = 0 \text{ [1]}$$

oder

$$\tang^4\alpha = \frac{n^2}{n^2 - 1} \text{ [2]}.$$

Für eine Glasplatte vom Brechungsexponenten $\frac{3}{2}$ entspricht das Maximum einem Einfallswinkel von 49° 12'.

Der Interferenzrefractor ist, wie es scheint, der empfindlichste und sicherste von allen Interferenzapparaten. Ein Luftzug durch das offene Fenster oder Hauchen auf die Luft zwischen den dicken Glasplatten genügt, um die Interferenzstreifen im Spectrum (44) schwanken zu lassen,

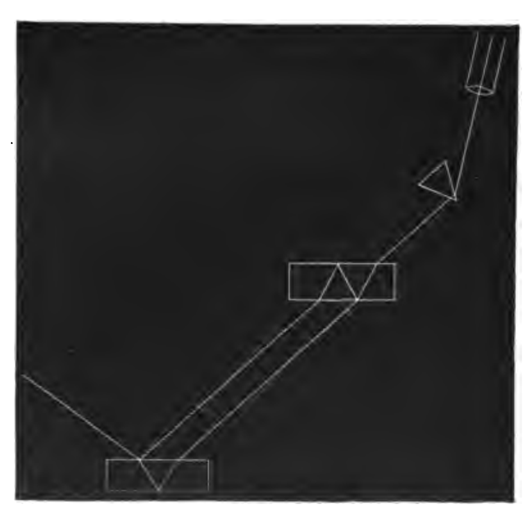
[1]) Billet, Optik I, 162. — [2]) Ketteler, Beobachtungen, S. 34.

die dann, sobald die Luftmasse wieder homogen geworden ist, ihre frühere Lage einnehmen [1]).

Jamin und Ketteler erleuchteten bei ihren Messungen die erste Platte durch eine weisse oder monochromatische Lichtflamme. Die von der zweiten Platte reflectirten Strahlen fielen durch eine Convexlinse auf das Auge. Quincke [2]) gab seinem Apparate wohl die beste Einrichtung:

Von einem Heliostaten reflectirte Sonnenstrahlen fallen auf einen Spalt, der sich im Brennpunkte einer achromatischen Linse befindet, treten aus der Linse parallel aus und treffen dann auf das System der Glasplatten. Von den reflectirten Strahlenbündeln werden das erste und das dritte von einem Schirm aufgefangen. Das zweite geht durch eine Oeffnung dieses Schirmes hindurch, um durch ein Prisma gebrochen zu werden. Die aus dem Prisma ausgetretenen Strahlen betrachtet man mit blossem Auge oder einem astronomischen Fernrohr. Haben die Glasplatten die passende Neigung, so sieht man im Fernrohr ein Spectrum mit den Fraunhofer'schen Linien, und gleichzeitig parallel denselben ein System schwarzer Interferenzstreifen, ähnlich den Newton'schen Streifen (44).

Fig. 36.



Quincke beobachtete auch die Streifen, welche im durchgelassenen Lichte entstehen durch Strahlen, welche den in Fig. 36 angedeuteten Weg nehmen, ebenfalls unter Anwendung von Prisma und Fernrohr. Diese Streifen sind complementär zu den Streifen im reflectirten Lichte.

---

[1]) G. Quincke, Pogg. CXXXII. — [2]) Pogg. CXXXII.

Auch bei dieser Gattung von Interferenzen stimmten die experimentellen Ergebnisse mit den Resultaten der Rechnung überein.

Der Interferenzrefractor wurde von Jamin auf die Bestimmung der Brechungsexponenten der Luft und des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen angewendet, zum Studium der Veränderungen des Bsechungsexponenten des Wassers in der Nähe des Dichtigkeitsmaximums und um nachzuweisen, dass die Concentration einer magnetischen Lösung in der Nähe eines Poles zunimmt [1]).

Dieselbe Methode ist von Ketteler in seinen Untersuchungen über die Farbenzerstreuung der Gase und von Quincke in seinen Untersuchungen über die lamellare Beugung und über die Aenderung der Phase bei Reflexion und Refraction angewendet worden [2]).

Um zwischen den zur Interferenz kommenden und im Interferenzrefractor getrennten Strahlen einen bekannten Gangunterschied hervorzubringen, dient der Compensator von Jamin. Er besteht aus zwei gleichen Glasplatten, welche sich bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte erstrecken, einen unveränderlichen Winkel mit einander bilden und auf einem getheilten Kreise so angebracht sind, dass die Durchschnittslinie der Platten auf der Ebene des Kreises senkrecht steht und das Plattensystem um diese Durchschnittslinie als Axe gedreht werden kann. Der Compensator kann in den Interferenzrefractor so eingeschaltet werden, dass jeder der beiden im Interferenzrefractor getrennt fortschreitenden und später zur Interferenz kommenden Strahlen durch eine der Platten des Compensators geht. Bei symmetrischer Stellung der Platten erfahren beide Strahlen gleiche Verzögerungen; dreht man aber das Plattensystem um einen Winkel, welcher am getheilten Kreise abgelesen werden kann, so sind die Verzögerungen ungleich.

Schaltet man einen Jamin'schen Compensator in den oben beschriebenen Quincke'schen Interferenzrefractor ein, so werden beim Drehen desselben die Fraunhofer'schen Linien an derselben Stelle des Gesichtsfeldes (im Fadenkreuz) des Fernrohres bleiben, während sich die Interferenzstreifen gegen die Fraunhofer'schen Linien oder das Fadenkreuz verschieben.

Der Billet'sche Compensator besteht aus zwei Prismen mit gleichen Winkeln, welche an einander verschiebbar sind, so dass beide eine planparallele Platte von veränderlicher Dicke bilden. Mit dieser ist eine planparallele Platte von demselben Glase verbunden, die einer bestimmten Stellung der beiden Prismen entspricht. Das eine der interferirenden Lichtbündel geht durch die Platte, das andere durch die Prismen. Billet erhöht die Empfindlichkeit dieses Apparates, indem er denselben in eine Flüssigkeit taucht [3]).

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XLIX, 382; LII, 163, 171; C. R., XLII, 482; XLIII, 1191; XLV, 892. — [2]) Ketteler, Farbenzerstreuung der Gase, Bonn 1865; Quincke, Pogg. 132, S. 50; 141, S. 177. — [3]) C. R. LXVII, 1000.

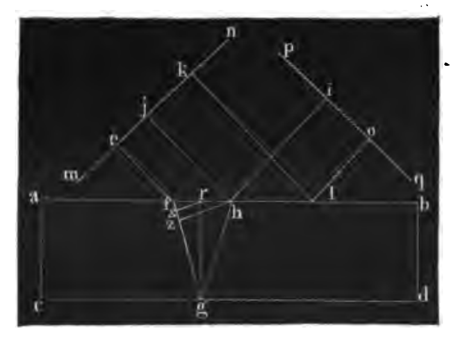
47. Berechnung des Brewster'schen Interferenzrefractors.

Wir setzen als Lichtquelle eine wenig ausgedehnte entfernte helle Fläche voraus, lassen das Licht durch zwei wenig gegen einander geneigte Glasplatten treten und betrachten durch ein auf ∞ gestelltes Fernrohr jenes der Lichtbilder, in welchem sich die Brewster'schen Streifen zeigen.

Um die Wegdifferenz der Strahlen nach den bekannten beiden Reflexionen zu berechnen, schicken wir die folgende Betrachtung voraus.

Es seien (Fig. 37) *abcd* eine dicke duchsichtige Platte, *mn* eine einfallende ebene Welle, *efghi* ein Strahl, welcher bei *g* reflectirt wird, *klo* ein Strahl, welcher bei *l* reflectirt wird, *jhi* ein Strahl, welcher an der Austrittsstelle des Strahles *efghi* reflectirt wird, *pq* eine Ebene senkrecht zu den austretenden Strahlen, $rg \perp cd$, $rs \parallel hz \perp fg$.

Fig. 37.



Die Wegdifferenz in *i* der Strahlen *efghi* und *jhi* ist gleich *zgh* bezogen auf die Substanz der Platte oder gleich

$$2\,sg = 2\,rg\;.\;\cos sgr = 2\,e\,\cos r,$$

wenn durch *e* die Dicke der Platte und durch *r* der Brechungswinkel bezeichnet werden. Andererseits ist die Wegdifferenz in *i* und *o* der Strahlen *jhi* und *klo* gleich Null, woraus folgt, dass die Wegdifferenz auf *pq* zwischen *efghi* und *klo* gleich ist $2\,e\,\cos r$, bezogen auf die Substanz der Platte, oder

$$2\,en\,\cos r,$$

bezogen auf das äussere Mittel ist. Es folgt:

Wird eine ebene Wellenfläche an einer dicken Platte theils an der Vorderfläche, theils an der Hinterfläche reflectirt, so besteht zwischen den beiden reflectirten Wellenflächen eine Wegdifferenz gleich

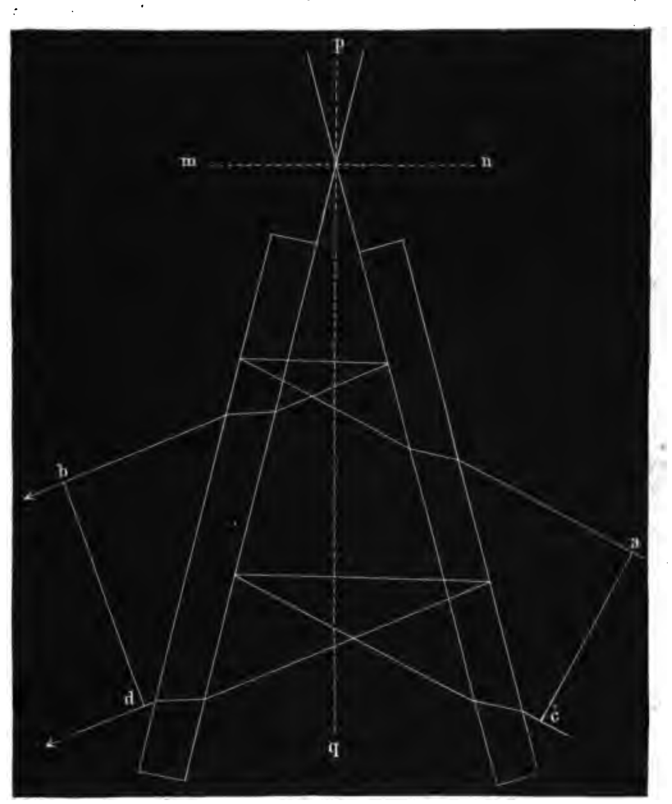
$$2\,en\,\cos r.$$

Die beiden aus dem Brewster'schen Apparate (46) austretenden ebenen Wellen, in welche sich die eintretende ebene Welle spaltet, sind also gegen diese geneigt, doch unter einander parallel und haben eine gegenseitige Wegdifferenz

$$\varDelta = 2ne\,(\cos r - \cos r').$$

Diese Wegdifferenz ist für verschiedene Richtungen der einfallenden Strahlen verschieden. Sie ist Null für $r = r'$ oder $i = i'$, wo i und i' die Einfallswinkel an den beiden Platten sind. Dies ist der Fall, wenn die Strahlen nach ihrer ersten Reflexion parallel zu einer Ebene ver-

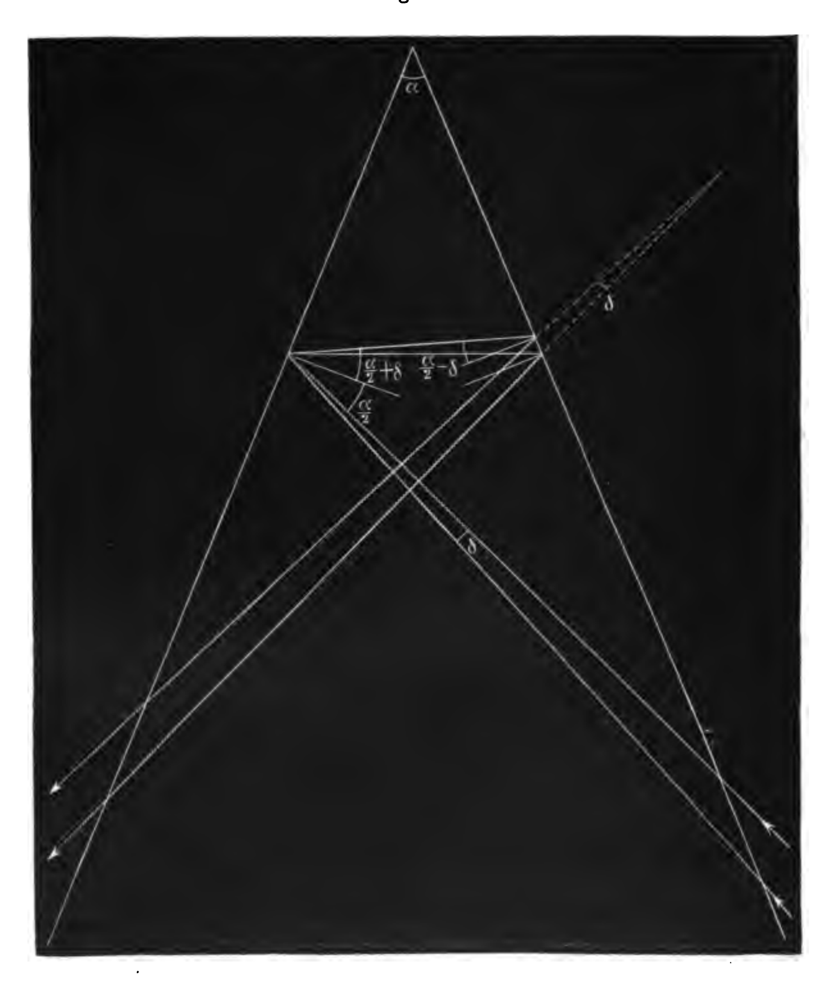
Fig. 38.



laufen, welche den stumpfen Winkel der Ebenen der beiden Platten halbirt. In Fig. 38 ist beispielsweise der Gang von Strahlen verzeichnet, welche nicht nur der winkelhalbirenden Ebene mn parallel sind, sondern auch auf der zweiten winkelhalbirenden Ebene pq senkrecht stehen, also in der Ebene der Figur liegen. Die Wegdifferenz der Strahlen ab und

cd ist Null. Sämmtliche Strahlen, welche zwischen der ersten und zweiten Reflexion parallel der Ebene *mn* verlaufen, bringen in der

Fig. 39.



Focalebene des Fernrohres einen hellen Streifen, parallel der Durchschnittslinie der Platten, hervor. Dieser Streifen ist der Centralstreifen des Phänomens; die übrigen Streifen sind diesem parallel.

Ist, wie dies in Wirklichkeit zutrifft, der Neigungswinkel der Platten α sehr klein und die Neigung der einfallenden Strahlen nahe gleich $\frac{\pi}{2}$, so wird die Wegdifferenz näherungsweise

$$\Delta = 2ne\left[\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{r'^2}{2}\right)\right]$$
$$= nc\,(r'^2 - r^2)$$
$$= ne\left(\frac{i'^2}{n^2} - \frac{i^2}{n^2}\right)$$
$$= \frac{e}{n}\,(i'^2 - i^2)$$

und man hat für den $m$ten Streifen, dessen Winkeldistanz vom Centralstreifen δ sein soll (Fig. 39):

$$i = \frac{\alpha}{2} + \delta \qquad i' = \frac{\alpha}{2} - \delta,$$

woraus sich ergiebt

$$\Delta = 2\,\frac{e}{n}\,\alpha\delta = m\,\frac{\lambda}{2}.$$

Ist ferner f die Brennweite des Fernrohres, so hat man für die Entfernung des $m$ten Streifens vom Centralstreifen in der Brennebene des Fernrohres

$$d = f \cdot \frac{n}{4}\,\frac{m}{\alpha}\,\frac{\lambda}{e}.$$

Die Streifen sind äquidistant.

48. Berechnung des Jamin'schen Interferenzrefractors.

Wir wollen den Jamin'schen Interferenzrefractor in der Form voraussetzen, welche ihm Quincke gegeben hat (46).

Ist r der Brechungswinkel der parallel einfallenden Strahlen bei der ersten Platte, e die Dicke der Platten, so beträgt die Wegdifferenz der beiden aus der ersten Platte austretenden ebenen Wellen (47)

$$\Delta = 2ne\,cos\,r.$$

Ebenso entsteht durch die zweite Platte eine Wegdifferenz

$$\Delta' = 2ne\,cos\,r'.$$

Aus der zweiten Platte treten also ebene parallele Wellen aus mit einer Wegdifferenz

$$\Delta - \Delta' = 2ne\,(cos\,r - cos\,r').$$

Führt man statt der Brechungswinkel r und r' die entsprechenden Einfallswinkel i und i' ein, so hat man

$$\frac{sin\,i}{sin\,r} = n$$

$$cos\,r = \sqrt{1 - sin^2 r} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - sin^2 i}$$

und $\Delta - \Delta' = 2e\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad$ (A)

Heisst der kleine Winkel, welchen die beiden Platten einschliessen, α, so ist

$$i' = i + \alpha$$
$$\sin i' = \sin i + \cos i \cdot \alpha$$
$$\sin^2 i' = \sin^2 i + \sin 2i \cdot \alpha$$
$$\sqrt{n^2 - \sin^2 i'} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i - \sin 2i \cdot \alpha}$$
$$= \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\sin 2i \cdot \alpha}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}},$$

also

$$\Delta - \Delta' = \alpha e \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

Insbesondere wird diese Gleichung für einen Winkel i, welcher sich wenig von 45 Graden unterscheidet,

$$\Delta - \Delta' = \frac{\alpha e}{\sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C)}$$

Bei der von Quincke getroffenen Einrichtung sind die in den Ausdrücken (A), (B), (C) vorkommenden Grössen α, e, i constant, und es werden sonach im Spectrum alle Farben ausgelöscht erscheinen, für welche, unter m eine ganze Zahl verstanden,

$$\Delta - \Delta' = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

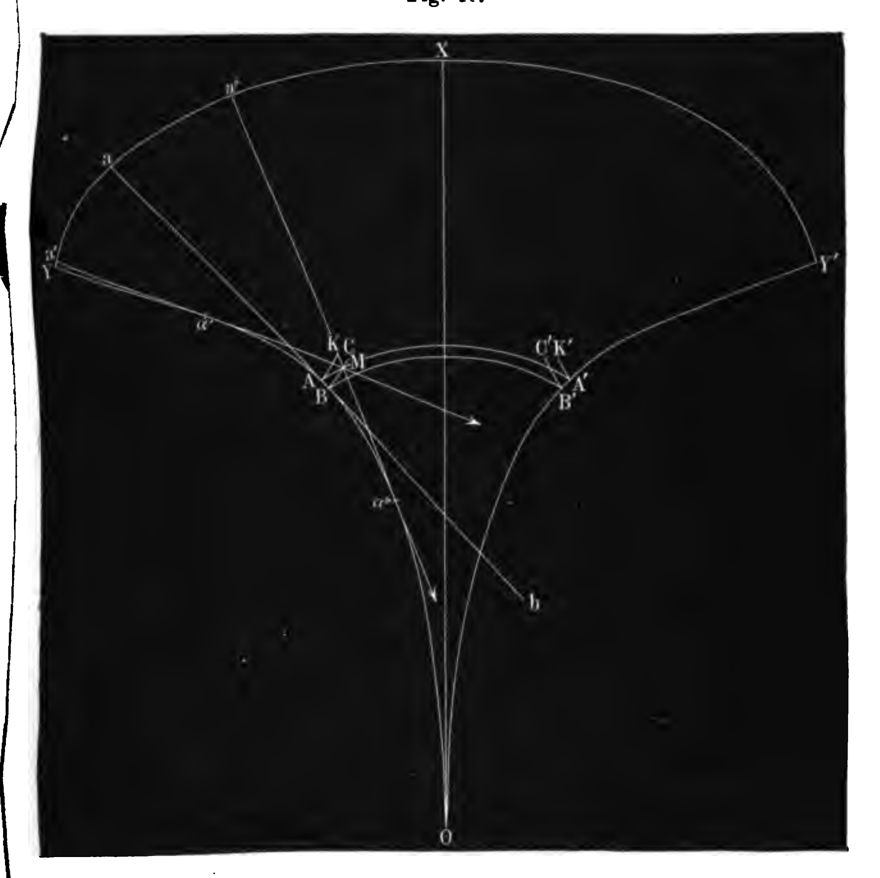
49. Interferenzstreifen als parallele Begleiter der caustischen Linien.

Wir nehmen an, eine sphärische Welle habe beim Durchgange durch eine nicht aplanatische Linse oder einen anderen Apparat die Gestalt einer concaven, nicht sphärischen, Rotationsfläche angenommen, YXY', Fig. 40.

Denken wir uns die Normalen der Wellenfläche YXY', so haben wir die von dieser Wellenfläche ausgehenden Strahlen, und jede Normalfläche der letzteren stellt eine Lage der sich fortpflanzenden Wellenfläche dar. Um eine solche zu verzeichnen, nehmen wir auf der caustischen Fläche YOY' einen Punkt A an, legen durch diesen eine Tangente ab und lassen diese auf YOY' rollen. Der Punkt A der Tangente beschreibt dann eine Curve wie $KAA'K'$, welche die Wellenfläche darstellt. Die Theile KA und $K'A'$ werden beschrieben während die Tangente ab auf AY und $A'Y'$ rollt (3). Betrachten wir die Lage der Welle, nachdem sich das Licht um $2n\frac{\lambda}{2}$ oder $(2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ fortgepflanzt hat, $CBB'C'$.

Wir sehen, dass sich in einem Punkte, wie M, zwei Strahlen durchkreuzen, Ma' und Ma'', welche die Curve YO in α' und α'' berühren und dass die Wegdifferenz dieser Strahlen $2n\,\frac{\lambda}{2}$ oder $(2n+1)\,\frac{\lambda}{2}$ ist, so dass sich in M ein Maximum oder ein Minimum der Intensität findet. Längs AA' in der Nähe von A und A' giebt es also eine Folge abwechselnd

Fig. 40.



heller und dunkler Stellen, welche sich bei der Fortpflanzung der Welle AA' mit bewegen, so dass die geometrischen Orte der Maxima und Minima der Intensität Flächen sind, welche merklich parallel mit der caustischen Fläche YOY' verlaufen. Der Durchschnitt eines Schirmes mit dem Gange der Strahlen wird also eine caustische Linie zeigen müssen, welche an der Seite der Lichtstrahlen von parallelen Interferenzcurven begleitet wird [1]).

---

[1]) Jamin, *Sur la théorie de la scintillation,* C. R. LXVII, 938.

50. Achromatisirung der Interferenzstreifen durch ein Prisma.

Bei weissem Lichte ist die Zahl der Interferenzstreifen eine beschränkte (22). Dies kommt daher, dass das Intervall zwischen zwei Streifen derselben Ordnungszahl doch ungleicher Farbe, z. B. Roth und Violett, mit der Ordnungszahl zunimmt, so dass durch Uebereinanderlagerung der einzelnen Farben ein Undeutlichwerden und Verschwinden der Streifen hervorgeht.

Betrachtet man das Streifensystem durch ein Prisma, so wird dasselbe abgelenkt, und zwar die violetten Streifen mehr als die rothen. Es wird also Farbenstreifen von irgend einer Ordnungszahl geben, für welche das Intervall zwischen Roth und Violett, von welchem die Rede war, bei der prismatischen Ablenkung eben aufgehoben wird, so dass sich diese Streifen zu einem weissen Streifen vereinigen. Auch die benachbarten Streifen werden unter annähernd denselben Bedingungen stehen und sich folglich in gleicher Weise verhalten. Der Effect ist, dass Streifen von Ordnungszahlen, welche sich innerhalb gewisser Grenzen befinden, achromatisch erscheinen, wenn sie früher gefärbt waren, oder dass diese Streifen überhaupt sichtbar werden, wenn sie es früher nicht waren. Wir betrachten beispielsweise die Newton'schen Ringe. Dieselben verengern sich bei abnehmender Wellenlänge und das Intervall zwischen zwei Ringen derselben Ordnung und verschiedener Farben wächst mit der Ordnungszahl der Ringe. Das Prisma lenkt die Ringsysteme verschiedener Farben ungleich ab. Ringe derselben Ordnung und verschiedener Farben werden excentrisch, nähern sich auf einer Seite einander und entfernen sich auf der anderen Seite von einander, und diejenigen von einer bestimmten Ordnungszahl berühren sich sämmtlich in einem Punkte. In der Nähe dieses Punktes erscheinen die Ringe achromatisch. Von diesem Verfahren der Achromatisirung der Interferenzstreifen machte Jamin[1]) Gebrauch, um die Dispersion des Lichtes in Gasen nachzuweisen und zu messen.

---

[1]) *Sur l'achromatisme des franges d'interference.* C. R. LXVII, 894.

Bibliographie.

Interferenz.

1665. Grimaldi, *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride,* Bononiae.

1687. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* London, liv. III, prop. 24.

1800. Young, Outlines of Experiments and Inquiries respecting Sound and Light, *Phil. Tr.,* 1800, p. 106.

1802. Young, On the Theory of Light and Colours, *Phil. Tr.,* 1802, p. 12. — *Miscell. Works,* t. I, p. 140.

1802. Young, An Account of Some Cases of the Production of Colours not hitherto described, *Phil. Tr.,* 1802, p. 387. — *Miscell. Works,* t. I, p. 170.

1804. Young, Experiments and Calculations relative to Physical Optics, *Phil. Tr.,* 1804, p. 1. — *Miscell. Works,* t. I, p. 179.

1807. Young, *Lectures on Natural Philosophy,* London.

1815. Fresnel, Premier Mémoire sur la diffraction, *OEuvres complètes,* t. I, p. 9.

1815. Fresnel, Lettre à Arago, *OEuvres complètes,* t. I, p. 64.

1816. Arago, Note sur un phénomène remarquable qui s'observe dans la diffraction de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.,* (2), I, 195. — *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 75.

1816. Fresnel, Lettre à Léonor Fresnel, *OEuvres complètes,* t. I, p. 75.

1816. Fresnel, Deuxième Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.,* (2), I, 239. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 89.

1816. Arago, Rapport sur un Mémoire de M. Fresnel relatif aux phénomènes de la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 79.

1816. Arago, Remarques sur l'influence mutuelle de deux faisceaux lumineux qui se croisent sous un très-petit angle, *Ann. de chim. et de phys.,* (2), I, 332. — *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 123.

1816. Fresnel, Supplément au deuxième Mémoire sur la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes,* t. I, p. 129.

1818. Fresnel, Note sur les effets produits par les rayons qui se croisent sous un très-petit angle, *OEuvres complètes,* t. I, p. 183.

1818. Fresnel, Note sur les franges produites par deux miroirs, *OEuvres complètes,* t. I, p. 186.

1818. Fresnel, Note sur l'application du principe de Huyghens et de la théorie des interférences aux phénomènes de la réflexion et de la diffraction, *OEuvres complètes,* t. I, p. 201.

1818. Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière, couronné par l'Académie des sciences, *Mém. de l'Acad. des sciences,* V, 339. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 247. — *Ann. de chim. et de phys.,* (2), XI, 246, 337.

1819. Arago, Rapport sur le concours relatif à la diffraction, *Ann. de chim. et de phys.,* (2), XI, 5. — *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 229. — *OEuvres complètes d'Arago,* t. X, p. 375.

1821. Fresnel, Considérations mécanique sur la polarisation de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 179, 312. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 629.

1822. Fresnel, Article *Lumière* dans le Supplément à la traduction de la cinquième édition du *Système de chimie de Th. Thompson* par Riffaut, Paris.

1822. Arago, Interférences de l'action chimique de la lumière, *OEuvres complètes*, t. X, p. 484.

1828. Brewster, Discription of a Monochromatic Lamp, *Edinb. Trans.*, t. IX, part. II, p. 433. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXVII, 437.

1833. Potter, On a Particular Modification of the Interference of Homogeneous Light, *Phil. Mag.*, (3), II, 81.

1833. Potter, Airy et Hamilton, Discussion au sujet des expériences de Potter, *Phil. Mag.*, (3), II, 161, 191, 276, 284, 371, 451.

1834. Lloyd, A New Case of Interference of Rays of Light, *Ir. Trans.*, t. XVII.

1839. Powell, On a New Case of Interference of Light, *9th Rep. of the Brit. Assoc.* — *Instit.*, VIII, 43.

1840. Potter, On Interferences as an Experimentum Crucis as to the Nature of Light, *Phil. Mag.*, (3), XVI.

1840. Powell, On Fresnel's Experiments, *10th Rep. of the Brit. Assoc.* — *Instit.*, VIII, 378.

1840. Ohm, Beschreibung einiger einfachen und leicht zu behandelnden Vorrichtungen zur Anstellung der Licht-Interferenz-Versuche, *Pogg. Ann.*, XLIX, 98.

1845. Fizeau et Foucault, Sur le phénomène des interférences entre deux rayons de lumière dans le cas de grandes différences de marche, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVI, 138. — *C. R.*, XXI, 1115.

1847. Fizeau et Foucault, Recherches sur les interférences des rayons calorifiques, *C. R.*, XXV, 447.

1848. Babinet, Rapport sur deux Mémoires de MM. Fizeau et Foucault, relatifs à l'observation d'interférences dans le cas de grandes différences de marche entre les rayons interférents, *C. R.*, XXVI, 680.

1848. Powell, On a New Case of Interference of Light, *Phil. Tr.*, 1848, p. 213. — *Proceed. of R. S.*, V, 756. — *Instit.*, XVI, 282.

1848. Stokes, On the Theory of Certain Bands seen in the Spectrum, *Phil. Tr.*, 1848, p. 213. — *Procecd. of R. S.*, V, 795. — *Instit.*, XVII, 159.

1849. A. Seebeck, Ueber die Interferenz der Wärmestrahlen, *Pogg. Ann.*, LXXVII, 574.

1850. Powell, On a Fictitious Deplacement of Fringes of Interference, *20th Rep. of the Brit. Assoc.*, p. 20. — *Instit.*, XVIII, 320.

1854. Poppe, Beobachtung eines schönen Interferenz- und Farbenphänomens beim Durchgang eines Sonnenstrahles durch eine feine mit Wasser oder Oel gefüllte Oeffnung, *Pogg. Ann.*, XCV, 481.

1855. Billet, Mémoire sur les franges d'interférence, *C. R.*, t. XLI, p. 396.

1859. Knoblauch, Ueber die Interferenz der Wärmestrahlen, *Berl. Monatsber.*, 1859, p. 565. — *Pogg. Ann.*, CVIII, 610. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 492.

1860. Dove, Ueber die Darstellung der Interferenzfarben aus den Interferenzen in verschiedener homogener Beleuchtung, *Berl. Monatsber.*, 1860, p. 104.

1861. **Billèt**, Communication relative à deux appareils qui offrent de grandes ressources pour la production et pour l'étude des franges d'interférence, *Cosmos*, XIX, 676.

1862. **Billet**, Mémoire sur les demi-lentilles d'interférence, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIV, 385.

1862. **Fizeau**, Recherches sur les modifications que subit la vitesse de la lumière dans le verre et plusieurs autres corps solides sous l'influence de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVI, 429. — *C. R.*, LIV, 1237.

1864. **Breton**, Instrument pour faire comprendre le principe des interférences, *Mondes*, V, 757.

1867. **G. Quincke**, Optische Experimentaluntersuchungen, VIII. — Ueber die verschiedenen Methoden, Lichtstrahlen interferiren zu lassen. *Pogg.*, CXXXII.

1868. **Jamin**, Sur l'achromatisme des franges d'interférence, *C. R.*, LXVII, 894.

1870. **W. Gibbs**, On tests for the perfection and parallelism of plane surfaces of glass, *Mil. Mag.*, (3), XL, 311.

1870. **Reusch**, Sur l'expérience de Wrede, *Ann. de chim.*, (4), XX, 216.

1871. **Mascart**, Sur la théorie de quelques phénomènes d'interférence, *C. R.*, LXXIII, 375.

1871. **J. J. Müller**, Beobachtungen über die Interferenz des Lichtes bei grossen Gangunterschieden, *Leipz. Ber.*, 1871.

1873. **J. J. Müller**, Beobachtungen über Interferenzen des Lichtes bei grossem Gangunterschied, *Pogg.*, CL.

1873. **Croullebois**, Étude analytique et experimentale des interférences des rayons, *C. R.*, LXXVII, 1269.

1874. **Mascart**, Sur deux appareils d'interférence, *D'Almeida* III, 1874.

Anwendungen.

1816. **Arago**, Remarques sur l'influence mutuelle de deux faisceaux lumineux qui se croisent sous un très-petit angle, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 332.

1816. **Fresnel**, Projet d'expérience sur la dilatation de l'eau, *OEuvres complètes*, t. I, p. 125.

1819. **Fresnel**, Mémoire sur la réflexion de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sciences*, XX, 195. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XVII, 316. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 691.

1822. **Fresnel**, Note sur la double réfraction du verre comprimé, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XX, 376. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 713.

1822. **Arago**, Détermination des indices de réfraction par la méthode des interférences, article *Lumière* du Supplément à la traduction de la cinquième édition du *Système de Chimie de Th. Thompson* par Riffaut.

1840. **Arago**, Sur les interférences de la lumière considérées comme moyen de résoudre diverses questions très-délicates de physique et comme servant de base à la construction de nouveaux instruments de météorologie, *C. R.*, X, 813.

1850. **Arago**, Mémoire sur des projets d'expériences destinés à compléter les résultats déjà obtenus en 1815 et années subséquentes relativement au maximum de densité de l'eau, à la réfraction de l'eau sous diverses pressions, à l'influence de la température sur la

réfraction des corps et à la réfraction de l'hydrophane imbibée de divers liquides, *C. R.*, XXI, 149. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 298.

1850. Arago, Mémoire sur la méthode des interférences appliquée à la recherche des indices de réfraction, *OEuvres complètes*, t. X, p. 312.

1854. Arago, Application du réfracteur interférentiel à la mesure de la réfraction des gaz., *Cosmos*, IV, 7, 180.

1856. Jamin, Description d'un nouvel appareil de recherches fondé sur les interférences, *C. R.*, XLII, 482.

1856. Jamin, Sur les vitesses de la lumière dans l'eau à différentes températures, *C. R.*, XLIII, 1191.

1857. Jamin, Mémoire sur la mesure des indices de réfraction des gaz, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIX, 382.

1857. Jamin, Sur les variations de l'indice de réfraction de l'eau par l'effet de la compression, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LII, 163. — *C. R.*, XLV, 892.

1857. Jamin, Mémoire lur l'indice de réfraction de la vapeur d'eau, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LII, 171.

1851—59. Fizeau, Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVII, 385. — *C. R.*, XXXIII, 349.

1862. Fizeau, Recherches sur les modifications que subit la vitesse de la lumière dans le verre et plusieurs autres corps solides sous l'influence de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVI, 429. — *C. R.*, LIV, 1237.

1862. Schröder, Ueber eine neue Methode, die sphärische Aberration mit Hülfe der Interferenz zu untersuchen, *Pogg. Ann.*, CXIII, 502.

1864. Fizeau, Recherches sur la dilatation et la double réfraction du cristal de roche échauffé, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), II, 143. — *C. R.*, LVIII, 923.

1865. Fizeau, Sur la dilatation du diamant et du protoxyde de cuivre cristallisé sous l'influence de la chaleur, *C. R.*, LX, 1161.

1867. G. Quincke, Ueber den Jamin'schen Compensator und eine neue Methode, den Brechungsexponenten von Plangläsern für verschiedene Fraunhofer'sche Linien zu bestimmen, *Pogg.*, CXXXII.

1869. M. A. Cornu, Méthode optique pour l'étude de la déformation de la surface extérieure des solides élastiques, *C. R.*, LXIX, 333.

1870. M. Croullebois, Nouvelle méthode de détermination des indices de réfraction des liquides, *Ann. de chim.*, (4), XXII, 139.

1872. J. J. Müller, Ueber die Fortpflanzung des Lichtes, *Pogg.*, CXLV.

1873. Stephan, Sur les franges d'interférence observées avec de grands instruments dirigés sur Sirius et sur plusieurs autres étoiles; conséquences qui peuvent en résulter relativement au diamètre angulaire de ces astres, *C. R.*, LXXVI.

1874. Mascart, Sur la réfraction de l'eau comprimée, *C. R.*, LXXVIII, 801. — *Pogg.*, CLIII.

1874. E. Wiedemann, Methoden zur Bestimmung des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten und Glasplatten, *Pogg.*, CLVIII.

Scintillation.

1824. Arago, Sur la scintillation des étoiles, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXVI, 431.

1847. **Arago**, De l'influence du phénomène des interférences sur la vision, *Cosmos de Humboldt*, t. III, et *OEuvres complètes d'Arago*, t. X, p. 583.
1851. **Babinet**, Sur les scintillomètre de M. Arago, *C. R.*, XXXIII, 589.
1852. **Arago**, Notice sur la scintillation, *Annuaire du Bureau des longitudes pour 1852*, p. 363. — *OEuvres complètes*, t. VII, p. 1.
1856. **Dufour**, De la scintillation des étoiles, *C. R.*, XLII, 634. — *Bullet. de Brux.*, (2), XXIII, 347, 366.
1856. **Vallée**, Note sur la scintillation des étoiles, *C. R.*, XLII, 859.
1856. **Montigny**, La cause de la scintillation ne proviendrait-elle pas des phénomènes de réfraction et de dispersion par l'atmosphère? *Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique*, XXVIII, 1. — *Bullet. de Brux.*, (2), XXIII, 731. — *Instit.*, XXIV, p. 389. — *Cosmos*, IX, 166, 191.
1856. **Secchi**, Sopra la scintillazione delle stelle, *Atti de' Nuovi Lincei*, VII, 137. — *Cosmos*, XI, 35.
1857. M. F., Twinkling of Stars, *Phil. Mag.*, (4), XIII, 301.
1860. **Dufour**, Instruction for the Better Observation of the Scintillation of the Stars, *Phil. Mag.*, (4), XIX, 216.
1861. **Liandier**, Sur la scintillation, *Cosmos*, XIX, 20.
1861. **De Portal**, Sur le temps prédit par la scintillation, *Cosmos*, XIX, 263; XX, 415.
1864. **Montigny**, Nouveau scintillomètre, *Bullet. de Brux.*, (2), XVII, 260, — *Mondes*, V, 400. — *Instit.*, XXXII, 316.
1864. **Montigny**, Recherches expérimentales sur cette question posée par Arago: la scintillation d'une étoile est-elle la même pour des observateurs diversement placés? *Bullet. de Brux.*, (2), XVII, 443. — *Mondes*, IV, 360. — *Instit.*, XXXII, 333.
1868. **Chevreul**, Sur la scintillation d'une lumière réfléchie, *C. R.*, LXVII, 973.
1868. **Jamin**, Sur la théorie de la scintillation, *C. R.*, LXVII, 938.
1870. Ch. **Montigny**, Notice sur la séparation des trajectoires décrites dans l'atmosphère par des rayons de même origine sidérale, mais de réfrangibilité différente et sur les effets de cette séparation à l'egard de la scintillation, *Bull. de Brux.*, 1870, (2), XXIX, 80.
1870. **Tarry**, Sur la théorie de la scintillation de M. Respighi, *C. R.*, LXX, 1034.
1871. **Montigny**, Scintillation des étoiles, *Instit.*, XXXIX.
1874. Ch. **Montigny**, Sur la scintillation des étoiles dans ses rapports avec la constitution de leur lumière d'après l'analyse spectrale, *Instit.*, 1874.

Elementare Theorie der Farben dünner Blättchen.

1663. **Boyle**, *Experiments and Observations upon Colours*, London. — *Works published by Shaw*, t. II, p. 70.
1665. **Hooke**, *Micrographia*, p. 48.
1704. **Newton**, *Optics*, London, liv. II.
1717. **Mariotte**, Traité de la nature des couleurs, *OEuvres complètes*, publiées à la Haye en 1740, t. I, p. 298.
1746. **Euler**, Nova theoria lucis et colorum in *Opusculis varii argumenti*, t. I, p. 179.

1752. **Euler**, Essai d'une explication physique des couleurs engendrées sur des surfaces extrêmement minces, *Mém. de Berl.*, 1752, p. 262.

1752. **Mazéas**, Sur les couleurs engendrées par le frottement des surfaces planes et transparentes, *Mém. de Berl.*, 1752, p. 248.

1763. **Dutour**, Recherches sur le phénomène des anneaux colorés, *Mém. des sav. étrang.*, IV, 285. — *Journ. de phys. de Rozier*, I, 360; II, 11, 349; V, 120, 230; VII, 330, 341.

1773. M. (**Dutour**), Mémoire sur la décomposition de la lumière dans le phénomène des anneaux colorés, *Journ. de phys. de Rozier*, III, 338.

1800. **Jordan**, *New Observations concerning the Colours of Thin Transparent Bodies, Showing these Phaenomena to be Inflections of Light*, London.

1800. **Young**, Outlines of Experiments and Inquiries respecting Sound and Light, *Phil. Trans.*, 1800, p. 106.

1802. **Young**, On the Theory of Light and Colours, *Phil. Trans.*, 1802, p. 12. — *Miscell. Works*, t. I, p. 140.

1802. **Young**, An Account of Some Cases of the Production of Colours not hitherto described, *Phil. Tr.*, 1802, p. 387. — *Miscell. Works*, t. I, p. 170.

1804. **Young**, Experiments and Calculations relative to Physical Optics, *Phil. Trans.*, 1804, p. 1. — *Miscell. Works*, t. I, p. 179.

1807. **Young**, *Lectures on Natural Philosophy*, London.

1807. **Prieur**, Considérations sommaires sur les couleurs irisées des corps réduits en pellicules minces, *Ann. de chim.*, (1), LXI, 154.

1807—10. J. **Herschel**, Experiments for Investigating the Cause of the Coloured Concentric Rings discovered by Sir Isaac Newton, *Phil. Trans.*, 1807, p. 180; 1809, p. 259; 1810, p. 149.

1808. **Hassenfratz**, Sur la colorisation des corps, *Ann. de chim.*, (1), LXVII, 5, 113.

1811. **Arago**, Mémoire sur les couleurs des lames minces, *Mém. de la Soc. d'Arcueil*, t. III, p. 223. — *OEuvr. compl.*, t. X, p. 1.

1811. **Arago**, Sur les variations singulières que présentent les anneaux colorés fournis par les vernis, *OEuvr. compl.*, t. X, p. 341.

1811. **Arago**, Sur la cause des anneaux colorés, *OEuvr. compl.*, t. X, p. 356.

1811. **Arago**, Sur les couleurs irisées de divers corps, *OEuvr. compl.*, t. X, p. 358.

1811. **Arago**, Notice historique sur les anneaux colorés, *OEuvr. compl.*, t. X, p. 363.

1815. **Knox**, On Some Phaenomena of Colours exhibited by Thin Plates, *Phil. Trans.*, 1815, p. 161.

1815. **Fresnel**, Complément au premier Mémoire sur la diffraction, *OEuvr compl.*, t. I, p. 41.

1816. **Fresnel**, Supplément au deuxième Mémoire sur la diffraction, *OEuvr. compl.*, t. I, p. 129.

1817. **Young**, article *Chromatics* dans le *Supplément à l'Encyclopédie britannique*. — *Miscell. Works*, t. I, p. 233.

1819. **Fresnel**, Résumé d'un Mémoire sur la réflexion de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XV, 379. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 685.

1819. **Fresnel**, Mémoire sur la réflexion de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sciences*, XX, 195. — *OEuvr. compl.*, t. I, p. 691.

1822. **Fresnel**, article *Lumière* dans le *Supplément à la traduction de la*

cinquième édition du Système de Chimie de Thompson par Riffaut, p. 270.

1823. Poisson, Sur le phénomène des anneaux colorés, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 337.

1823. Fresnel, Note sur le phénomène des anneaux colorés, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIII, 129.

1831. Airy, On a Remarkable Modification of Newton's Rings, *Cambr. Trans.*, IV, 219. — *Phil. Mag.*, (2), X, 141.

1832. Brewster, On a New Species of Coloured Rings produced by the Reflection of Ligt between the Two Lenses of Achromatic Compound Object-Glasses, *Edinb. Trans.*, XII, 191. — *Phil. Mag.*, (3), I, 19.

1832. Airy, On the Phaenomena of Newton's Rings when Formed between Two Transparent Substances of Different Refractive Power, *Cambr. Trans.*, IV, 409. — *Phil. Mag.*, (3), II, 120.

1839. Babinet, Sur la perte d'un demi-intervalle d'interférence qui a lieu dans la réflexion à la surface d'un milieu réfringent, *C. R.*, VIII, 708.

1840. Reade, On the Iriscop, *10th Rep. of the Brit. Assoc.* — *Inst.*, IX, 36.

1841. Jerichau, Ueber die Farben dünner Blätter und über zwei neue Instrumente, *Pogg. Ann.*, LIV, 139. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), IV, 363.

1843. Soleil, Appareil propre à l'observation des anneaux colorés à centre blanc ou noir, *Instit.*, XII, 90.

1844. Matthiessen, Sur les anneaux colorés produits dans un solide transparent limité par une surface plane combinée avec une surface courbe, *C. R.*, XVII, 710.

1848. Brücke, Ueber die Auseinanderfolge der Farben in den Newton'schen Ringen, *Pogg. Ann.*, LXXV, 582.

1849. De la Provostaye et P. Desains, Mémoire sur les anneaux colorés de Newton, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVII, 423. — *C. R.*, XXVIII, 353.

1850. Cauchy, Rapport sur un Mémoire de MM. de la Provostaye et P. Desains concernant les anneaux colorés de Newton, *C. R.*, XXX, 498.

1850. Wilde, Ueber die Unhaltbarkeit der bisherigen Theorie der Newton'schen Farbenringe, *Pogg. Ann.*, LXXX, 407. — *Phil. Mag.*, (3), XXXVII, 451.

1850. Wilde, Beschreibung des Gyreidometers, eines Instruments zur genauen Messung der Farbenringe, *Pogg. Ann.*, LXXXI, 264.

1850. Löve, Ueber die Darstellung der Newton'schen Farbenringe, *Dingler's Polytechnisches Journal*, CXIX, 316.

1851. Wilde, Die Theorie der Farben dünner Blättchen, *Pogg. Ann.*, LXXXII, 18, 188.

1851. Wilde, Ueber die Interferenzfarben, die zwischen zwei Glasprismen oder einem solchen Prisma und einer planparallelen Glasplatte sich bilden können, *Pogg. Ann.*, LXXXIII, 541.

1852. Jamin, Mémoire sur les anneaux colorés, *Ann. de phys. et de chim.*, (3), XXXVI, 158. — *C. R.*, XXXV, 14.

1853. Plateau, Sur une production curieuse d'anneaux colorés, *Bullet. de Brux.*, XX, 3.

1853. Ungerer, Die Farben dünner Blättchen in einem einfachen Experiment, *Dingler's Polytechnisches Journal*, CXXVII, 464.

1854. Haidinger, Die Interferenzlinien am Glimmer. — Berührungsringe und Plattenringe, *Win. Ber.*, XIV.

1855. Carrère, Deux procédés à l'aide desquels on peut produire avec une grande intensité le phénomène des anneaux colorés, *C. R.*, XLI, 1046; XLII, 689.

1856. Eisenlohr, Apparat zur Erzeugung der Newton'schen Farbenringe, *Berichte der Freiburger Gesellschaft*, I, 2.

1857. Van der Willigen, Ueber die Constitution der Seifenblasen, *Pogg. Ann.*, CII, 629.

1861. Place, Newton's Ringe durchs Prisma betrachtet, *Pogg. Ann.*, CXIV, 504.

1862. Fizeau, Recherches sur les modifications que subit la vitesse de la lumière dans le verre et plusieurs autres corps solides sous l'influence de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVI, 429. — *C. R.*, LV, 1237.

1864. Van der Willigen, Ueber ein System von geradlinigen Fransen, welche gleichzeitig mit dem Newton'schen Ringe zu beobachten sind, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 588.

1866. Broughton, On Some Properties of Soap-Bubbles, *Phil. Mag.*, (4), XXXI, 228.

1867. A. Wangerin, Die Theorie der Newton'schen Farbenringe, *Pogg.*, CXXXI.

1867. D. Brewster, On the colours of the soap-bubble, *Edinb. Trans.*, XXIV.

1873. E. Mach, Ueber die Stefan'schen Nebenringe am Newton'schen Farbenglase und einige verwandte Interferenzerscheinungen, *Pogg.*, CL.

1874. P. Desains, Recherches expérimentales sur les anneaux colorés de Newton, *C. R.*, LXXVIII, 219.

Ringe an der Oberfläche der Metalle.

1768. Priestley, Account of Rings consisting of all Prismatic Colours, made by Electrical Explosions on the Surfaces of Pieces of Metal, *Phil. Trans.*, 1768, p. 68.

1785. Delaval, Experimental Inquiry into the Cause of Permanent Colours of Opake Bodies, *Trans. of the Soc. of Manchester*, II, 147.

1819. Fusinieri, Richerche sui colori che acquistano i metalli riscaldati, *Giornale di Fisica da Brugnatelli*, decade II, vol. II.

1819. Fusinieri, Sui colori delle lamine sottili et sui loro rapporto coi colori prismatici, *Giornale di Fisica da Brugnatelli*, decade II, vol. II.

1820. Fusinieri, Sugli effetti analoghi del gas ossigeno et del cloro nel coloramento delle lamine sottili, *Giornale di Fisica da Brugnatelli*, decade II, vol. III, p. 291, et vol. IV, p. 37.

1826. Nobili, Sur une nouvelle classe de phénomènes électro-chimiques, *Arch. de Genève*, XXIII, XXIV, XXXVI. — *Memorie ed osservazioni*, t. I, p. 18.

1830. Nobili, Mémoire sur les couleurs en général et en particulier sur une nouvelle échelle chromatique déduite de la métallochromie, *Arch. de Genève*, XLIV, XLV. — *Memorie ed osservazioni*, t. I, p. 162.

1834. Nobili, Nouvelles observations sur les apparences électro-chimiques, *Arch. de Genève,* LVI.

1845. E. Becquerel, Sur les anneaux colorés produits par le dépôt des oxydes métalliques sur les métaux, *Ann. de chim. et de phys.,* (3), XIII, 342.

1845. Du Bois-Reymond et Beetz, Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe, *Pogg. Ann.,* LXXI, 71.

1848. Hansmann, Ueber das Irisiren der Mineralien, *Göttinger Nachrichten,* 1848, p. 34.

Interferenzen dicker Platten.

1817. Brewster, On a New Species of Coloured Fringes produced by the Reflection of Light between Two Plates of Parallel Glass of Equal Thickness, *Edinb. Trans.,* VII.

1857. Jamin, Sur les variations de l'indice de réfraction de l'eau par l'effet de la compression, *Ann. de chim. et de phys.,* (3), LII, 163. — *C.R.,* XLV, 892.

1857. Jamin, Mémoire sur l'indice de réfraction de la vapeur d'eau, *Ann. de chim. et de phys.,* (3), LII, 171.

Farben gemischter Blättchen.

1802. Young, An Account of Some Cases of the Production of Colours not hitherto described, *Phil. Trans.,* 1802, p. 387.

1838. Brewster, On the Colours of Mixed Plates, *Phil. Trans.,* 1838, p. 73. — *Instit.,* VI, 262.

1848. Powell, On a New Case of Interference of Light, *Phil. Trans.,* 1848, p. 213. — *Proceed. of R. S.,* V, 756. — *Instit.,* XVI, 282.

1848. Stokes, On the Theory of Certain Bands seen in the Spectrum, *Phil. Trans.,* 1848, p. 213. — *Proceed. of R. S.,* V, 795. — *Instit.,* XVII, 159.

1868. Billet, Note sur une disposition qui permet d'acroître indéfinement la sensibilité du compensateur d'interférences, *C. R.,* LXVII, 1000.

1870. M. Croullebois, Note sur le compensateur à liquide, *Ann. de chim.,* (4), XXII, 509.

IV.

Zusammensetzung der Lichtschwingungen.

51. Excursionen und Vibrationsgeschwindigkeiten.

Die Excursionen oder Verschiebungen der schwingenden Theilchen sowie die Geschwindigkeiten derselben nach irgend einer Richtung genommen werden als Functionen der Zeit durch trigonometrische Reihen dargestellt (17) und es wird angenommen, dass diese Reihen sich auf ihre ersten Glieder reduciren (40), eine Annahme, welche darauf hinausläuft, dass die wirkenden Kräfte den Excursionen der sich bewegenden Theilchen proportional sind. Hierbei kann das Glied, auf welches die Reihe reducirt wird, einen Sinus oder Cosinus enthalten, je nach der Annahme, welche über den Nullpunkt der Zeit gemacht wird.

Die folgenden Formeln sind zuerst von Fresnel in seinem *Mémoire sur la diffraction* 1818 entwickelt worden.

Wir setzen einfache Schwingungen, d. i. homogenes Licht, voraus, und beziehen die Bewegung der Molecüle auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, als dessen Ursprung wir die Gleichgewichtslage des Molecüls annehmen. Wir bezeichnen durch ξ, η, ζ die Verschiebungen der Molecüle parallel zu den Axen, durch t die Zeit und durch a, b, c, m, φ, χ, ψ constante Grössen. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a \cos m\,(t - \varphi) \\ \eta &= b \cos m\,(t - \chi) \\ \zeta &= c \cos m\,(t - \psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A).$$

Die Constante m ist in allen Gleichungen dieselbe, da die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{m}$ ist, auf welche Gerade immer die Bewegung sich projicirt. Die Coëfficienten a, b, c sind die Amplituden der Bewegung nach den drei Axen genommen.

Wir haben die Verschiebung durch einen *cosinus* ausgedrückt und müssen folglich die Vibrationsgeschwindigkeit durch einen *sinus* ausdrücken; würden wir den Anfang der Zeit um $\frac{\pi}{2m}$ verschieben, so würde das Umgekehrte der Fall sein.

Aus den Gleichungen (A) kann die Bewegungscurve der Molecüle berechnet werden. Man erhält:

$$(B)\quad \begin{cases} \frac{\xi}{a} = \cos m\varphi \cos mt + \sin m\varphi \sin mt \\ \frac{\eta}{b} = \cos m\chi \cos mt + \sin m\chi \sin mt \\ \frac{\zeta}{c} = \cos m\psi \cos mt + \sin m\psi \sin mt. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (B) folgt:

$$\sin mt = \frac{\frac{\xi}{a}\cos m\chi - \frac{\eta}{b}\cos m\varphi}{\sin m(\varphi - \chi)}$$

$$\cos mt = \frac{\frac{\xi}{a}\sin m\chi - \frac{\eta}{b}\sin m\varphi}{\sin m(\chi - \varphi)}$$

und wenn man die beiden letzten Gleichungen quadrirt und addirt:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{2\xi\eta}{ab}\cos m(\chi - \varphi) = \sin^2 m(\chi - \varphi).$$

Diese Gleichung stellt die Projection der Bewegungslinie des Molecüls auf die $\xi\eta$-Ebene dar und gehört einer Ellipse an. Setzen wir die für $\sin mt$ und $\cos mt$ gefundenen Ausdrücke in die dritte Gleichung (A), so erhalten wir

$$\frac{\xi}{a}\sin m(\chi - \psi) + \frac{\eta}{b}\sin m(\psi - \varphi) + \frac{\zeta}{c}\sin m(\varphi - \chi) = 0,$$

welche Gleichung von t unabhängig ist und eine Ebene darstellt. Die Bewegungscurve ist also eben und projicirt sich auf eine Ebene als Ellipse, d. h. sie ist selbst eine Ellipse. Beschränken wir uns also auf die bisher behandelten Phänomene der Optik, so ist alles, was wir sagen können, dies, dass die Bewegungslinie eines Molecüls eine irgend wie im Raume orientirte Ellipse ist; später wird uns das Studium der Lichtpolarisation weitere Aufschlüsse über die Gestalt und Orientation dieser Curve liefern.

Die Geschwindigkeitscomposanten parallel zu den Axen sind:

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \alpha \sin m\,(t - \varphi)$$

$$v = \frac{d\eta}{dt} = \beta \sin m\,(t - \chi)$$

$$w = \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \sin m\,(t - \psi),$$

wo

$$-ma = \alpha, \; -mb = \beta, \; -mc = \gamma$$

gesetzt ist. Die Coëfficienten α, β, γ sind die Maximalgeschwindigkeiten der drei Bewegungscomposanten.

Man giebt diesen Ausdrücken eine bequemere Form, indem man die Schwingungsdauer T einführt. Es wird

$$T = \frac{2\pi}{m}$$

$$u = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t - \varphi}{T}\right)$$

$$v = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t - \chi}{T}\right)$$

$$w = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t - \psi}{T}\right).$$

Wir wollen nun die Geschwindigkeitscomposanten eines Punktes M berechnen, welcher von dem betrachteten Punkte durch eine Distanz gleich R getrennt ist, indem wir R so klein voraussetzen, dass auf die Abnahme der Intensität keine Rücksicht genommen zu werden braucht. Ist V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so können wir sagen: Die Bewegung in M zur Zeit t ist identisch mit der Bewegung in O zur Zeit $t - \frac{R}{V}$. Wir haben also für die Geschwindigkeitscomposanten in M

$$u' = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{R}{V}}{T} - \frac{\varphi}{T}\right)$$

$$v' = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{R}{V}}{T} - \frac{\chi}{T}\right)$$

$$w' = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{R}{V}}{T} - \frac{\psi}{T}\right).$$

Setzen wir

$$VT = \lambda$$

$$V\varphi = g \qquad V\chi = h \qquad V\psi = k,$$

so wird

$$u = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g}{\lambda}\right)$$
$$v = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h}{\lambda}\right)$$
$$w = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k}{\lambda}\right)$$
$$u' = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g + R}{\lambda}\right)$$
$$v' = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h + R}{\lambda}\right)$$
$$w' = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k + R}{\lambda}\right).$$

Wir sehen, dass die Composanten u', v', w' den Composanten u, v, w gleich oder entgegen gesetzt werden, wenn R ein gerades oder ein ungerades Vielfache einer halben Wellenlänge beträgt.

52. Intensität.

Als Maass der Intensität des Lichtes, bezogen auf irgend einen Moment, nimmt man die lebendige Kraft der Bewegung an, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist.

Die Intensität, bezogen auf die Zeiteinheit, ist also, wenn die Geschwindigkeit durch Γ bezeichnet wird,

$$\int_0^1 \Gamma^2 dt$$

oder (51)

$$\int_0^1 u^2 dt + \int_0^1 v^2 dt + \int_0^1 w^2 dt.$$

Betrachten wir eines dieser drei Integrale, z. B. $\int_0^1 u^2 dt$ und ersetzen wir u durch seinen Werth (51), so wird dieses Integral

$$\alpha^2 \int_0^1 \sin^2 m\,(t - \varphi)\, dt.$$

Es ist nun

$$\int_0^T \sin^2 m\,(t - \varphi)\, dt = \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 2m\,[t - \varphi]}{2}\right) dt = \frac{T}{2}.$$

Das Integral für die Intensität wird also innerhalb der Grenzen 0 und T

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, \frac{T}{2}.$$

Setzen wir ferner

$$n T = 1,$$

so wird die Lichtintensität bezogen auf die Zeiteinheit

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\frac{nT}{2} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Also: Die Intensität in der Zeiteinheit wird gemessen durch die halbe Quadratsumme der drei Maximalgeschwindigkeiten der Vibrationsbewegung. Ferner: Die Intensitäten zweier Vibrationsbewegungen in der Zeiteinheit verhalten sich bei gleicher wie bei ungleicher Schwingungsdauer gerade wie die Quadratsummen der drei Maximalgeschwindigkeiten.

In der Photometrie nennt man zwei Lichtquellen gleich intensiv, wenn sie in gleichen Distanzen gleiche Erleuchtungen hervorbringen, und man nennt eine Lichtquelle b doppelt so intensiv, als eine Lichtquelle a, wenn zwei Lichtquellen a zusammengenommen dieselbe Intensität geben, wie b. Wir wollen prüfen, ob die von uns über das Maass der Intensität gemachte Annahme hiermit übereinstimmt.

Gesetzt, die Lichtquelle a bringe in irgend einem Momente an irgend einer Stelle eine Geschwindigkeit γ in irgend einer Richtung hervor, die Lichtquelle b eine Geschwindigkeit γ' in irgend einer anderen Richtung. Die durch die Lichtquelle a hervorgebrachte Intensität wird dann, wenn wir dieselbe durch die lebendige Kraft der Vibrationsbewegung messen, sein

$$I = \int\int \gamma^2 \, dt \, d\sigma,$$

wo sich eine Integration auf die Zeit, die andere auf ein Stück der erleuchteten Fläche, deren Element wir $d\sigma$ nennen, bezieht. Ebenso wird die durch die Lichtquelle b hervorgebrachte Intensität sein

$$I' = \int\int \gamma'^2 \, dt \, d\sigma.$$

Die den beiden Erregungen entsprechende resultirende Geschwindigkeit ist

$$\Gamma^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + 2\gamma\gamma' \cos\vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, welchen die beiden Geschwindigkeiten γ und γ' einschliessen. Wir haben also für die resultirende Intensität

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int (\gamma^2 + \gamma'^2 + 2\gamma\gamma' \cos\vartheta) \, dt \, d\sigma \\ &= \int\int (\gamma^2 + \gamma'^2) \, dt \, d\sigma + \int\int 2\gamma\gamma' \cos\vartheta \, dt \, d\sigma. \end{aligned}$$

Bedenken wir, dass $\cos\vartheta$ sowohl der Zeit als dem Raume nach bald positiv, bald negativ ist (28, 29), und setzen wir demgemäss

$$\int\int 2\gamma\gamma' \cos\vartheta \, dt \, d\sigma = 0,$$

so wird

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int (\gamma^2 + \gamma'^2) \, dt \, d\sigma \\ &= I + I'. \end{aligned}$$

Es summiren sich also die Intensitäten.

53. Zusammensetzung der Schwingungen.

Wenn in einem Punkte Vibrationsbewegungen von verschiedener Phase und Intensität, aber gleicher Periode zusammentreffen, so ist die resultirende Bewegung eine Vibrationsbewegung von derselben Periode. Dies kann wie folgt bewiesen werden. Seien die verschiedenen zusammentreffenden Bewegungen (51) gegeben durch

$$u = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g}{\lambda}\right), \quad u' = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g'}{\lambda}\right)$$
$$v = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h}{\lambda}\right), \quad v' = \beta' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h'}{\lambda}\right)$$
$$w = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k}{\lambda}\right), \quad w' = \gamma' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k'}{\lambda}\right)$$

u. s. w.

Bezeichnen wir durch U, V, W die Geschwindigkeitscomposanten der resultirenden Bewegung, so ist

$$U = \Sigma(u), \quad V = \Sigma(v), \quad W = \Sigma(w),$$

also

$$U = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda}\right) - \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)$$
$$V = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\beta \cos 2\pi \frac{h}{\lambda}\right) - \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\beta \sin 2\pi \frac{h}{\lambda}\right)$$
$$W = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\gamma \cos 2\pi \frac{k}{\lambda}\right) - \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \Sigma\left(\gamma \sin 2\pi \frac{k}{\lambda}\right).$$

Diese Ausdrücke können in der That auf die Form

$$U = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{G}{\lambda}\right)$$
$$V = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{H}{\lambda}\right)$$
$$W = C \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{K}{\lambda}\right)$$

gebracht werden, wenn man

$$A \cos 2\pi \frac{G}{\lambda} = \Sigma\left(\alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)$$
$$A \sin 2\pi \frac{G}{\lambda} = \Sigma\left(\alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)$$

u. s. w., setzt. Man hat dann

$$A^2 = \left(\Sigma\, \alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)^2$$

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{G}{\lambda} = \frac{\Sigma\, \alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda}}{\Sigma\, \alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda}}$$

u. s. w. Die Intensität der resultirenden Bewegung ist

$$A^2 + B^2 + C^2,$$

d. i.

$$\left(\Sigma\, \alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \beta \cos 2\pi \frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \beta \sin 2\pi \frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \gamma \cos 2\pi \frac{k}{\lambda}\right)^2 + \left(\Sigma\, \gamma \sin 2\pi \frac{k}{\lambda}\right)^2.$$

54. Anwendung auf die Interferenz.

Wir beschränken uns auf den Fall, wo zwei Strahlen desselben Ursprunges ungleiche Wege durchlaufen, und sich in einem Punkte unter einem sehr kleinen Winkel treffen.

Wir haben für die Geschwindigkeiten der beiden Vibrationsbewegungen (51)

$$u = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g}{\lambda}\right) \qquad u' = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g+\delta}{\lambda}\right)$$

$$v = \beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h}{\lambda}\right) \qquad v' = \beta' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{h+\delta}{\lambda}\right)$$

$$w = \gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k}{\lambda}\right) \qquad w' = \gamma' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k+\delta}{\lambda}\right),$$

also (53)

$$A^2 = \left(\alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda} + \alpha' \cos 2\pi \frac{g+\delta}{\lambda}\right)^2 + \left(\alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda} + \alpha' \sin 2\pi \frac{g+\delta}{\lambda}\right)^2$$

$$= \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$B^2 = \beta^2 + \beta'^2 + 2\beta\beta' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$C^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + 2\gamma\gamma' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Die resultirende Intensität ist

$$A^2 + B^2 + C^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$
$$+ 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus zwei Theilen, deren erster vom Gangunterschiede $\frac{\delta}{\lambda}$ unabhängig ist.

Wenn die Coëfficienten α, β, γ und α', β', γ' bezüglich gleiche Vorzeichen haben, d. i. wenn die interferirenden Strahlen nur Intensitätsveränderungen erleiden, nicht aber, wie dies z. B. bei Reflexionen der Fall sein kann, Aenderungen im Vorzeichen der Vibrationsgeschwindigkeiten, so ist folglich die Intensität der resultirenden Bewegung ein Maximum oder Minimum, je nachdem

$$\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = +1$$

oder

$$\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = -1,$$

also, je nachdem die Wegdifferenz δ einer geraden oder ungeraden Zahl halber Wellenlängen gleich ist. Umgekehrt verhält es sich, wenn die Grösse $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ negativ ist.

Betrachten wir insbesondere den Fall geradliniger und gleich gerichteter Vibrationen. Wir erhalten für die Vibrationsgeschwindigkeit des resultirenden Strahles

$$U = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{g + \varepsilon}{\lambda}\right),$$

wo (53)

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\tang 2\pi \frac{g + \varepsilon}{\lambda} = \frac{\alpha \sin 2\pi \frac{g}{\lambda} + \alpha' \sin 2\pi \frac{g + \delta}{\lambda}}{\alpha \cos 2\pi \frac{g}{\lambda} + \alpha' \cos 2\pi \frac{g + \delta}{\lambda}},$$

oder einfacher

$$\tang 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}}.$$

Der grösste Werth der resultirenden Intensität A^2 ist $(\alpha + \alpha')^2$, der kleinste $(\alpha - \alpha')^2$. Bei gleichen Intensitäten der interferirenden Strah-

len ist das Minimum der resultirenden Intensität Null, das Maximum gleich dem Vierfachen der Intensität der interferirenden Strahlen.

Die Intensitäten summiren sich, es wird

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2,$$

wenn

$$\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 0,$$

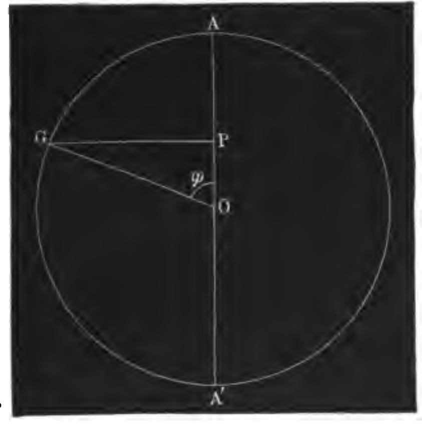
d. i. wenn der Gangunterschied $\frac{1}{4}$ oder ein ungerades Vielfaches dieses Bruches beträgt.

Wir haben vorausgesetzt, dass die interferirenden Strahlen von ein und derselben Lichtquelle ausgehen; nehmen wir aber nunmehr an, dass dieselben von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgehen. In diesem Falle ändert sich die Phasendifferenz beständig (28), weshalb die Grösse $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ während einer sehr kleinen Zeit alle Werthe zwischen $+1$ und -1 durchläuft, so dass wir den mittleren Werth dieser Grösse gleich Null annehmen können. In diesem Falle wird also die resultirende Intensität der Summe der Intensitäten der interferirenden Strahlen gleich sein (28, 52).

55. Synthetische Darstellung der Zusammensetzung der Vibrationsbewegungen.

Auf der Kreislinie AGA' (Fig. 41) bewege sich der Punkt G mit der constanten Geschwindigkeit V. Hierbei bewegt sich die Projection P des Punktes G auf dem Durchmesser AA' mit variabler Geschwindigkeit. Der Punkt G hat in jedem Momente eine nach O gerichtete Acceleration gleich $\frac{V^2}{r}$, wenn r der Radius des Kreises ist. Dieselbe zerlegt sich parallel und senkrecht zu AA' in zwei variable Composanten. Die Composante parallel zu AA' ist

Fig. 41.



$$\frac{V^2}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{V^2}{r^2} \cdot x,$$

wenn $PO = x$ gesetzt wird. Die Beschleunigung des Punktes P ist also stets nach O gerichtet und der Entfernung x des Punktes P von O proportional.

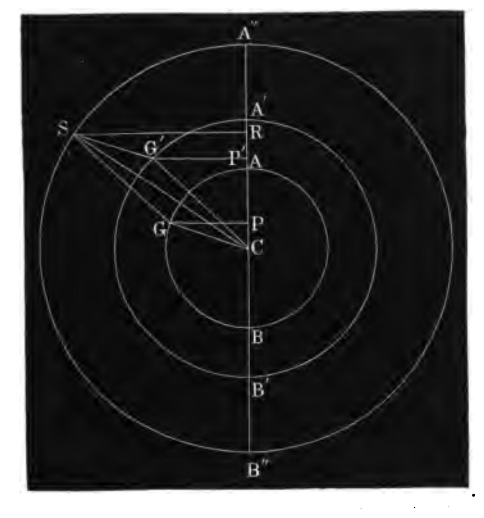
Der Punkt P befindet sich in einer sogenannten harmonischen Bewegung oder einfachen Pendelbewegung, welche wir bei den Lichtschwingungen voraussetzen (40). Aus Fig. 41 ergiebt sich unmittelbar für die Geschwindigkeit des Punktes P

$$v = V \cdot \sin\varphi.$$

Nehmen wir nun an, ein Punkt C (Fig. 42) erfahre gleichzeitig zwei Anregungen zu harmonischen Bewegungen längs der Geraden $A'B'$, so dass seine resultirende Geschwindigkeit in jedem Momente der Summe der den einzelnen Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten gleichkommt und setzen wir voraus, dass die beiden Bewegungen in der Schwingungszeit, d. i. in der Umlaufszeit der Hülfspunkte G (Fig. 41) übereinstimmen, nicht aber in der Amplitude, d. i. dem Durchmesser der Hülfskreise, und nicht in der Phase, d. i. der Grösse des Winkels φ.

Seien (Fig. 42) AB, $A'B'$ die Amplituden der beiden Bewegungen, G, G' die beiden Hülfspunkte in irgend einem Momente der Bewegung, P, P' die den beiden Bewegungen entsprechenden Lagen des schwingenden Punktes. Die wirkliche Entfernung desselben von der Ruhelage C ist dann $PC + P'C$. Die Phasendifferenz der beiden Bewegungen ist

Fig. 42.



$$\varepsilon = GCG'.$$

Dieser Winkel bleibt während der Bewegung constant, da die Umlaufszeiten der Punkte G und G' als gleich gross angenommen sind. Construiren wir das Parallelogramm $GCG'S$, welches während der Bewegung der Gestalt nach ungeändert bleibt, so ist ersichtlich, dass

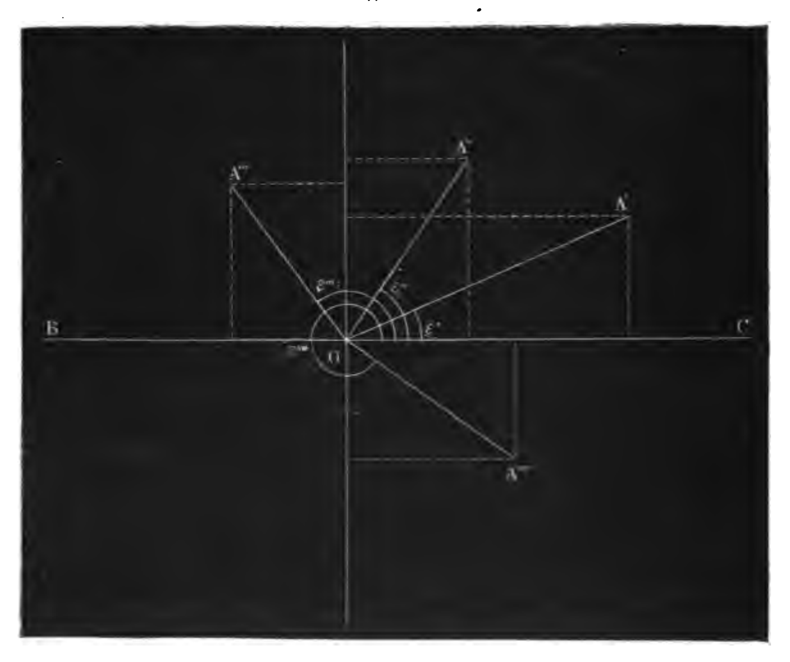
$$PC + P'C = RC,$$

wenn R die Projection des Punktes S auf die Verlängerung von AB ist. R ist also die resultirende Lage des schwingenden Punktes. Da der Punkt S sich auf dem Kreise $A''SB''$ mit constanter Geschwindigkeit in derselben Zeit einmal herumbewegt, wie G und G', so folgt: Die resultirende Bewegung ist wieder eine harmonische Bewegung, und ferner: Construirt man ein Parallelogramm aus zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel so, dass dieser Winkel der Phasendifferenz der componirenden Bewegungen und die Seiten den Amplituden derselben gleich sind, so giebt, wie bei der Zusammensetzung von Kräften, die Diagonale

des Parallelogrammes die resultirende Amplitude, während die Phasendifferenz zwischen der resultirenden Bewegung und einer der componirenden durch den Winkel der Diagonale mit der entsprechenden Seite des Parallelogrammes gegeben ist.

Sind beliebig viele Schwingungen zusammenzusetzen, so wird man von einem Punkte O (Fig. 43) gerade Linien OA', OA'', OA'''... auftragen, welche den einzelnen Amplituden proportional sind. Der Winkel zwischen zwei Geraden OA wird der zwischen den beiden Schwingungen bestehenden Phasendifferenz proportional sein, so dass

Fig. 43.



einer Phasendifferenz von einer Viertelschwingung ein rechter Winkel, Phasendifferenzen gleich $\frac{T}{2}$, T, $\frac{5T}{4}$, ... Winkel gleich 180°, 360°, 450° entsprechen werden. Man wird dann verfahren, wie bei der Zusammensetzung von Kräften. Ist ε der Winkel, welchen eine der Linien OA mit irgend einer durch O gehenden Geraden, BC, einschliesst, so zerlegt man zunächst OA in $OA \,.\, cos\,\varepsilon$ und $OA \,.\, sin\,\varepsilon$ parallel und senkrecht zu BC und hat dann für die Grösse der Resultirenden

$$R^2 = [\Sigma\ (OA\ cos\,\varepsilon)]^2 + [\Sigma\ (OA\ sin\,\varepsilon)]^2.$$

Wir fügen noch den folgenden, von Poinsot herrührenden Satz bei, welcher oft bei der Zusammensetzung der Schwingungen mit Hülfe der eben abgeleiteten Theorie von Nutzen ist:

Die Resultante von m durch gerade Linien dargestellten Kräften, welche von einem Punkte O ausgehen, ist von diesem Punkte aus nach dem Schwerpunkte G eines Systems von m gleichen Körpern gerichtet, die an den Endpunkten jener Linien liegen, und die Grösse der Resultirenden beträgt das $m$fache der Entfernung OG.

56. Totalintensität des interferirenden Lichtes.

Wir betrachten das aus abwechselnd hellen und dunkeln Streifen bestehende Interferenzphänomen, welches durch zwei identisch schwingende Lichtpunkte auf einem Schirme hervorgebracht wird, wie bei dem Fresnel'schen Spiegelversuche (18). Einem Maximum der Intensität entspricht das Vierfache der durch einen der Lichtpunkte hervorgebrachten Intensität, die Minima sind Null (55). Wir wollen nun die Gesammtintensität längs der Breite eines hellen und eines darauf folgenden dunkeln Streifens berechnen. Ist α die einem der beiden Lichtpunkte entsprechende Maximalvibrationsgeschwindigkeit auf dem Schirme, so ist die entsprechende Intensität daselbst α^2 und würden die von den beiden Lichtpunkten herrührenden Intensitäten sich einfach summiren, wie dies die geometrische Optik voraussetzt, so wäre die Intensität in einem Punkte des Schirmes $2\alpha^2$ und die Gesammtintensität längs der Breite eines hellen und darauf folgenden dunkeln Streifens

$$I_1 = 2\alpha^2 \Delta\alpha,$$

wenn durch $\Delta\alpha$ die Breite des Doppelstreifens bezeichnet wird. Da jedoch die Strahlen interferiren, ist die Intensität in einem Punkte des Schirmes (55)

$$2\alpha^2 + 2\alpha^2 \cos\varepsilon,$$

wenn durch ε die Phasendifferenz der interferirenden Strahlen bezeichnet wird und die Gesammtintensität längs der Breite des Doppelstreifens:

$$I_2 = \int_x^{x+\Delta x} (2\alpha^2 + 2\alpha^2 \cos\varepsilon)\, dx,$$

wenn x die Entfernung vom Centralstreifen oder dem Orte der Wegdifferenz gleich Null bedeutet.

ε ist eine lineare Function von x (19) und wir können

$$\varepsilon = Kx$$

setzen, wo K eine Constante bedeutet, woraus sich ergiebt

$$K\Delta x = 2\pi.$$

Führen wir die Integration aus, so wird

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\alpha^2 \varDelta x + \int_x^{x+\Delta x} 2\alpha^2 \cos Kx \,.\, dx \\
&= 2\alpha^2 \varDelta x + \frac{2\alpha^2}{K} [\sin K(x + \varDelta x) - \sin Kx] \\
&= 2\alpha^2 \varDelta x \\
&= I_1.
\end{aligned}
$$

Es geht also durch die Interferenz nichts an Intensität oder lebendiger Kraft verloren.

Bibliographie.

1818. Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière, couronné par l'Académie des sciences, *Mém. de l'Acad. des sciences,* V, 339. — *Ann. de chim. et de phys.,* (2), XI, 246. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 286.

1818. Fresnel, Supplément au Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, *OEuvres complètes,* t. I, p. 488.

V.

Fortpflanzung des Lichtes in einem isotropen Mittel.

57. Combination des Princips von Huyghens und des Princips der Interferenz.

Seit Huyghens (10) betrachtet man jeden Punkt einer sich fortpflanzenden Welle oder einer reflectirenden oder brechenden Fläche als ein Vibrationscentrum. Während Huyghens die Wirkung der Elementarwellen nur längs der sie einhüllenden Fläche betrachtete und annahm, dass nur an diesem Orte eine merkliche Wirkung vorhanden sei, führte später Fresnel das Princip der Interferenz der Elementarwellen in die Wissenschaft ein. Hierdurch hörten die Beugungserscheinungen auf, eine Ausnahme von den allgemeinen Gesetzen der Lichtfortpflanzung zu machen; die Gesetze der Fortpflanzung, Reflexion, Brechung und Beugung des Lichtes liessen sich in gleicher Weise aus der Interferenz der Elementarwellen ableiten.

Wir wollen uns dem Studium dieser allgemeinen Theorie zuwenden und in diesem Abschnitte zunächst den Fall behandeln, wo sich das Licht in einem unendlich ausgedehnten, isotropen Mittel ohne Reflexion und Brechung fortpflanzt.

Wir nehmen also statt der directen Fortpflanzung des Lichtes an, dass von jedem Punkte einer sich fortpflanzenden Welle Elementarwellen ausgehen, und betrachten die Bewegung eines äusseren Punktes als hervorgehend aus der Interferenz sämmtlicher Elementarbewegungen. Es wird sich dann in jedem einzelnen Falle um die Berechnung des Resultates dieser Interferenz handeln.

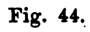
Nun nöthigen uns die Erscheinungen der Fortpflanzung des Lichtes über die Natur der Elementarwellen, welche als von den einzelnen Punkten der primitiven Welle ausgehend gedacht werden, eine Hypothese

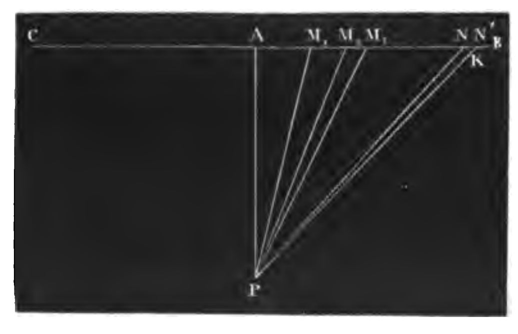
zu machen. Ein in den Gang der Lichtstrahlen gebrachter undurchsichtiger und nicht reflectirender Schirm übt keinerlei Einfluss auf die Lichtbewegung innerhalb des Raumes zwischen der Lichtquelle und dem Schirme, es treten daselbst keine Beugungserscheinungen auf. Wir nehmen aus diesem Grunde an, dass jeder Punkt der primitiven Welle nur jenseits der tangirenden Ebene dieses Punktes eine Bewegung hervorrufe. Nach dieser Annahme betrachten wir die Vibrationsbewegung jener Theile der Elementarwelle, welche der tangirenden Ebene sehr nahe liegen, als verschwindend, und werden zu der weiteren Annahme geführt, dass die Intensität der Vibrationsbewegung der Elementarwelle längs derselben auf der der Lichtquelle abgekehrten Seite der primitiven Welle in dem Maasse zunehme, als man sich von der tangirenden Ebene entfernt.

Die mathematischen Ableitungen dieses und des folgenden Abschnittes beruhen wesentlich auf dem Satze, dass die Summe einer Reihe abwechselnd positiver und negativer numerisch abnehmender Glieder sich auf einen Bruchtheil des ersten Gliedes der Reihe reducirt.

58. Wirkung einer geradlinigen Welle auf einen äusseren Punkt.

Betrachten wir in einem unendlich ausgedehnten isotropen Mittel eine Welle, deren Entfernung vom leuchtenden Punkte so gross ist, dass sie für eben genommen werden kann: Betrachten wir auf dieser eine Gerade BC (Fig. 44), und fragen wir nach der Wirkung dieser Geraden auf einen äusseren Punkt, P.


Fig. 44.



Sei $PA \perp BC$, $PA = b$, heisse nach Lamé A der Pol von BC in Bezug auf P und mögen die Punkte M_1, M_2, ... so liegen, dass die Differenz der Abstände zweier auf einander folgender Punkte M vom Punkte P gleich einer halben Wellenlänge ist. Durch die Punkte M zerfällt BC in Elemente, welche wir Elementarbogen nennen wollen.

Betrachten wir zunächst Elementarbogen, welche dem Pole sehr nahe liegen. Wir haben:

$$AM_1 = z_1 \qquad AM_2 = z_2 \qquad AM_3 = z_3 \ldots$$

$$PM_1 = b + \frac{\lambda}{2} \quad PM_2 = b + \frac{2\lambda}{2} \quad PM_3 = b + \frac{3\lambda}{2} \dots$$

$$\left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + z_1^2,$$

ferner unter Vernachlässigung des Quadrates der Wellenlänge

$$z_1 = \sqrt{b\lambda}$$
$$z_2 = \sqrt{2b\lambda}$$
$$z_3 = \sqrt{3b\lambda}$$
$$\dots\dots$$

und schliesslich

$$AM_1 = z_1 = \sqrt{b\lambda}$$
$$M_1 M_2 = z_2 - z_1 = \sqrt{b\lambda}\,(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$
$$M_2 M_3 = z_3 - z_2 = \sqrt{b\lambda}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$
$$M_3 M_4 = z_4 - z_3 = \sqrt{b\lambda}\,(\sqrt{4} - \sqrt{3})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die Länge der Elementarbogen nimmt also in der Nähe des Poles rasch ab.

Suchen wir nun die Länge eines vom Pole entfernten Elementarbogens, NN'. Wir haben

$$NK \perp PN'$$
$$PN' = R$$
$$\Delta APN' \sim \Delta NN'K$$
$$NN' = KN' \frac{PN'}{AN'}$$

und näherungsweise

$$KN' = PN' - PN = \frac{\lambda}{2}$$

$$NN' = \frac{\lambda}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - b^2}}.$$

Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem R ab und nähert sich der Limite $\frac{\lambda}{2}$. In grösserer Entfernung vom Pole nimmt also die Länge der Elementarbogen langsam ab, um sich einer Limite zu nähern. Wir bemerken ferner, dass die entfernten Elementarbogen, wie NN', gegen die dem Pole benachbarten sehr klein sind; erstere sind von der Grössenordnung λ, letztere von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$.

Wir wollen nun die Vibrationsgeschwindigkeiten oder Geschwindigkeiten der Bewegungen betrachten, welche von den verschiedenen Elementarbogen auf P übertragen werden. Wir setzen diese Geschwindigkeiten proportional der Länge der Elementarbogen. Ausserdem hängt die Intensität der übertragenen Vibrationsbewegung von der Entfernung der Elementarbogen von P und von der Schiefe der Elementarstrahlen MP gegen BC ab (57). Die Intensität der übertragenen Vibrationsbewegung nimmt ab, wenn jene Entfernung und die Schiefe der Elementarstrahlen wachsen. Diese beiden Umstände vereinigen sich mit der Abnahme der Länge der Elementarbogen, um zu bewirken, dass die von den aufeinanderfolgenden Elementarbogen auf P übertragenen Vibrationsgeschwindigkeiten in dem Maasse an Grösse abnehmen, als die Ordnungszahl der Elementarbogen an Grösse zunimmt. Ueberdies betrachten wir die von zwei aufeinanderfolgenden Elementarbogen auf P übertragenen Vibrationsgeschwindigkeiten als dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Die von AB herrührende Vibrationsgeschwindigkeit wird sich also als eine unendliche Reihe abwechselnd positiver und negativer Glieder darstellen, welche anfangs rasch, später langsam an Grösse abnehmen.

Setzen wir die Vibrationsgeschwindigkeit oder, wie wir kurz sagen wollen, die Geschwindigkeit, welche dem Punkte P durch das Element AM mitgetheilt wird, gleich 1, und bezeichnen wir die von M_1M_2, M_2M_3 ... herrührenden Geschwindigkeiten durch $-m$, $+m'$, $-m''$ ..., so haben wir für die resultirende Geschwindigkeit

$$1 - m + m' - m'' + \dots (S).$$

Eine solche Reihe abwechselnd positiver und negativer, an Grösse abnehmender Glieder hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass jedes Glied numerisch grösser ist, als die Summe aller folgenden. Der Werth der Reihe reducirt sich also merklich auf die Summe der ersten Glieder. Die von AC herrührende Geschwindigkeit ist durch eine gleiche Reihe gegeben.

Wir gelangen also zu dem folgenden Resultate:

1. Die Wirkung einer unendlich langen geradlinigen Welle auf einen äusseren Punkt wird nicht merklich geändert, wenn man nur jene Elementarbogen in Betracht zieht, welche dem Pole sehr nahe liegen.

2. Da der Werth der Reihe (S) zwischen 1 und $1 - m$ liegt, so ist die dem Punkte P von AB mitgetheilte Geschwindigkeit ein Bruchtheil der von AM_1 mitgetheilten, also die von der ganzen Welle BC herrührende Geschwindigkeit gleich der von einem sehr kleinen Theil derselben herrührenden, welcher sich zu beiden Seiten des Poles erstreckt und kleiner ist, als $2\,AM_1$.

59. Wirkung einer ebenen Welle auf einen äusseren Punkt.

Betrachten wir nun die Wirkung einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle auf einen äusseren Punkt P. Wir verstehen auch hier unter dem Pole A der Welle bezüglich des erleuchteten Punktes P den Fusspunkt des von P auf die Ebene der Welle gefällten Perpendikels. Wir beschreiben in der Ebene der Welle um den Pol A als Mittelpunkt Kreislinien, deren Entfernungen von P um je $\frac{\lambda}{2}$ zunehmen. Hierdurch zerfällt die ebene Welle in Kreisringe, welche wir Elementarzonen nennen wollen. Die von einer Elementarzone auf P übertragene Geschwindigkeit nehmen wir als dem Flächeninhalt der Zone gerade und der Entfernung derselben von P verkehrt proportional an. Ueberdies soll diese Geschwindigkeit von der Schiefe der Elementarstrahlen abhängen (57) und betrachten wir Geschwindigkeiten, welche von zwei aufeinanderfolgenden Zonen ausgehen, als dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Wir berechnen zunächst die Flächen der Elementarzonen.

Die Radien der dem Pole benachbarten Kreise sind:

$$\sqrt{b\lambda},\ \sqrt{2b\lambda},\ \sqrt{3b\lambda}\ \ldots,$$

und ihre Flächen:

$$\pi b\lambda,\ 2\pi b\lambda,\ 3\pi b\lambda\ \ldots$$

In der Nähe des Poles sind also die Elementarzonen merklich flächengleich, und da daselbst die Aenderung der Entfernung der Zonen vom Punkte P und die Schiefe der Elementarstrahlen nicht von merklichem Einflusse sind, so kann man sagen, dass in der Nähe des Poles die von den einzelnen Elementarzonen auf P übertragenen Geschwindigkeiten merklich numerisch constant und gleich $\pi\lambda$ sind.

Betrachten wir nun eine Elementarzone, welche vom Pole durch eine grosse Zahl anderer Elementarzonen getrennt ist. Bezeichnen wir durch R ihre Entfernung von P, so ist ihr Umfang $2\pi\sqrt{R^2 - b^2}$, ihre Breite (58) $\frac{\lambda}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - b^2}}$ und ihr Flächeninhalt $\pi\lambda R$. Der Quotient dieser Fläche durch die Entfernung der Zone von P ist immer noch $\pi\lambda$. Würde also die Intensität der von einer Elementarzone auf P übertragenen Bewegung nicht von der Neigung der Verbindungslinie eines Punktes der Zone mit dem Punkte P abhängen, so würden die von den einzelnen aufeinanderfolgenden Elementarzonen auf P übertragenen Geschwindigkeiten ihrem absoluten Werthe nach sämmtlich gleich und dem Vorzeichen nach abwechselnd positiv und negativ sein.

Allein nach der Hypothese, welche wir über die Beschaffenheit der Elementarwellen gemacht haben, wird der Einfluss der Schiefe der Elementarstrahlen, welcher in der Nähe des Poles fast Null ist, um so merklicher, je weiter die Zonen vom Pole entfernt sind, so dass die Wirkung sehr entfernter Zonen verschwindet. Bezeichnen wir also durch m, m', m'' ... die von den aufeinanderfolgenden Elementarzonen auf P übertragenen Geschwindigkeiten, so haben wir für die von der ganzen ebenen Welle auf P übertragene Vibrationsgeschwindigkeit

$$m - m' + m'' - m''' \ldots + m^{(n)} - m^{(n+1)} + \ldots,$$

eine Reihe, deren erste Glieder langsam an Grösse abnehmen, und deren spätere Glieder verschwinden. Wir bringen diese Reihe auf die Form

$$\frac{1}{2} m + \left(\frac{1}{2} m - \frac{1}{2} m'\right) - \left(\frac{1}{2} m' - \frac{1}{2} m''\right) + \ldots$$

Die Glieder in den Klammern sind sämmtlich sehr klein gegen das erste Glied $\frac{1}{2} m$; da überdies das Vorzeichen alternirt, reducirt sich die Reihe merklich auf das erste Glied $\frac{1}{2} m$ und wir können sagen:

Die von einer unendlich ausgedehnten ebenen Welle auf einen äusseren Punkt P übertragene Geschwindigkeit reducirt sich merklich auf die Hälfte der von einem kleinen Theile der Welle herrührenden Geschwindigkeit, welcher durch eine Kreislinie begrenzt ist, deren Punkte von P um $\frac{\lambda}{2}$ weiter abstehen, als der Pol.

Wir gelangen durch diesen Satz zu einer erweiterten Vorstellung von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes. Während nach der Theorie von Huyghens die Bewegung in P ausschliesslich vom Pole der Planwelle herrührt, sehen wir, dass dies nicht genau der Fall ist, sondern dass dieselbe von jenem kleinen Theile der Planwelle ausgeht, welcher den Pol A enthält, d. i. den Fusspunkt des Perpendikels von P auf die Planwelle oder jene Gerade, welche den Punkt P mit der in unserem Falle unendlich entfernten Lichtquelle verbindet. Unterdrückt man diesen Theil der Welle durch einen kleinen Schirm, so verschwindet die Erleuchtung des Punktes P vollständig; unterdrückt man statt dieses wirksamen Theiles den Rest der Welle durch einen Schirm mit kreisförmiger Oeffnung, so ändert sich nichts an der Erleuchtung des Punktes P; verkleinert man hierauf die Oeffnung des Schirmes, so nimmt die Erleuchtung des Punktes P allmälig an Intensität ab.

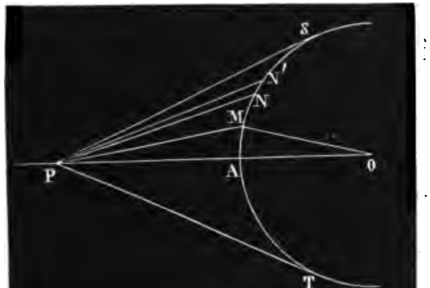
60. Wirkung einer Kreiswelle auf einen äusseren Punkt.

Sei wieder (Fig. 45) P der erleuchtete äussere Punkt, A der Pol, d. i. der Punkt, in welchem die Kreiswelle von der Verbindungslinie des Punktes P und des Centrums O der Kreiswelle geschnitten wird, und setzen wir

$$OA = a \qquad AP = b.$$

Zerlegen wir die Kreiswelle von A aus in Elementarbogen. Diese Zerlegung erstreckt sich nur bis S und T, da die Punkte der Kreiswelle, welche jenseits S oder T liegen, nach unserer Hypothese über die Beschaffenheit der Elementarwellen (57) keine Wirkung auf P ausüben.

Fig. 45.



Suchen wir zunächst die Längen der dem Pole benachbarten Elementarbogen. Sei M ein beliebiger Punkt der Kreiswelle und

$$AM = s \quad PM = b + \delta.$$

Dann ist

$$PM^2 = OM^2 + OP^2 - 2\,OM \,.\, OP \,.\, \cos MOP$$

oder

$$(b + \delta)^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a\,(a + b) \cos \frac{s}{a}.$$

Nehmen wir an, der Punkt M liege nahe bei A, so wird näherungsweise

$$\cos \frac{s}{a} = 1 - \frac{s^2}{2a^2}$$

und kann δ^2 vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$b\delta = \frac{(a + b)\,s^2}{2a}$$

oder

$$s = \sqrt{\frac{2ab\delta}{a + b}}.$$

Setzt man $\delta = \frac{\lambda}{2}$, so hat man für die Länge des ersten Elementarbogens

$$s_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}.$$

Ebenso erhält man für die folgenden Elementarbogen

$$s_2 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\,(\sqrt{2} - 1)$$
$$s_3 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Die Länge der Elementarbogen nimmt also in der Nähe des Poles rasch an Grösse ab.

Betrachten wir nun einen Elementarbogen wie NN', welcher vom Pole durch eine grosse Zahl anderer Elementarbogen getrennt ist. Setzen wir

$$PN = b + \delta = R,$$

so wird

$$R^2 = a^2 + (a+b)^2 - 2a\,(a+b)\cos\frac{s}{a}.$$

Geht man von N zu N' über, so wächst R um $\frac{\lambda}{2}$ und s um σ, die Länge des Elementarbogens. Betrachten wir die kleinen Grössen $\frac{\lambda}{2}$ und σ als Differentiale, so erhalten wir aus der letzten Gleichung durch Differentiation

$$R\,dR = (a+b)\sin\frac{s}{a}\,ds$$

und

$$\frac{\sigma}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{ds}{dR} = \frac{R}{(a+b)\sin\frac{s}{a}}$$

oder

$$\sigma = \frac{R\lambda}{2\,(a+b)\sin\frac{s}{a}}.$$

Vergleichen wir diesen für einen entfernten Elementarbogen gefundenen Ausdruck mit dem für den ersten Elementarbogen gefundenen, so ergiebt sich

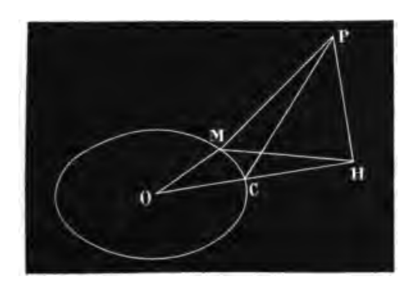
$$\frac{\sigma}{s_1} = \frac{R\lambda}{2\,(a+b)\sin\frac{s}{a}}\sqrt{\frac{a+b}{ab\lambda}} = \frac{R}{2\sqrt{ab}\,\sin\frac{s}{a}}\sqrt{\frac{\lambda}{a+b}},$$

d. h. σ ist sehr klein gegen s_1.

Indem wir weiter schliessen, wie bei der geradlinigen Welle (58), sehen wir, dass die Wirkung einer Kreiswelle auf einen äusseren, in der Ebene der Kreiswelle liegenden Punkt sich wie bei der geradlinigen Welle auf die Wirkung eines Bruchtheiles der beiden Elementarbogen reducirt, welche zu beiden Seiten des Poles diesem zunächst liegen.

Dieses Resultat bleibt auch dann noch richtig, wenn der Punkt P nicht in der Ebene der Kreiswelle liegt. Sei, um dies zu beweisen (Fig. 46), P der beleuchtete Punkt, H die Entfernung des Punktes P von der Ebene der Kreiswelle, PC die kürzeste Entfernung des Punktes P von der Kreiswelle, a der Halbmesser der Kreiswelle, sei der Punkt C, dessen Entfernung von P ein Minimum ist, der Pol des Punktes P, M ein beliebiger Punkt der Welle, s der Bogen CM und $d + \delta$ die Entfernung PM. Wir haben dann

Fig. 46.



$$(d + \delta)^2 = h^2 + MH^2$$

$$MH^2 = a^2 + \left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 - 2a\left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right) \cos\frac{s}{a}$$

$$(d + \delta)^2 = h^2 + a^2 + \left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 - 2a\left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right) \cos\frac{s}{a}.$$

So lange M nahe an C liegt, ist δ sehr klein und können die Glieder mit δ^2 vernachlässigt, sowie $\cos\frac{s}{a}$ durch $1 - \frac{s^2}{2a^2}$ ersetzt werden.

Wir haben also unter dieser Voraussetzung

$$d\delta = \left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right)\frac{s^2}{2a}$$

und

$$s = \sqrt{\frac{2ad\delta}{a + \sqrt{d^2 - h^2}}}.$$

Es ergiebt sich daher für die ersten Elementarbogen

$$s_1 = \sqrt{\frac{a d\lambda}{a + \sqrt{d^2 - h^2}}}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{a d\lambda}{a + \sqrt{d^2 - h^2}}} (\sqrt{2} - 1)$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{a d\lambda}{a + \sqrt{d^2 - h^2}}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

. . . .

Es folgt:

Die Elementarbogen nehmen in der Nähe des Poles rasch an Grösse ab. Für einen entfernten Elementarbogen NN' hat man, wenn PN durch R bezeichnet wird,

$$R^2 = h^2 + a^2 + \left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 - 2a\left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right) \cos\frac{s}{a},$$

woraus sich, wenn die Länge des Elementarbogens durch σ bezeichnet wird, ergiebt

$$\frac{\sigma}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{ds}{dR} = \frac{R}{\left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right) \sin\frac{s}{a}}.$$

Der Exponent des Verhältnisses eines entfernten Elementarbogens σ zum ersten Elementarbogen s_1 ist also

$$\frac{R\lambda}{2\left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right) \sin\frac{s}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a + \sqrt{d^2 - h^2}}{a d\lambda}}$$

$$= \frac{R\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{a d \left(a + \sqrt{d^2 - h^2}\right)} \sin\frac{s}{a}},$$

ein Ausdruck, welcher von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$, also sehr klein ist. Die entfernten Bogen sind also gegen die dem Pole benachbarten sehr klein und es können folglich die Schlüsse, welche wir in dem Falle gezogen haben, wo der Punkt P auf der Ebene der Kreiswelle liegt, auf den Fall ausgedehnt werden, wo dies nicht stattfindet.

61. Wirkung einer Kugelwelle auf einen äusseren Punkt.

Man kann, wie wir dies bei der ebenen Welle gethan haben (59), die sphärische Welle in Elementarzonen zerlegen und findet genau in derselben Weise, dass die Wirkung einer sphärischen Welle auf einen äusseren Punkt der Hälfte der Wirkung einer sphärischen Calotte gleichkommt, welche sich sehr wenig von einer kleinen Kreisfläche unterschei-

det, deren Mittelpunkt mit dem Pole des äusseren Punktes zusammenfällt und deren Peripherie von diesem Punkte um $\frac{\lambda}{2}$ weiter absteht, als der Pol.

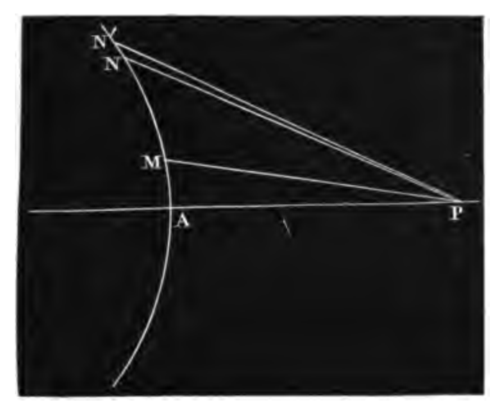
In gleicher Weise lässt sich das bei Gelegenheit der Betrachtung der ebenen Welle bezüglich der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes Gesagte auf den Fall einer sphärischen Welle übertragen.

62. Wirkung einer Welle von beliebiger Gestalt auf einen äusseren Punkt.

Selbst im isotropen Medium werden durch Reflexion und Brechung Lichtwellen hervorgebracht, welche weder eben noch sphärisch sind. Wir wollen daher noch die Wirkung einer Welle von beliebiger Gestalt auf einen äusseren Punkt betrachten.

Wir setzen zunächst eine lineare Welle von einfacher oder doppelter Krümmung voraus. Sei (Fig. 47) P der äussere Punkt, A der Pol der Welle bezüglich P, d. i. jener Punkt der Welle, welcher dem Punkte P am nächsten liegt, M ein beliebiger Punkt der Welle, und setzen wir

Fig. 47.



$$AP = b$$
$$PM = b + \delta = R$$
$$AM = s.$$

Liegt M nahe an A, so entwickeln wir R in die Maclaurin'sche Reihe als Function des von A aus gerechneten Bogens s und erhalten, da R für $s = 0$ ein Minimum ist,

$$\left(\frac{\delta R}{\delta s}\right)_0 = 0$$

und
$$R = b + \delta = b + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2 R}{\delta s^2}\right)_0 + \ldots$$

Wenn wir die Glieder mit höheren Potenzen von s vernachlässigen, so erhalten wir weiter

$$\delta = \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2 R}{\delta s^2}\right)_0$$

und
$$s = \sqrt{\frac{2\delta}{\left(\frac{d^2 R}{\delta s^2}\right)_0}}.$$

Die ersten Elementarbogen sind also:

$$s_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{\delta^2 R}{\delta s^2}\right)_0}}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{\delta^2 R}{\delta s^2}\right)_0}} \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{\delta^2 R}{\delta s^2}\right)_0}} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

. . . .

und nehmen folglich an Grösse rasch ab. Für einen entfernten Elementarbogen $NN' = \sigma$ ist

$$PN' = R + \frac{\lambda}{2},$$

also näherungsweise

$$R + \frac{\lambda}{2} = R + \sigma \frac{dR}{ds}$$

und

$$\sigma = \frac{\lambda}{2 \frac{dR}{\delta s}}.$$

Es folgt

$$\frac{\sigma}{s_1} = \frac{1}{2 \frac{dR}{\delta s}} \sqrt{\lambda \left(\frac{\delta^2 R}{ds^2}\right)_0},$$

d. h. die entfernten Elementarbogen sind klein gegen die dem Pole benachbarten.

Es können daher (58) die Elementarbogen höherer Ordnungszahl unberücksichtigt bleiben und es reducirt sich die Wirkung der linearen Welle auf jene eines Bruchtheiles der beiden dem Pole beiderseits anliegenden Elementarbogen.

Diese Resultate gelten auch dann noch, wenn die Entfernung AP nicht ein Minimum, sondern ein Maximum ist.

Wir wollen nun die Wirkung einer Flächenwelle von beliebiger Gestalt betrachten und verstehen hier unter einem Pole der Welle bezüglich des beleuchteten Punktes P jeden Punkt der Welle, dessen Abstand von P ein Maximum oder Minimum ist. Wir nehmen zunächst an, dass ein einziger Pol A vorhanden sei.

Wir zerlegen die Wellenfläche durch unendlich viele unendlich nahe an einander liegende mit AP parallele Ebenen in unendlich schmale Streifen. Die Wirkung eines solchen Streifens kann mit jener einer linienförmigen Welle verglichen werden und reducirt sich auf diejenige eines sehr kleinen Theiles desselben, welcher zu beiden Seiten jenes Punktes des Streifens liegt, dessen Abstand von P ein Maximum oder Minimum ist. Die Wirkung der ganzen Wellenfläche reducirt sich also zunächst auf diejenige eines sehr schmalen Streifens derselben, welcher den Pol der Welle enthält und welchen wir wieder in unendlich viele unendlich schmale Längsstreifen zerlegen. Indem sich die Wirkung jedes der letzteren abermals auf diejenige eines sehr kleinen Theiles desselben reducirt, welcher in der Nähe des Poles der Welle zu beiden Seiten jenes Punktes des Streifens liegt, dessen Abstand von P ein Maximum oder Minimum ist, reducirt sich die Wirkung der ganzen Welle auf diejenige eines sehr kleinen Theiles derselben, welcher den Pol der Welle bezüglich des Punktes P enthält.

Hat die Welle mehrere Pole, so giebt es so viele wirksame Theile derselben, als Pole vorhanden sind.

Legt man ein rechtwinkeliges Coordinatensystem so in die Figur, dass der Ursprung auf A fällt, die XY-Ebene die Wellenfläche berührt und die x- und y-Axe mit den Hauptkrümmungsrichtungen der Wellenfläche zusammenfallen, so kann man die Gleichung der Wellenfläche in der Nähe des Punktes A schreiben:

$$z = \frac{x^2}{2 r_1} + \frac{y^2}{2 r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

Eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf P fällt und deren Radius

$$R = PA + n \frac{\lambda}{2} = b + n \frac{\lambda}{2}$$

ist, hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 + (z + b)^2 = \left(b + n \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

oder näherungsweise

$$x^2 + y^2 + 2bz = 2bn \frac{\lambda}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

Es ergiebt sich aus (A) und (B) für die Schnittcurve der beiden Flächen

$$\frac{x^2}{2 r_1} + \frac{y^2}{2 r_2} = n \frac{\lambda}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2 b}$$

oder

$$x^2 \left(\frac{1}{2 r_1} + \frac{1}{2 b}\right) + y^2 \left(\frac{1}{2 r_2} + \frac{1}{2 b}\right) = n \frac{\lambda}{2}.$$

Diese Gleichung gehört einer Ellipse an, deren Halbaxen sind

$$\sqrt{\frac{n\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{2b}}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{n\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{2r_2}+\frac{1}{2b}}}$$

und deren Fläche folglich ist

$$\frac{n\pi\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{2r_2}+\frac{1}{b}\right)}} = C\,.\,n\frac{\lambda}{2}.$$

Die aufeinanderfolgenden Elementarzonen haben also in der Nähe des Poles eine constante Fläche gleich

$$C \cdot \frac{\lambda}{2},$$

wie dies bei einer ebenen Welle der Fall ist (59).

Fig. 48.



Ist (Fig. 48) S die Welle, P der beleuchtete Punkt, A der Pol, so ist die Länge PA ein Maximum oder Minimum, und es steht AP senkrecht auf der Wellenfläche. Da nun der Punkt P seine Bewegung von jenen Punkten der Welle S erhält, welche in der Nähe von A liegen, so ist ersichtlich, dass die Bewegung eines Punktes der Welle sich in der Richtung der Normale der Wellenfläche fortpflanzt.

63. Der Schatten.

Wir nehmen an, die Ausbreitung des von einem Punkte kommenden Lichtes werde durch einen unendlich ausgedehnten Schirm mit beliebiger Oeffnung gestört. Die Gesetze der geometrischen Optik verlangen, dass hinter dem Schirme ausserhalb der Kegelfläche, deren Spitze die Lichtquelle ist und deren Seiten durch die Peripherie der Oeffnung gehen, vollkommene Dunkelheit, innerhalb desselben gleichmässige Helligkeit herrsche. Dies findet jedoch in Wirklichkeit nur annähernd und bei sehr kleinen Oeffnungen gar nicht statt. Wir setzen zunächst eine grosse Oeffnung voraus und betrachten einen Punkt im Inneren des Projectionskegels, welcher vom Rande des geometrischen Schattens so weit absteht, dass der durch die Oeffnung begrenzte Theil einer Welle bezüglich dieses Punktes eine grosse Zahl Elementarzonen enthält, oder mit anderen Worten, dass die Differenz der Entfernungen des betrachteten Punktes von seinem Pole und den zunächst liegenden Theilen des Randes der Oeffnung eine grosse Zahl Wellenlängen enthält, was nicht

hindert, die Oeffnung selbst als klein gegen ihren Abstand vom beleuchteten Punkte anzunehmen. Die Wirkung der durch den Umfang der Oeffnung begrenzten Welle auf einen so gelegenen Punkt ist, da die durch den Schirm unterdrückten Theile der Welle keine merkliche Wirkung haben (59), dieselbe, als wäre der Schirm nicht vorhanden. Im Inneren der conischen Projection der Oeffnung herrscht mit Ausnahme der in der Nähe der Grenze des geometrischen Schattens liegenden Theile gleichmässige Helligkeit. Dies steht in Uebereinstimmung mit den Gesetzen der geometrischen Optik. Anders verhält es sich, wenn wir Punkte im Innern des Projectionskegels betrachten, welche der Grenze des geometrischen Schattens so nahe liegen, dass ihre Pole von dieser Grenze nur durch eine geringe Zahl Elementarzonen getrennt sind. Hier hängt das Resultat der Zusammensetzung der Elementarstrahlen wesentlich von der Lage des betrachteten Punktes ab. Nähert sich derselbe der Grenze des geometrischen Schattens, so wird abwechselnd eine positiv und eine negativ wirkende Elementarzone in den von dem Schirme eingenommenen Raum treten und es wird folglich ein Schwanken in der Helligkeit des betrachteten Punktes eintreten. Hierdurch erklärt sich das Auftreten abwechselnd heller und dunkler Streifen in der Nähe der Grenze des geometrischen Schattens bei homogenem und das gefärbter Streifen bei weissem Lichte, sogenannte Beugungserscheinungen, welche eine Ausnahme von den Gesetzen der geometrischen Optik machen und in der Vibrationstheorie ihre Erklärung finden.

Fassen wir nun Punkte ins Auge, welche innerhalb des geometrischen Schattens liegen. Sind dieselben von der Grenze desselben so weit entfernt, dass ihre Pole vom Umfange der Oeffnung durch eine grosse Zahl von Elementarzonen getrennt sind, so übt der conservirte Theil der sphärischen Welle auf diese Punkte eine äusserst geringe Wirkung aus und die Beleuchtung derselben ist schon in geringer Distanz von der Grenze des geometrischen Schattens unmerklich. In der Nähe dieser Grenze nimmt die Intensität des Lichtes nach aussen sehr rasch ab, ohne *maxima* und *minima* zu zeigen.

Wird die Oeffnung sehr klein, so dass sie nur eine geringe Zahl Elementarzonen enthält, so befinden sich alle Punkte im Inneren des Projectionskegels in der Nähe des Randes des geometrischen Schattens und es verbreiten sich die Farbenstreifen auf den ganzen inneren Raum, während der äussere Raum, der geometrische Schatten, in schon geringer Entfernung von der Grenze wie früher vollkommen dunkel erscheint.

Treibt man die Reduction der Oeffnung aufs Aeusserste, so dass die Differenz der Distanzen eines beleuchteten Punktes von zwei beliebigen Punkten der Oeffnung nur einen geringen Bruchtheil einer halben Wellenlänge beträgt, so werden die von den einzelnen Punkten der Oeffnung auf die beleuchteten Punkte übertragenen Bewegungen stets in Uebereinstimmung der Phase stehen und sich verstärken. Es entsteht eine

Diffusion des Lichtes nach allen Richtungen, welche gegen die Ebene des Schirms nicht zu sehr geneigt sind.

Ist nur eine Dimension der Oeffnung sehr gering, hat man also eine enge Spalte, so findet die Diffusion senkrecht zur Richtung der Spalte statt. Verengert man eine Spaltöffnung allmälig, so entsteht unmittelbar vor der gegenseitigen Berührung der Ränder der Oeffnung eine sehr sichtbare Diffusion des früher scharf begrenzten Lichtbildes.

Es ist begreiflich, dass die eben besprochenen Erscheinungen nicht von der absoluten Grösse der Oeffnung allein abhängen, sondern auch von der Entfernung des beleuchteten Punktes. Nimmt diese zu, so nimmt die Zahl der in der Oeffnung enthaltenen Elementarzonen ab, und es werden die Erscheinungen der Diffraction um so sichtbarer sein, in je grösserer Entfernung vom Schirm sie beobachtet werden.

Eine wichtige Consequenz des Vorhergehenden ist, dass den Lichtstrahlen keine physikalische Existenz zukommt. Wenn man, um einen Lichtstrahl zu isoliren, die Oeffnung verkleinert, so langt man bei einer schliesslichen Diffusion des Lichtes nach allen Richtungen an. Die Versuche mancher Physiker, einen Lichtstrahl zu isoliren, blieben stets fruchtlos, so eifrig sie auch betrieben wurden [1]).

Wir wollen nun an Stelle des unendlich ausgedehnten Schirmes mit Oeffnung einen allseitig begrenzten undurchsichtigen Schirm denken und seine Dimensionen zunächst als beträchtlich voraussetzen. Nach den Gesetzen der geometrischen Optik soll im Inneren des Projectionskegels vollkommene Dunkelheit, ausserhalb desselben gleichmässige Helligkeit herrschen. In der That werden Punkte ausserhalb des Projectionskegels, welche sich in einer gewissen Entfernung von der Grenze des geometrischen Schattens befinden, beleuchtet, als wäre der Schirm nicht vorhanden und ist die Helligkeit der Punkte innerhalb des Projectionskegels in einer gewissen Entfernung von der Grenze des geometrischen Schattens unmerklich. Die Grenze des geometrischen Schattens zeigt jedoch einen gewissen Grad der Helligkeit, welche nach dem Inneren des geometrischen Schattens rasch an Intensität abnimmt, und nach aussen durch eine Reihe Maxima und Minima rasch bis zu ihrem constanten Maximalwerthe ansteigt.

Ist der Schirm sehr klein, so zeigen sich Maxima und Minima auch in der ganzen Ausdehnung des geometrischen Schattens. Ist der Schirm so klein, dass er nur einen sehr geringen Theil der ersten Elementarzone bedeckt, so zeigen alle Punkte des geometrischen Schattens nahezu eine Helligkeit, als wäre der Schirm nicht vorhanden und jede Spur eines Schattens verschwindet.

Das Zustandekommen eines Lichtschattens beruht, wie leicht zu sehen, wesentlich auf der Kleinheit der Lichtwellen.

---

[1]) Poissont soll in seiner letzten Krankheit oft die Worte wiederholt haben: „*J'avais trouvé un filet de lumière.*"

Bekanntlich nimmt man für gewöhnlich einen Schallschatten nicht wahr. Euler versuchte diese Thatsache, auf welche Newton[1]) aufmerksam gemacht hatte, aus der Durchdringlichkeit der Körper für die Schallbewegung zu erklären. Allein die Versuche zeigen, dass, wenn man ein den Schall in der That nicht merklich fortpflanzendes Hinderniss anwendet, in welchem sich eine Oeffnung befindet, sich jenseits der Oeffnung der Schall nach allen Richtungen mit nahe derselben Intensität fortpflanzt. Die wahre Ursache dieser Erscheinung liegt in der beträchtlichen Länge der Schallwellen. Diese ist unvergleichlich grösser, als die Länge der Lichtwellen, so dass die Diffusion der Vibrationsbewegung nach allen Richtungen, welche beim Lichte eine äusserst kleine Oeffnung voraussetzt, beim Schalle schon bei verhältnissmässig sehr grossen Oeffnungen eintritt.

64. Das Soret'sche Fernrohr.

Gesetzt, man ziehe auf einer Glasplatte eine grössere Anzahl concentrischer Kreise, deren Radien seien

$$a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, \ldots a\sqrt{n}.$$

Betrachtet man die Ebene der Zeichnung als eine ebene Wellenfläche, so hat man dieselbe in Elementarzonen getheilt bezüglich eines Punktes, welcher sich auf der im Centrum der Kreise auf der Fläche derselben errichteten Senkrechten in einem Abstande

$$f_1 = \frac{a^2}{\lambda}$$

befindet (59).

Durch irgend ein Verfahren bedecke man die Flächen zwischen dem ersten und zweiten Kreis, zwischen dem dritten und vierten, zwischen dem fünften und sechsten u. s. w. mit einer opaken Substanz; oder aber, man bedecke den kleinen centralen Kreis vom Radius a, sowie die Ringe zwischen dem zweiten und dritten Kreis, zwischen dem vierten und fünften u. s. w. Man hat dann bezüglich des Punktes f_1 alle ungeraden oder alle geraden Elementarzonen bedeckt. Lasse man nun ein Bündel Strahlen, die von einem unendlich entfernten Lichtpunkte kommen, normal auf das Gitter fallen. Es ist leicht ersichtlich (59), dass die von allen durchsichtigen Ringen ausgesandten Vibrationsgeschwindigkeiten den Punkt f_1 in Phasencoincidenz erreichen werden. Mithin bildet dieser Punkt einen ersten reellen Brennpunkt. Es ist klar, dass noch eine Reihe schwächerer Brennpunkte existirt, entsprechend den Entfernungen

$$f_2 = \frac{a^2}{3\lambda}, \quad f_3 = \frac{a^2}{5\lambda}, \ldots$$

[1]) Optik III.

Auf der anderen Seite des Gitters, d. h. auf der Seite, von welcher die Lichtstrahlen kommen, hat man virtuelle Brennpunkte in denselben Distanzen. Diese Punkte sind die Centra divergent austretender Elementarstrahlen. Wenn man demnach nur den ersten reellen und den ersten virtuellen Brennpunkt in Rechnung zieht, so kann man sagen, dass eins dieser Gitter zugleich die Rolle einer sammelnden und einer zerstreuenden Linse spielt. Dasselbe gilt noch für einen Lichtpunkt, der, in einem kleinen Winkelabstand von der Hauptaxe, auf einer durch das Centrum des Gitters gehenden secundären Axe liegt. Wenn man also statt eines einzigen Lichtpunktes einen leuchtenden Gegenstand hat, so bekommt man Bilder von diesem Gegenstand. Ersetzt man das Objectiv eines gewöhnlichen astronomischen Fernrohrs durch ein solches Gitter und blickt man durch das Rohr beispielsweise nach einer entfernten Gasflamme, so bekommt man ein umgekehrtes Bild in einem wenig erhellten Felde, weniger scharf als mit einem gewöhnlichen Objective. Man kann umgekehrt das Ocular durch ein Kreisgitter ersetzen u. s. w.

Es ist leicht ersichtlich, dass auch Gitter zu analogen Resultaten führen, welche auf andere Weise gemacht sind. Die durchsichtigen Ringe haben alle dieselbe Breite, z. B. $^1/_{70}$ mm, und Radien gleich

$$a\sqrt{\frac{3}{2}},\ a\sqrt{\frac{7}{2}},\ a\sqrt{\frac{11}{2}},\ a\sqrt{\frac{15}{2}}\ \ldots$$ [1]).

Man kann sich auch die Frage stellen:

Nach welchem Gesetze müssen die Striche eines geradlinigen Gitters vertheilt sein, damit die cylindrischen Wellen, welche von einer den Strichen parallelen Lichtlinie ausgehen und durch jede Oeffnung gebeugt werden, auf einer den Strichen des Gitters ebenfalls parallelen Geraden im Einklang der Phase stehen?

Betrachten wir eine auf den Strichen des Gitters winkelrechte Ebene und in derselben eine Normale des Gitters FOF'. Sei F' die Lichtquelle, F der Brennpunkt.

Nennen wir $x_0, x_1 \ldots x_n, x_{n+1}$ den Abstand jedes der Striche T_0, $T_1 \ldots T_{n+1}$ vom Fusspunkte des Perpendikels FOF'. Sei δ_n der Winkel OFT_n und δ'_n der Winkel $OF'T_n$. Die Bedingung des Einklangs im Punkte F besteht darin, dass die Wege $F'T_nF$ und $F'T_{n+1}F$ um eine ganze Zahl k von Wellen verschieden sei. Setzen wir also

$$(x_{n+1} - x_n) \sin \delta_n = \varepsilon$$

und

$$(x_{n+1} - x_n) \sin \delta'_n = \varepsilon',$$

so ist die Bedingungsgleichung:

---

[1]) Soret, Pogg. 1875.

$$\varepsilon + \varepsilon' = k\lambda \qquad \text{(A)}$$

wenn die Punkte F und F' dies- und jenseits des Gitters liegen.

Andererseits ist, wenn

$$OF = D \qquad OF' = D'$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) &= D \operatorname{tang} \delta_n \\ \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) &= D' \operatorname{tang} \delta'_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

Sind die Ablenkungen δ_n, δ'_n so klein, dass man ihre Sinus und Tangenten verwechseln kann, so erhält man durch Elimination von δ_n und δ'_n aus den Gleichungen (A) und (B):

$$(x^2_{n+1} - x^2_n)\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D'}\right) = 2k\lambda.$$

Dies Gesetz der Vertheilung der Striche ist dasselbe, wie das der Radien der Newton'schen Ringe, welche durch eine Fläche vom Radius R auf einer Ebene gebildet werden (36):

$$x^2_{n+1} - x^2_n = R\lambda.$$

Die Identification der beiden Gleichungen führt zu der Formel

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = \frac{2k}{R} = \frac{1}{F},$$

der klassischen Formel der Linsen[1]).

1) A. Cornu, Pogg. 1875.

VI.

Ableitung der geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung aus dem Principe der Interferenz der Elementarwellen.

65. Einleitung.

Die von Huyghens (10) gegebene, unvollkommene Theorie der Reflexion und Brechung wurde später von Fresnel mit Hülfe desselben Princips der Interferenz der Elementarwellen, welches uns bei der Entwickelung der Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in einem unendlich ausgedehnten isotropen Mittel diente, in vollkommenerer Weise entwickelt [1]). Diese Theorie, welche wir nun darlegen wollen, bezieht sich auf die geometrischen Gesetze, durch welche die Richtungen der reflectirten und gebrochenen Strahlen bestimmt sind. Die Frage nach der Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes bleibt einem späteren Cpitel vorbehalten.

So lange das Licht sich in einem isotropen Mittel bewegt, pflanzt sich die Bewegung nicht nach rückwärts fort (57); wenn jedoch eine plötzliche Aenderung des Mittels eintritt, d. i. wenn die Lichtbewegung an der Trennungsfläche zweier isotroper Mittel anlangt, giebt uns die Analogie mit dem Stosse, dass ein Theil der Bewegung sich im neuen Mittel fortpflanzt, ein Theil ins alte Mittel zurückkehrt. Wir betrachten dann jeden Punkt der Trennungsfläche als ein Vibrationscentrum oder als den Mittelpunkt eines Systems von Elementarwellen, welche sich in beiden Mitteln fortpflanzen. Es wird also bei den folgenden Betrachtungen an die Stelle der primitiven Welle, welche wir im letzten Capitel als den geometrischen Ort der Vibrationscentren betrachteten, die Trennungsfläche der beiden Medien treten.

---

[1]) *OEuvres complètes*, I, 28, 45, 117, 201, 217, 220, 225, 373.

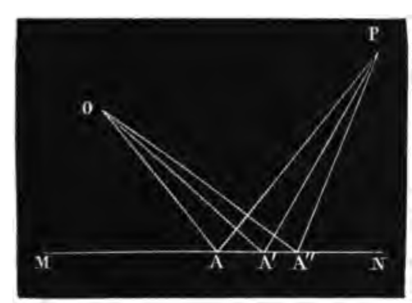
Die Elementarwellen, welche wir jetzt voraussetzen, sind nicht vollkommen identisch mit jenen, welche wir in der Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in einem isotropen Mittel voraussetzten. Einerseits befinden sich die verschiedenen Vibrationscentren nicht in Uebereinstimmung der Phase, da die verschiedenen Punkte der Trennungsfläche von einer vom leuchtenden Punkte ausgehenden Erschütterung in ungleichen Zeiten erreicht werden; andererseits berechtigt uns hier nichts, die Intensität längs einer Elementarwelle als variabel anzunehmen, wie dies früher der Fall war (57).

Ist O der leuchtende Punkt und A ein Punkt der reflectirenden oder brechenden Fläche, so ist die Vibrationsgeschwindigkeit in A verkehrt proportional OA. Ist ferner P ein Punkt einer von A ausgehenden Elementarwelle, so ist die Vibrationsgeschwindigkeit in P verkehrt proportional AP. Es ist also die Vibrationsgeschwindigkeit in P dem Producte $OA \times AP$ verkehrt proportional.

66. Wirkung einer reflectirenden Ebene auf einen äusseren Punkt.

Seien (Fig. 49) O der leuchtende Punkt, MN die reflectirende Ebene, P der erleuchtete Punkt, A, A', A'' Punkte der reflectirenden Ebene, nach welchen O die Strahlen OA, OA', OA'' sendet und von welchen nach P die Elementarstrahlen AP, $A'P$, $A''P$ gelangen, sei ferner A der Punkt, für welchen die Summe der Wege OA und AP ein Minimum ist, so dass AP der nach den Gesetzen der geometrischen Optik reflectirte Strahl OA ist und die Winkel, welche OA und AP mit der in A auf MN errichteten Normalen bilden, gleich gross sind. Stelle nunmehr MN den Durchschnitt der Reflexionsebene OAP mit der reflectirenden Ebene vor, heisse A der Pol der Geraden MN bezüglich P, von welchem aus die Elementarbogen gerechnet werden, und seien AA', $A'A''$ ... Elementarbogen von MN, so dass

Fig. 49.



$$(OA' + A'P) - (OA + AP) = \frac{\lambda}{2}$$

$$(OA'' + A''P) - (OA' + A'P) = \frac{\lambda}{2}$$

$$(OA''' + A'''P) - (OA'' + A''P) = \frac{\lambda}{2}$$

. . . .

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf der Geraden MN. Setzen wir

$$\begin{aligned} OAP &= b \\ OA_1P &= b + \delta = R \\ AA_1 &= s. \end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst an, A_1 liege sehr nahe an A, betrachten wir R als Function von s, und entwickeln wir diese Function nach der Maclaurin'schen Reihe, so erhalten wir, da für $s = 0$ der Differentialquotient $\frac{dR}{ds}$ auch gleich Null ist,

$$R = b + \delta = b + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_0 + \cdots$$

Wir vernachlässigen die Glieder, welche s in einer höheren, als der zweiten Potenz enthalten, um zu haben

$$s = \sqrt{\frac{2\delta}{\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_0}}.$$

Es ergiebt sich hieraus für die ersten Elementarbogen

$$s_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_0}}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_0}}\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_0}}\,(\sqrt{3} - \sqrt{1})$$

. . . .

Dieselben nehmen also in der Nähe des Poles A rasch an Grösse ab.

Betrachten wir nun einen Elementarbogen s_n, welcher vom Pole A durch eine grosse Zahl anderer Elementarbogen getrennt ist. Wir haben näherungsweise

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{dR}{ds}s_n$$

und

$$s_n = \frac{\lambda}{2\frac{dR}{ds}}.$$

Vergleichen wir s_n mit s_1, so ergiebt sich

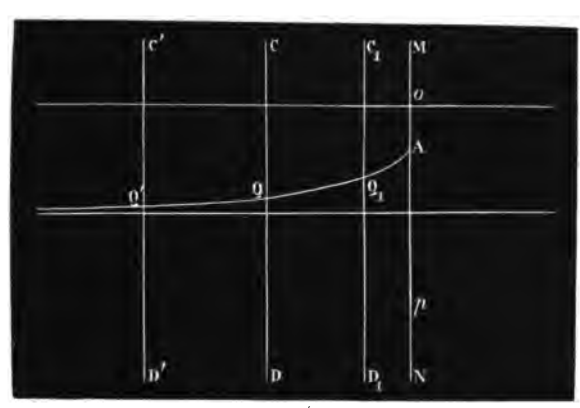
$$\frac{s_n}{s_1} = \frac{1}{2\frac{\delta R}{ds}} \sqrt{\lambda \left(\frac{\delta^2 R}{\delta s^2}\right)_0},$$

d. h. s_n ist sehr klein gegen s_1.

Die Elementarbogen der Geraden *MN* nehmen also in der Nähe des Poles *A* rasch an Grösse ab, später langsam, und die Elementarbogen von grosser Ordnungszahl sind klein gegen jene von geringer Ordnungszahl. Es folgt, dass die Wirkung der Geraden *MN* auf den Punkt *P* sich auf jene eines Bruchtheiles der beiden ersten Zonen zu beiden Seiten des Poles reducirt.

Wenn wir die reflectirende Ebene parallel zur Geraden *MN* in unendlich schmale Streifen zerlegen, so lässt sich der für den Streifen *MN* geführte Beweis unverändert auf jeden anderen Streifen übertragen, und es reducirt sich folglich die Wirkung jedes Streifens auf jene eines sehr

Fig. 50.



kleinen Theiles desselben, welcher sich zu beiden Seiten jenes Punktes des Streifens erstreckt, für welchen die Summe der Entfernungen vom leuchtenden und erleuchteten Punkte ein Minimum ist. Die Wirkung der ganzen reflectirenden Ebene auf den Punkt *P* reducirt sich also auf diejenige eines Streifens *Z*, dessen Gestalt und Lage wir bestimmen wollen.

Nehmen wir die reflectirende Ebene als Ebene der Figur an, seien *o* und *p* die Projectionen von *O* und *P* auf diese Ebene (Fig. 50) und setzen wir

$$Oo = h, \quad Pp = k, \quad op = l.$$

Sei *op* die x-Axe und eine durch *o* zu *op* senkrecht gezogene Gerade die y-Axe eines Coordinatensystems, *CD* eine der Geraden, durch welche wir die reflectirende Ebene parallel zu *MN* in unendlich schmale

Streifen getheilt haben. Suchen wir auf CD einen Punkt Q, für welchen OQP ein Minimum ist. Wir haben

$$d\left(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + \sqrt{(l-x)^2 + y^2 + k^2}\right) = 0,$$

wo sich die Differentiation auf x bezieht. Das giebt

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2 + k^2}}.$$

Wir quadriren:

$$\frac{x^2 + y^2 + h^2}{x^2} = \frac{(l-x)^2 + y^2 + k^2}{(l-x)^2}$$

und erhalten schliesslich

$$(y^2 + h^2)(l - x)^2 = x^2 (y^2 + k^2).$$

Dies ist die Gleichung der Curve, welche von den Minimumpunkten sämmtlicher Geraden CD gebildet wird, also die Axe des Streifens Z, auf dessen Wirkung sich die der ganzen reflectirenden Ebene reducirt.

Wir lösen die Gleichung nach x auf:

$$x = \frac{l\sqrt{y^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + k^2}}$$

und setzen $y = 0$:

$$x = \frac{lh}{h + k}.$$

Dies ist die Abscisse des Punktes A.

Für $y = \infty$ erhalten wir

$$x = \frac{l}{2}.$$

Die Gerade, welche durch die Mitte von op parallel zu y geht, ist also eine Asymptote der Curve, welche in der Figur durch AQQ' dargestellt ist.

Wenn wir die Curve AQQ' in Elementarbogen zerlegen, so dass für die Endpunkte eines solchen Bogens die Summe der Abstände von O und P um $\frac{\lambda}{2}$ differirt, und wenn wir durch die Theilungspunkte parallele zu CD ziehen, so findet sich der wirksame Streifen Z in Elementarzonen zerlegt. Nun nehmen zwar die Elementarbogen von AQQ' von A aus rasch an Grösse ab, um jedoch zu zeigen, dass das Gleiche von den durch die Elementarzonen auf P übertragenen Geschwindigkeiten gelte, ist es nöthig, die Flächen dieser Zonen in der Nähe von OAP und in einer gewissen Entfernung von dieser Ebene mit einander zu vergleichen. Nun liegt der Streifen Z in einem Streifen Z', dem geometrischen Orte der ersten Elementarbogen der zu CD parallel ge-

zogenen Geraden und wir nehmen an, dass die demselben Elementarbogen von AQQ' entsprechenden Elementarzonen der Streifen Z und Z' ein merklich constantes Flächenverhältniss haben. Es genügt dann, zu untersuchen, wie sich die Elementarzonen des Streifens Z' ändern.

Sei Q_1 der Endpunkt des ersten Elementarbogens von AQQ', s die Länge des Bogens AQ, σ diejenige des ersten Elementarbogens der Geraden MN bezüglich des Poles A; dann ist die Fläche der ersten Elementarzone von Z' von der Grössenordnung $s\sigma$. Bezeichnen wir nun durch R die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes der reflectirenden Ebene vom leuchtenden und erleuchteten Punkte, so erhalten wir, wie oben,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{d^2R}{\delta x^2}}},$$

wo sich $\frac{d^2R}{\delta x^2}$ auf den Punkt A bezieht.

Andererseits ist

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + \sqrt{(l - x)^2 + y^2 + k^2},$$

also

$$\frac{d^2R}{\delta x^2} = \frac{y^2 + h^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{y^2 + k^2}{[(l - x)^2 + y^2 + k^2]^{3/2}},$$

und wenn man für x und y ihre Werthe

$$y = 0 \quad x = \frac{lh}{h + k}$$

einsetzt,

$$\frac{d^2R}{\delta x^2} = \frac{(h + k)^4}{hk\,[l^2 + (h + k)^2]^{3/2}},$$

also

$$\sigma = \sqrt{\lambda \frac{hk\,[l^2 + (h + k)^2]^{3/2}}{(h + k)^4}}.$$

Die Grössen h, k, l sind sämmtlich von derselben Grössenordnung, folglich σ von der Grössenordnung $\sqrt{h\lambda}$ und die Fläche der ersten Elementarzone von der Grössenordnung $s\sqrt{hy}$. Da ferner die von dieser Zone herrührende Geschwindigkeit h und k verkehrt proportional ist (65), so ist sie von der Grössenordnung

$$\frac{s\sqrt{h\lambda}}{hk}.$$

Betrachten wir nun eine entfernte Elementarzone von Z'; dieselbe ist von der Grössenordnung $s'\sigma'$. Wenn y an Grösse zunimmt, so nähert sich x der Limite $\frac{l}{2}$ und $\frac{d^2R}{\delta x^2}$ der Limite $\frac{2}{y}$; in grosser Entfernung von

A ist also die Fläche der Elementarzonen von der Grössenordnung $s' \sqrt{\lambda y}$ und da die Entfernungen derselben von O und P sich wenig von y unterscheiden, die durch eine Zone auf P übertragene Geschwindigkeit von der Grössenordnung

$$\frac{s' \sqrt{\lambda y}}{y^2}.$$

Diese Grösse ist sehr klein gegen die Grösse $\frac{s \sqrt{h \lambda}}{hk}$. Es nehmen also die von den verschiedenen Elementarzonen des Streifens Z' und folglich auch die von den Elementarzonen des Streifens Z auf P übertragenen Geschwindigkeiten mit der Entfernung von A an Grösse ab.

Die Wirkung der ganzen reflectirenden Ebene auf P reducirt sich also auf diejenige einer sehr kleinen, den Punkt A enthaltenden, Fläche und die Erleuchtung von P kann daher als merklich von diesem Punkte ausgehend angesehen werden.

Das Gesetz der regelmässigen Reflexion erscheint also für den Fall einer ebenen, unendlich ausgedehnten Trennungsfläche als erwiesen.

67. Fortsetzung.

Sei E eine unendlich ausgedehnte ebene Trennungsfläche zweier Medien, O ein leuchtender Punkt in dem einen Medium, P ein Punkt in demselben Medium, welcher durch Reflexion erleuchtet wird. Sei ferner A jener Puukt der Ebene E, in welchem der Strahl OE nach den Gesetzen der geometrischen Optik nach P reflectirt wird.

Wir nehmen an, dass nach jedem Punkte M der Ebene E von O ein Strahl gelange und dass von jedem Punkte M ein Elementarstrahl nach P gelange und suchen das Resultat der Interferenz der Elementarstrahlen in P. Zu diesem Zwecke zerlegen wir E in Elementarzonen.

Setzen wir

$$OM + MP = R = n \frac{\lambda}{2}$$

und setzen wir n der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3, ..., so erhalten wir für den geometrischen Ort von M eine Reihe von Curven und die zwischen zwei auf einanderfolgenden Curven liegende Fläche ist eine Elementarzone.

Wir wollen die Gestalt dieser Curven, die Flächen der Elementarzonen, und sodann die Wirkung derselben auf P bestimmen.

Denken wir uns einen Punkt Q in solcher Lage, dass PQ durch E rechtwinkelig halbirt wird, so ist die Gleichung einer der betrachteten Curven:

$$OM + MQ = n \frac{\lambda}{2}.$$

Die Curve ist der Durchschnitt eines Rotationsellipsoides mit der Ebene E. Die Curven also, durch welche die einzelnen Elementarzonen begrenzt werden, sind Ellipsen. Die grossen Axen derselben fallen in die Ebene OAP, ihre Mittelpunkte aber im Allgemeinen nicht auf A, obgleich A innerhalb sämmtlicher Ellipsen liegt.

Wir wollen den Flächeninhalt der Zonen nur für den Fall bestimmen, wo dieselben dem Punkte A sehr nahe liegen, und für den Fall, wo sie von demselben sehr entfernt sind.

Nehmen wir also zunächst an, es sei

$$OA + AQ = R_1$$

und

$$OM + MQ = R_1 + m\frac{\lambda}{2},$$

wo m eine kleine ganze Zahl bedeutet. Die Brennpunkte des Rotationsellipsoides sind O, Q, die grosse Axe $R_1 + m\frac{\lambda}{2}$. Zur Bestimmung der kleinen Axe $2b$ haben wir

$$\frac{\left(R_1 + m\frac{\lambda}{2}\right)^2}{4} = b^2 + \frac{R_1^2}{4},$$

also näherungsweise

$$b^2 = \frac{R_1 m\lambda}{4}$$

und

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{R_1 m\lambda}.$$

Das Ellipsoid ist sehr gestreckt und kann in der Nähe der Ebene E als eine Cylinderfläche angesehen werden, deren Radius r aus der Proportion berechnet werden kann:

$$r : \frac{1}{2}\sqrt{R_1 m\lambda} = \sqrt{\frac{\left(R_1 + m\frac{\lambda}{2}\right)^2}{4} - \left(\frac{R_1}{2} - OA\right)^2} : \frac{R_1 + m\frac{\lambda}{2}}{2}.$$

Es ergiebt sich näherungsweise

$$r : \frac{1}{2}\sqrt{R_1 m\lambda} = \sqrt{1 - \frac{4\left(\frac{R_1}{2} - OA\right)^2}{R_1^2}} : 1$$

$$r : \frac{1}{2}\sqrt{R_1 m\lambda} = 2\sqrt{R_1 \,.\, OA - OA^2} : R_1$$

$$r = \sqrt{\frac{R_1 m\lambda \, (OA \, . \, AQ)}{R_1}}$$

$$r = \sqrt{\frac{OA \, . \, AQ}{OQ} \cdot m\lambda}.$$

Dies ist die kleine Halbaxe der Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der Ebene E geschnitten wird. Die grosse Halbaxe ist, wenn der Einfallswinkel des Strahles OA durch α bezeichnet wird,

$$\frac{r}{\cos \alpha} = \frac{2 \, . \, AQ}{PQ} \cdot r$$

und der Flächeninhalt der Ellipse:

$$\frac{OA \, . \, AQ}{OQ} m\lambda \, . \, \frac{2 \, AQ}{PQ} \, . \, \pi = km\lambda,$$

wenn

$$\pi \, . \, \frac{OA \, . \, AQ^2}{OQ \, . \, PQ} = k$$

gesetzt wird.

Setzen wir nun der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir für die Flächeninhalte der ersten, zweiten ... Ellipse der Reihe nach

$$k\lambda$$
$$2\,k\lambda$$
$$3\,k\lambda$$
$$\vdots$$

also für die dem Pole A nahe liegenden Elementarzonen merklich dieselbe Grösse:

$$k\lambda.$$

Die entfernten Zonen sind Kreisringe von der Breite $\frac{\lambda}{4}$ und dem Radius OM', wenn M' ein Punkt der Zonen ist. Der Flächeninhalt der entfernten Zonen ist also nicht constant, sondern gleich

$$\frac{\lambda \pi}{2} \, . \, OM',$$

nimmt also beständig an Grösse zu.

Um die Wirkung einer Zone auf P, d. i. die durch die Zone auf P übertragene Geschwindigkeit zu erhalten, müssen wir die Fläche der Zone durch das Product ihrer Abstände von O und P dividiren (65). Dieses Product ist für die nahen Zonen $OA \, . \, AP$, für die entfernten OM'^2. Wir haben also für die Wirkung einer nahe an A gelegenen Zone

$$\pi \cdot \frac{AQ}{OQ \cdot PQ} \cdot \lambda$$

und für eine entfernte

$$\frac{\lambda\pi}{2\,OM'}.$$

Die Wirkung einer nahe gelegenen Zone ist also von der Grössenordnung wie

$$\frac{\lambda}{OA},$$

die einer entfernten wie

$$\frac{\lambda}{OP'},$$

d. h. die letztere Wirkung ist klein gegen die erstere.

68. Reflexion an einer krummen Fläche.

Man beweist in ähnlicher Weise, dass bei der Reflexion des von einem Punkte O kommenden Lichtes an einer krummen Fläche E ein durch Reflexion beleuchteter Punkt P von jenen Stellen A der reflectirenden Fläche Bewegung empfängt, für welche die Distanz OAP ein Minimum oder Maximum ist, genauer gesprochen, für welche die Variation der Summe $OA + AP$ der Null gleich ist. Dieses Resultat steht in Uebereinstimmung mit den Gesetzen der geometrischen Optik, doch nicht mit dem Satze von Fermat (7), da das Licht nicht nur auf dem kürzesten, sondern auch auf dem längsten Wege nach dem Punkte P gelangen kann. Habe z. B. die reflectirende Fläche die Gestalt eines Rotationsellipsoides, dessen Brennpunkte mit dem leuchtenden Punkte O und dem beleuchteten P zusammenfallen und sei A ein beliebiger Punkt dieser Fläche. Für jede Fläche, welche das Ellipsoid in A berührt, sind die Bedingungen der regelmässigen Reflexion in A erfüllt, und da für das Ellipsoid $OA + AP$ constant ist, so ist diese Summe in A für alle das Ellipsoid von aussen berührenden Flächen ein Minimum und für alle das Ellipsoid von innen berührenden Flächen ein Maximum.

69. Construction der reflectirten Welle.

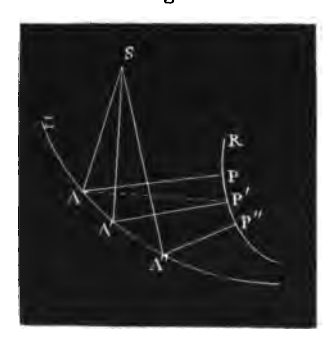
Seien (Fig. 51, a. f. S.) Σ eine reflectirende Fläche von beliebiger Gestalt, S ein Lichtpunkt. Wir betrachten auf der Fläche Σ eine Reihe benachbarter Punkte, A, A', A'', ..., ziehen die einfallenden Strahlen SA, SA', SA'', ..., die denselben entsprechenden reflectirten Strahlen

AP, $A'P'$, $A''P''$, ... und nehmen auf letzteren die Punkte P in solcher Lage an, dass

$$SA + AP = SA' + A'P' = SA'' + A''P'' = \ldots$$

Die Punkte P, P', P'', ... empfangen sonach ein und dieselbe von S ausgehende Bewegung unter Vermittelung der Punkte A, A', A'', ... nach Ablauf gleicher Zeiten. Ist die Reflexion mit einer Phasenänderung verbunden, so nehmen wir an, dass diese für sämmtliche Punkte P, welche wir als benachbart voraussetzen, gleich gross sei. Die Fläche R, der geometrische Ort der Punkte P, ist die reflectirte Wellenfläche. Man kann leicht zeigen, dass diese Fläche sämmtliche von A, A', A'', ... mit den Radien AP, $A'P'$, $A''P''$, ... beschriebenen Kugelflächen einhüllt, in Uebereinstimmung mit dem Principe der einhüllenden Wellenflächen (10).

Fig. 51.



Wir wissen (68), dass für den Punkt A' die Summe $SA'P'$ ein Minimum oder Maximum ist. Setzen wir ein Minimum voraus, so ist

$$\begin{aligned} SA + AP' &> SA' + A'P' \\ SA' + A'P' &= SA + AP \\ SA + AP' &> SA + AP \\ AP' &> AP. \end{aligned}$$

Ist nun P der dem Punkte A nächste Punkt der Fläche R, so wird eine von A mit dem Radius AP beschriebene Kugel die Fläche R in P berühren.

Aehnlich kann der Beweis geführt werden, wenn für den Punkt A' die Summe $SA' + A'P'$ ein Maximum ist.

Schliesslich ist ersichtlich, dass die reflectirte Wellenfläche R eine Normalfläche der reflectirten Strahlen ist (3).

70. Die Brechung.

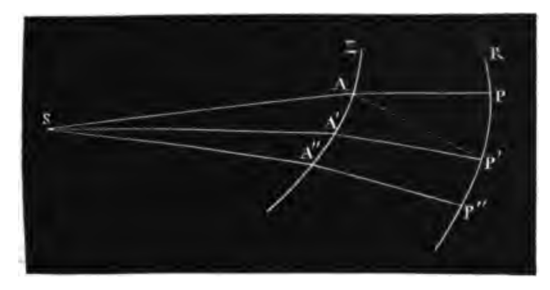
Handelt es sich um den Durchgang der Vibrationsbewegung durch eine beliebige Trennungsfläche Σ zweier isotroper Medien, so betrachten wir jeden Punkt A der Fläche Σ, welcher von einem vom leuchtenden Punkte S kommenden Strahle SA getroffen wird, als Mittelpunkt eines im neuen Medium fortschreitenden Systems von Elementarwellen. Die Concordanz oder Discordanz der Vibrationsbewegungen, welche von zwei als Erschütterungscentren betrachteten Punkten der brechenden Fläche A, A' auf einen Punkt P des zweiten Mittels übertragen werden, hängt

hier nicht mehr von der Differenz der Entfernungen SAP und $SA'P$ ab, sondern von der Summe der Zeiten, in welchen diese Wege zurückgelegt werden.

Die Elementarzonen der Fläche Σ sind also hier durch Curven begrenzt, welche so beschaffen sind, dass die Summe der Zeiten, welche das Licht braucht, um vom Punkte S zu einem Punkte einer solchen Curve und von da zum Punkte P zu gelangen, für sämmtliche Punkte der Curve constant und um eine halbe Schwingungsdauer kleiner ist, als bei der folgenden Curve. Ist die brechende Fläche eine Ebene, so erfüllt der Pol seiner Lage nach die Bedingung, dass die Summe jener Zeiten ein Minimum ist, und die Wirkung der brechenden Flächen auf den Punkt P reducirt sich wie im Falle der Reflexion auf diejenigen eines sehr kleinen, den Pol enthaltenden Theiles der brechenden Fläche. Dies steht in Uebereinstimmung mit dem Gesetze Descartes' (1).

Ist die Fläche gekrümmt, so ist jeder Punkt derselben, für welchen die Summe jener Zeiten ein Minimum oder Maximum ist, ein Pol und das Licht kann sich sowohl auf einem kürzesten als auf einem längsten Wege fortpflanzen.

Fig. 52.



Um die gebrochene Wellenfläche zu construiren, seien (Fig. 52) Σ eine beliebige brechende Fläche, S der leuchtende Punkt, AP, $A'P'$, $A''P''$, ... die den einfallenden Strahlen SA, SA', SA'', ... entsprechenden gebrochenen Strahlen und seien die Punkte P, P', P'', ... so gewählt, dass die Wege SAP, $SA'P'$, $SA''P''$, ... in gleichen Zeiten zurückgelegt werden. Dann ist

$$\frac{SA}{v} + \frac{AP}{v'} = \frac{SA'}{v} + \frac{A'P'}{v'} = \frac{SA''}{v} + \frac{A''P''}{v'} = \ldots;$$

der Ort der Punkte P, P', P'', ... ist die gebrochene Wellenfläche R und man sieht leicht, dass dieselbe von den Kugeln, welche von A, A', A'', ... mit Radien gleich AP, $A'P'$, $A''P''$, ... beschrieben werden, berührt wird. Im Punkte A' ist nämlich nach unserer Voraussetzung die Summe

$$\frac{SA'}{v} + \frac{A'P'}{v'}$$

ein Minimum oder Maximum. Nehmen wir an, sie sei ein Minimum, so ist

$$\frac{SA}{v} + \frac{AP'}{v'} > \frac{SA'}{v} + \frac{A'P'}{v}$$

$$\frac{SA'}{v} + \frac{A'P'}{v'} = \frac{SA}{v} + \frac{AP}{v'}$$

$$\frac{SA}{v} + \frac{AP'}{v'} > \frac{SA}{v} + \frac{AP}{v'}$$

$$AP' > AP.$$

AP ist also die kürzeste Entfernung des Punktes A von der Fläche R und es wird folglich eine von A mit einem Radius gleich AP construirte Kugel die Fläche R in P berühren. Dasselbe findet statt, wenn $\frac{SA'}{v} + \frac{A'P'}{v'}$ ein Maximum ist. Dies steht in Uebereinstimmung mit dem Principe der einhüllenden Wellenflächen. R erscheint auch hier als eine Normalfläche der gebrochenen Strahlen.

71. Einfluss der Ausdehnung der reflectirenden oder brechenden Fläche.

Wir haben bei der Ableitung der Gesetze der Reflexion und Brechung aus dem Principe der Interferenz der Elementarwellen vorausgesetzt, dass die reflectirende oder brechende Fläche eine grosse Zahl von Elementarzonen enthalte. Ist dies nicht der Fall, d. h. ist eine oder sind beide Dimensionen der Fläche hinreichend gering, so sind die von uns für die Gesetze der regelmässigen Reflexion und Brechung gegebenen Ableitungen, sowie diese Gesetze selbst nicht mehr gültig.

Fig. 53.



Diese Consequenz der Theorie wird durch den folgenden Versuch Fresnel's bestätigt. Man lässt parallele Lichtstrahlen an der ebenen Oberfläche eines Glases, nachdem man dieselbe bis auf ein schmales gleichschenkeliges Dreieck, ABC (Fig. 53), geschwärzt hat, so reflectiren, dass die Einfallsebene $\perp$ auf AD steht, und fängt die reflectirten Strahlen vermittelst eines Schirmes auf. In der Nähe von BC erscheint das reflectirte Strahlenbündel scharf begrenzt, nur zeigen sich in der Nähe der Ränder einige Farbenstreifen. In dem Maasse jedoch, als man sich der Spitze des Dreieckes nähert, bemächtigen sich die Streifen mehr und mehr des vom reflectirten Lichte erhellten Raumes, und sehr nahe an der Spitze A findet eine nahezu gleichmässige Diffusion des Lichtes nach allen Richtungen senkrecht zu AD statt.

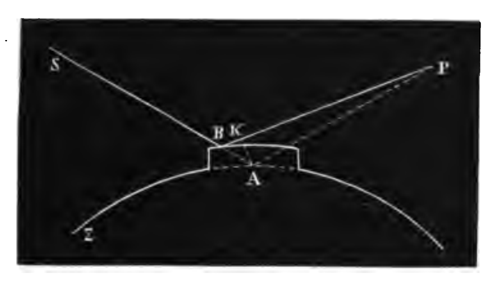
Diese Erscheinungen widersprechen einigermaassen den Gesetzen der geometrischen Optik, bleiben durch Huyghens' Princip der einhüllenden Wellenflächen unerklärt und ergeben sich erst aus Fresnel's Princip der Interferenz der Elementarwellen.

72. Reflexion und Brechung an rauhen Flächen.

Wir wollen das Princip der Interferenz der Elementarwellen auf die Reflexion und Brechung des Lichtes an rauhen Flächen anwenden, also auf einen allgemeinen Fall, welcher die regelmässige Reflexion und Brechung in sich schliesst.

Es sei Σ (Fig. 54) eine vollkommen glatte reflectirende Fläche, S der leuchtende Punkt, P der erleuchtete Punkt, A ein Punkt der Fläche Σ, in welchem ein von S kommender Strahl regelmässig nach P reflectirt wird. Setzen wir nun voraus, es befinde sich bei A eine Unebenheit von der Höhe h. Der Strahl SA trifft nun im Punkte B auf die reflectirende Fläche und statt des Elementarstrahles AP gelangt nun ein Elementarstrahl BP nach P. Die Wirkung auf P wird ungeändert erscheinen, wenn

Fig. 54.



$$(SA + AP) - (SB + BP)$$

gegen eine Wellenlänge sehr klein bleibt. Diese Wegdifferenz berechnet sich wie folgt. Ist i der Incidenzwinkel des Strahles SA, so hat man

$$SB = SA - AB = SA - \frac{h}{\cos i}$$

und, wenn $AK \perp BP$,

$$BP = AP + BK = AP + AB \cos(\pi - 2i)$$
$$= AP - \frac{h}{\cos i} \cos 2i,$$

also

$$SA + AP - (SB + BP) = \frac{h}{\cos i}(1 + \cos 2i) = 2h \cos i.$$

Die Wegdifferenz der Strahlen SAP und SBP ist sonach

$$2h \cos i;$$

diese Grösse darf, wenn die Reflexion eine regelmässige bleiben soll, einen geringen Bruchtheil einer Wellenlänge nicht überschreiten. Es

ergiebt sich hieraus ein Maass für die Grösse der Unebenheiten, bei welcher die regelmässige Reflexion in eine unregelmässige übergeht.

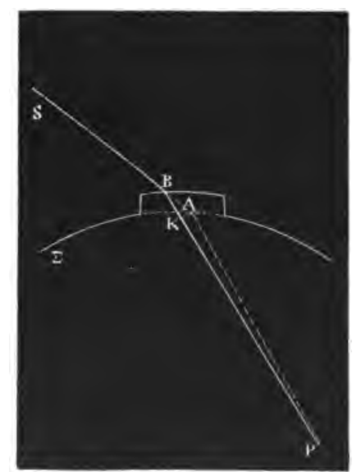
Lassen wir andererseits h constant sein, so bleibt jene Wegdifferenz, welche einen kleinen Bruchtheil einer Wellenlänge nicht überschreiten darf, noch variabel mit i, und zwar nimmt sie bis zur Null ab, wenn i bis 90° wächst. Eine Fläche von beliebiger Rauheit wird also bei hinreichend grossem Incidenzwinkel regelmässig reflectirend wirken müssen, und es wird bezüglich der Incidenz eine gewisse Grenze geben, diesseits und jenseits welcher regelmässige und diffuse Reflexion stattfindet. Man wird ferner aus der Lage dieser Grenze angenähert den Grad der Rauheit der reflectirenden Fläche berechnen können [1]). Es ist leicht, die Richtigkeit dieser Schlüsse durch ein Experiment zu prüfen. Ein Blatt weisses Papier giebt bei geeigneter Neigung ein deutliches Bild einer Kerzenflamme. Berusst man eine Glasplatte über einer Kerzenflamme, bis sie, zwischen das Auge und die Flamme gebracht, kein Licht mehr durchlässt, so giebt die dem Glase abgewendete Begrenzungsfläche der Russschichte bei geeigneter Stellung gegen Auge und Kerzenflamme ein so deutliches Bild der letzteren, dass ein vor die Kerzenflamme gehaltenes Haar im Bilde noch wahrgenommen wird.

Ist ϱ ein kleiner echter Bruch, so haben wir für den Grenzwinkel der regelmässigen Reflexion

$$\varrho \lambda = 2 h \cos i.$$

Da λ für die brechbareren Farben kleiner ist, so ergiebt sich für diese ein grösserer Grenzwinkel der regelmässigen Reflexion. Lässt man also den Incidenzwinkel i continuirlich zunehmen, so wird die regelmässige Reflexion für Roth früher eintreten, als für Violett. Aehnliches müsste auch bei normaler Incidenz bei einem gewissen Grade der Rauhigkeit wahrgenommen werden. Fresnel [1]) experimentirte mit mattgeschliffenen Spiegeln aus Glas und Metall. Lässt man den Incidenzwinkel von 0° bis 90° continuirlich wachsen, so erscheint bei einer gewissen Grösse des Incidenzwinkels ein röthliches Bild der Lichtquelle. Bei weiterer Vergrösserung des Incidenzwinkels treten die übrigen Spectralfarben der Reihe nach hinzu,

Fig. 55.



---

[1]) O. N. Rood, Pogg. CXXXIV, 333. — [2]) Fresnel, *OEuvres complètes,* I. 226.

bis das Bild weiss erscheint. Die Experimente Fresnel's wurden von Hanckel[1]) wiederholt.

Was die Brechung des Lichtes an einer rauhen Trennungsfläche betrifft, so haben hier (Fig. 55) die Strahlen SAP und SBP einen Zeitunterschied gleich

$$\frac{SA}{v} + \frac{AP}{v'} - \left(\frac{SB}{v} + \frac{BP}{v'}\right),$$

und die Brechung ist eine regelmässige, wenn diese Grösse im Verhältnisse mit einer Schwingungsdauer klein ist oder, wenn

$$SA + nAP - (SB + nBP)$$

im Verhältnisse mit einer Wellenlänge des ersten Mediums sehr klein ist.

Ist wieder $AK \perp BP$, so hat man

$$SB = SA - \frac{h}{\cos i}, \quad BP = BK + AP$$

$$BK = \frac{h}{\cos i} \cos (i - r)$$

$$SB + nBP = SA - \frac{h}{\cos i} + \frac{nh}{\cos i} \cos (i - r) + nAP$$

$$\begin{aligned} SB + nBP - (SA + nAP) &= - \frac{h}{\cos i} [n \cos (i - r) - 1] \\ &= \frac{h}{\cos i} (n \cos i \cos r + \sin^2 i - 1) \\ &= h (n \cos r - \cos i) \\ &= h \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i\right) \\ &= h \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für die Zeitdifferenz der beiden Strahlen hat seinen kleinsten Werth $h (n - 1)$ für $i = 0$ und wächst bei zunehmender Incidenz.

Es giebt also nicht für jeden Grad der Rauhigkeit einen Grenzwinkel der regelmässigen Brechung; ist vielmehr die Grösse $h (n - 1)$ nicht sehr klein im Vergleiche mit einer Wellenlänge des ersten Mediums, so erfolgt bei keiner Incidenz eine regelmässige Brechung.

---

[1]) Pogg. C.

Bibliographie.

Regelmässige Reflexion und Brechung.

1637. **Descartes**, *Dioptrica,* Ludg. Batav.
1662. **La Chambre**, *De la lumière,* Paris.
1665. **Hooke**, *Micrographia,* London.
1667. **Fermat**, Litterae ad patrem Mersennum continentes objectiones quasdam contra Dioptricam Cartesianam in *Epistolis Cartesianis,* Paris, 1667, pars III, litter. 29—46.
1682. **Ango**, *L'Optique divisée en trois livres,* Paris.
1682. **Leibnitz**, Unum opticae, catoptricae et dioptricae principium, *Acta Eruditorum,* I.
1687. **Newton**, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Londini.
1690. **Huyghens**, *Traité de la lumière,* Leyde.
1704. **Newton**, *Optics,* London.
1739. **Clairaut**, Sur les explications cartésienne et newtonienne de la réflexion de la lumière, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.,* 1739, p. 259.
1744. **Maupertuis**, Accord de différentes lois de la nature qui avaint été tenues jusqu'ici pour incompatibles, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.,* 1744, p. 83.
1746. **Euler**, Nova theoria lucis et colorum in *Opusculis varii argumenti,* Berol., t. I, p. 179.
1785. **Fontana**, Ricerche analitiche sopra diversi soggetti, *Mem. della Società Italiana,* III, 498.
1802. **Young**, On the Theory of Light and Colours, *Phil. Tr.,* 1802, p. 12. — *Miscell. Works,* t. I, p. 140.
1807. **Laplace**, Sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes, *Mém. d'Arcueil,* II, 3. — *Mém. de la première classe de l'Institut,* X, 300.
1815. **Ampère**, Démonstration d'un théorème d'où l'on peut déduire toutes les lois de la réfraction ordinaire ou extraordinaire, *Mém. de la première classe de l'Institut,* XIV, 235.
1815. **Fresnel**, Premier Mémoire sur la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes,* t. I, p. 28.
1815. **Fresnel**, Complément au premier Mémoire sur la diffraction, *OEuvres complètes,* t. I, p. 45.
1815. **Fresnel**, Deuxième Mémoire sur la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes,* t. I, p. 117. — *Ann. de chim. et de phys.,* (2), I, 239.
1819. **Fresnel**, Note sur l'application du principe de Huyghens et de la théorie des interférences aux phénomènes de la réflexion et de la diffraction, *OEuvres complètes,* t. I, p. 201.
1819. **Fresnel**, Seconde Note sur la réflexion, *OEuvres complètes,* t. I, p. 217.
1821. **Fresnel**, Explication de la réfraction dans le système des ondes, *Ann. de chim. et de phys.,* (2), XXI, 225. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 373.

1823. Lagrange, Sur la théorie de la lumière de Huyghens, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 241.

1823. Poisson, Lettre à Fresnel sur la théorie des ondulations, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 270.

1823. Fresnel, Réponse à Poisson, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIII, 32, 113.

1837. Challis, Theory of the Transmission of Light through Mediums and its Refraction at their Surfaces, according to the Hypothesis of Undulations, *Phil. Mag.*, (3), XI, 161.

Diffusion.

1815. Fresnel, Premier Mémoire sur la diffraction, *OEuvres complètes*, t. I, p. 30.

1815. Fresnel, Deuxième Mémoire sur la diffraction, *OEuvres complètes*, t. I, p. 119. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 239.

1819. Fresnel, Note sur l'application du principe de Huyghens et de la théorie des interférences aux phénomenes de la réflexion et de la diffraction, *OEuvres complètes*, t. I, p. 216.

1819. Fresnel, Note sur la réflexion et la réfraction considérées dans le système de l'émission, *OEuvres complètes*, t. I, p. 220.

1819. Fresnel, Expérience sur la réflexion régulière produite par les surfaces non polies, *OEuvres complètes*, t. I, p. 225.

1857. Hankel, Ueber farbige Reflexion des Lichtes von mattgeschliffenen Flächen bei und nach dem Eintritt einer spiegelnden Zurückwerfung, *Pogg.*, C.

1860. Dove, Ueber Reflexion des Lichtes von rauhen Flächen, *Pogg.*, CX.

1868. O. N. Rood, Ueber eine von Fresnel aufgestellte Theorie und über eine Weise, die mittlere Grösse sehr kleiner Theilchen zu messen, *Pogg.*, CXXXIV.

VII.

Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen.

73. Historisches.

Beugungserscheinungen wurden zuerst in der Mitte des 17. Jahrhunderts von Grimaldi beschrieben. Dieser benutzte als Lichtquelle eine kleine Oeffnung im Fensterladen, durch welche Sonnenstrahlen in ein verfinstertes Zimmer traten. Er bemerkte, dass die Schatten der in den Lichtkegel gebrachten Körper ihrer Begrenzung nach nicht genau dem Gesetze der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes entsprechen und dass sie durch mehrere, gewöhnlich drei, farbige Streifen begrenzt erschienen[1]. Grimaldi beschrieb auch die innerhalb des Schattens kleiner Körper sich zeigenden Farbenstreifen und die buschförmigen Fransen, die in dem Schatten undurchsichtiger Gegenstände von rechtwinkeliger Begrenzung sichtbar werden.

Newton[2] wiederholte und variirte die Versuche Grimaldi's, wandte einfaches farbiges Licht an und maass die Breite der Streifen für verschiedene Farben und Entfernungen, wobei er fand, dass die Streifenbreite mit der Brechbarkeit des Lichtes abnahm und mit der Entfernung zunahm. Er studirte die gegenseitige Einwirkung der beim Vorübergange des Lichtes an den Rändern undurchsichtiger Körper entstehenden Beugungsstreifen, indem er das Licht durch eine von zwei Messerschneiden gebildete Spaltöffnung treten liess und die gegenseitige Entfernung der Schneiden variirte. Er zeigte schliesslich, dass die Streifen auch entstehen, wenn sich der beugende Körper nicht in Luft befindet, indem er ein Haar zwischen zwei Glasplatten brachte und den Zwischenraum mit Wasser füllte.

Newton schrieb, um die Beugungserscheinungen zu erklären, den Körpern, an welchen sich das Licht vorbeibewegt, Kräfte zu, welche auf

[1] *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride, Bononiae,* 1665. — [2] Optik III.

die Lichtmolecüle je nach der Entfernung derselben anziehend oder abstossend wirken und je nach der Farbe des Lichtes verschiedene Ablenkungen hervorbringen sollten [1]).

Delisle bemerkte das Vorhandensein eines hellen Flecks in der Mitte des Schattens eines kleinen kreisrunden Schirmes [2]); sein Versuch gerieth später in Vergessenheit, so dass Poisson die Theorie Fresnel's durch die Bemerkung widerlegen zu können glaubte, dass nach dieser Theorie die Mitte des Schattens eines kleinen kreisrunden Schirmes hell erscheinen müsste.

Mairan [3]) schlug kurz nach der Veröffentlichung der Optik Newton's zur Erklärung der Beugungserscheinungen eine Hypothese vor, welche später von Dutour [4]) wieder aufgenommen und weiter entwickelt wurde. Nach Mairan sollten die Strahlen durch condensirte Luftschichten in der Nähe der Oberflächen der beugenden Körper gebrochen und von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden.

Young war der Erste, welcher die Beugungserscheinungen aus der Wellentheorie zu erklären versuchte. Er schrieb die äusseren Streifen der Interferenz der directen mit den an den Rändern der Körper streifend reflectirten Strahlen zu, die inneren Streifen der Interferenz der an den beiden Rändern durch Inflexion abgelenkten Strahlen, ohne sich über das Wesen dieser Inflexion in befriedigender Weise auszusprechen [5]).

Im Jahre 1815 machten Biot und Pouillet die Entdeckung, dass bei Anwendung einfachen Lichtes die Breite der Fransen in dem Beugungsbilde einer geradlinigen und schmalen Oeffnung im geraden Verhältnisse mit der Wellenlänge der Farben, und im umgekehrten Verhältnisse mit der Breite der Oeffnung stehe [6]).

Fresnel adoptirte in seinen ersten Arbeiten über die Beugung des Lichtes die Ideen Young's, gab dieselben jedoch später auf.

Die Ansichten über das Wesen der Beugung, welche vor Fresnel zum Ausdrucke kamen, erwiesen sich später sämmtlich als unhaltbar.

Fresnel stellte zahlreiche Versuche an, um die Unabhängigkeit der Beugungserscheinungen von der Natur der beugenden Körper nachzuweisen. Schneide und Rücken eines Rasirmessers gaben Streifen von derselben Breite und Intensität; eine durch zwei Kupfercylinder gebildete Spalte gab dasselbe Phänomen, wie eine in Russ geritzte Spalte von derselben Breite [7]). Aehnliche Versuche hatte vor Fresnel schon Haldat angestellt und früher schon Flaugergues. Haldat erzeugte die Beugungserscheinungen durch Metallfäden und bemerkte die Unveränderlichkeit der Erscheinungen bei verschiedenen Einwirkungen auf

---

[1]) Optik III. — [2]) *Mem. de l'anc. Acad. des sc.*, 1715. — [3]) *Mem. de l'anc. Acad. des sc.*, 1738. — [4]) *Mem. des sav. étrang.* V, VI; *Journ. de phys. de Rozier*, V. — [5]) *Lectures on Natural Philosophy.* — [6]) *Élements de Phys. par Pouillet.* — [7]) *OEuvres complètes*, I.

die Fäden, als durch Elektrisirung, Magnetisirung, Temperaturveränderung u. s. w.[1]).

Die Hypothese der condensirten Atmosphären wurde von Magnus widerlegt, welcher die Beugungserscheinungen im leeren Raume hervorbrachte[2]).

Was die Theorie Young's betrifft, so wird dieselbe durch genaue Messungen der Breite der Streifen in verschiedenen Entfernungen vom beugenden Körper widerlegt. Entständen die Streifen durch Interferenz der directen und der reflectirten Strahlen, so müsste mit Rücksicht auf den mit der Reflexion verbundenen Verlust einer halben Welle in einem Punkte P der Ebene E, welche durch den leuchtenden Punkt S geht und den Rand des beugenden Schirmes in A rechtwinkelig durchschneidet, ein Maximum oder Minimum der Intensität auftreten, je nachdem $SA + AP - SP$ einer ungeraden oder geraden Zahl von halben Wellenlängen gleichkäme, und folglich müsste der Durchschnittspunkt eines Streifens von bestimmter Ordnungszahl mit der Ebene E auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte A und S wären. Dies ist nicht der Fall. Zwar liegt jener Punkt auf einer Hyperbel, doch sind S und A nicht die Brennpunkte, sondern die Scheitelpunkte der Hyperbel.

Die richtige Theorie der Beugungserscheinungen, auf welche wir in den folgenden Abschnitten näher eingehen wollen, wurde durch Fresnel begründet. Die Methoden der Berechnung wurden später von mehreren Physikern verbessert und vereinfacht, so von Knochenhauer[3]), Cauchy[4]), Gilbert[5]); es wurden complicirtere Erscheinungen, als die von Fresnel studirten, von mehreren Physikern beobachtet und gemessen, so von Fraunhofer[6]) und Schwerd[7]). In allen Fällen erwies sich die Uebereinstimmung zwischen Experiment und Theorie als vollkommen, so dass bei der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und der Genauigkeit der Messungen, welche sie gestatten, diese Uebereinstimmung eine der stärksten Stützen der Undulationstheorie des Lichtes geworden ist[8]).

Wir werden die Theorie der Beugung in drei Abschnitten behandeln.

Der erste Abschnitt wird von den Wirkungen einer sphärischen, concaven Welle auf die Punkte einer durch das Centrum der Welle gehenden Ebene handeln. Derlei Beugungserscheinungen heissen Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen.

Im zweiten Abschnitte werden wir eine sphärische Welle voraussetzen, deren Mittelpunkt mit der Lichtquelle zusammenfällt und die

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.*, XLI. — [2]) Pogg. LXXXI. — [3]) Die Undulationstheorie des Lichtes, Berlin, 1839; Pogg. XLI, XLIII. — [4]) C. R. II, XV. — [5]) Brüsseler Akad., XXXI. — [6]) Gilbert's Ann., LXXIV; Schumacher's Astronom. Abhandl., II. — [7]) Die Beugungserscheinungen. — [8]) Schwerd, Beugungserscheinungen, S. 10.

Wirkung eines begrenzten Stückes einer solchen Welle auf einen äusseren Punkt berechnen, welcher sich in endlicher Entfernung befindet. Wir werden es hier mit den sogenannten Fresnel'schen Beugungserscheinungen zu thun haben, welche schwieriger zu berechnen und allgemeinerer Natur sind, als die Fraunhofer'schen, so dass sie die letzteren als einen speciellen Fall in sich schliessen.

Im dritten Abschnitte werden wir nicht sphärische Wellen voraussetzen und insbesondere die vollständige Theorie des Regenbogens darlegen.

Die sorgfältigen Beobachtungen Fraunhofer's bezogen sich auf die Beugungsspectra, die durch einen Spalt oder durch ein Gitter im engeren Sinne (eine Reihe von gleich grossen und gleich weit von einander entfernten Spaltöffnungen) oder durch ein Doppelgitter (gekreuztes Gitter) oder durch ein Parthiegitter (mehrere Oeffnungen, die eine Parthie bilden und sich regelmässig in gleichen Abständen wiederholen) oder durch eine kreisförmige Oeffnung entstehen. Mit einem aufs Sorgfältigste gearbeiteten Apparate maass er die Ablenkungswinkel der homogenen Strahlen an den hellsten Stellen der durch Gitter im engeren Sinne entstehenden Beugungsfiguren und fand sie der Gleichung $\sin \Theta_m = \frac{m\lambda}{e}$ entsprechend, wenn m die Ordnung des Spectrums, Θ den Ablenkungswikel, λ die Wellenlänge und e die Summe der Breiten eines Gitterstriches und Zwischenraumes bedeuten. Aus den gemessenen Werthen von Θ und e berechnete er nach dieser Gleichung die Wellenlängen für die hervorragendsten unter den von ihm in dem Spectrum des Sonnenlichtes entdeckten dunkeln Linien, die er in den Spectris der Gitter wiederfand und wählte auch eine vortheilhafte Beobachtungsmethode, indem er ein Fernrohr gegen eine sehr schmale und verticale Oeffnung im Fensterladen eines dunkeln Zimmers richtete und die beugenden Gitter vor dem Objective des Fernrohres aufstellte, so dass die in der Focalebene desselben entstehende Beugungsfigur durch das Ocular vergrössert gesehen wurde. Die Zahl der von Fraunhofer beobachteten Beugungserscheinungen wurde durch John Herschel vermehrt, der ein Dreieck (oder auch mehrere symmetrisch geordnete Dreiecke) als beugende Oeffnungen anwandte und einen sechsstrahligen Lichtstern als Beugungsfigur erhielt.

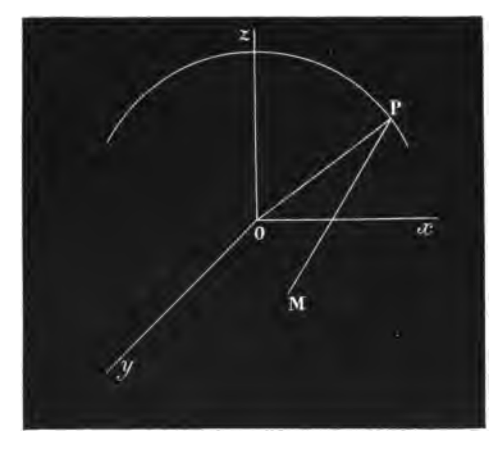
Die aus der Fresnel'schen Theorie gefolgerte Gestalt der Diffractionserscheinungen erstreckte sich bis dahin nur auf die einfachsten Fälle, wie sie von Grimaldi, Newton und Du Tour beobachtet waren, und es hatte bei der Schwierigkeit der Probleme den Anschein, als würde noch ein langer Zeitraum erforderlich sein, ehe man die Beugungsfiguren, wenn die Gestalt und Anzahl der Oeffnungen beliebig ist, als begründet in der Undulationstheorie würde nachweisen können. Um so grössere Anerkennung gebührt dem Verdienste Schwerd's,

der in seinem Werke „Die Beugungserscheinungen", Manheim 1835, eine grosse Zahl von Fällen theoretisch und experimentell behandelte. Schwerd bediente sich der experimentellen Methode Fraunhofer's. Seine verwickelten Rechnungen wurden bald darauf von Radicke[1]) in gedrängterer Kürze gegeben und in demselben Jahre von Littrow[2]) und Knochenhauer[3]) in die Sprache der Differentialrechnung übertragen[4]).

74. Wirkung einer sphärischen concaven Welle auf eine durch das Centrum der Welle gehende Ebene.

Es seien (Fig. 56) O das Centrum der Welle, xy die erleuchtete Ebene, M ein Punkt dieser Ebene, P ein Punkt der Welle, ξ, η die Coordinaten von M, x, y, z diejenigen von P, $\delta^2\sigma$ das dem Punkte P entsprechende Element der Welle und $\varrho = MP$. Wir wählen den Anfang der Zeit so, dass die Vibrationsgeschwindigkeit auf der Wellenfläche nach einer bestimmten Richtug genommen durch

Fig. 56.



$$\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ausgedrückt werden kann. Die Gesammtintensität auf der Wellenfläche wird dann der Summe dreier Intensitäten gleich sein, welche auf drei zu einander senkrechte Axen bezogen sind (52).

Die von P auf M übertragene Geschwindigkeit ist (51):

$$K\delta^2\sigma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right),$$

wo K ein Coëfficient ist, welcher von der Neigung des Elementes $\delta^2\sigma$ gegen PM und von der Grösse dieser Entfernung abhängt. Wir sehen jedoch K als constant an, indem wir annehmen, dass die Wellenfläche durch ein Diaphragma mit sehr kleiner Oeffnung begrenzt sei und dass das Phänomen nur in der Nähe von O betrachtet werde.

---

[1]) Handbuch der Optik, Berlin 1839. — [2]) Gehler's Neue Ausgabe des phys. Wörterbuches, IX. Bd. in dem Artikel „Undulation". — [3]) Die Undulationstheorie des Lichtes, Berlin 1839. — [4]) Siehe „Zur Theorie der Beugungserscheinungen" von E. Wilde, Pogg. 1850.

Die Gesammtgeschwindigkeit in M ist sonach

$$v = \iint \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda}\right) d^2\sigma.$$

Setzen wir $OP = R$, so ist

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$
$$= R^2 - 2x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2$$

oder, wenn die Beugungsöffnung in der Nähe der z-Axe gedacht wird, näherungsweise

$$\varrho = \sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2} - \frac{x\xi + y\eta}{\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}$$
$$d^2\sigma = dx\,dy.$$

Hierdurch wird

$$v = \iint \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} + \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}\right) dx\,dy$$
$$= \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}\right) \iint \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}} dx\,dy$$
$$+ \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}\right) \iint \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}} dx\,dy$$

und wenn

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}\right.$$

$$A = \iint \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}} dx\,dy$$

$$B = \iint \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2 + \xi^2 + \eta^2}} dx\,dy$$

gesetzt wird:

$$v = A \sin\varphi + B \cos\varphi.$$

Setzen wir ferner

$$\Theta = \operatorname{arctang} \frac{B}{A}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

so wird weiter

$$v = C \sin(\varphi + \Theta).$$

Die Intensität in M wird durch das Quadrat von C gemessen. Bezeichnen wir dieselbe durch I, so wird

$$I = \left(\int\int \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}} dx\, dy\right)^2$$
$$+ \left(\int\int \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}} dx\, dy\right)^2,$$

und schliesslich näherungsweise

$$I = \left(\int\int \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{R\lambda} dx\, dy\right)^2$$
$$+ \left(\int\int \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{R\lambda} dx\, dy\right)^2.$$

75. Einführung von Winkelcoordinaten in einem besonderen Falle.

Nehmen wir R unendlich gross an. Die concave Welle geht dann in eine ebene Welle über und der Projectionsschirm ist in unendlicher Entfernung zu denken. Wir werden später sehen, in welcher Weise dieser vorläufig rein theoretische Fall praktische Bedeutung gewinnt. Wir haben (74):

$$I = \left(\int\int \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}} dx\, dy\right)^2$$
$$+ \left(\int\int \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{\lambda\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}} dx\, dy\right)^2.$$

Die Elementarstrahlen, welche in einem Punkte des unendlich entfernten Projectionsschirmes interferiren, treten aus der Beugungsöffnung unter einander parallel aus. Bezeichnen wir ihre von 90^0 wenig verschiedenen Winkel mit den Richtungen der x und der y durch α und β, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\eta}{\sqrt{R^2+\xi^2+\eta^2}}.$$

Hierdurch geht der Ausdruck für die Intensität über in

$$I = \left(\int\int \cos 2\pi \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{\lambda} dx\, dy\right)^2$$
$$+ \left(\int\int \sin 2\pi \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{\lambda} dx\, dy\right)^2.$$

Bezeichnen wir ferner durch δ und δ' die kleinen zu α und β complementären Winkel, welche die parallel austretenden Strahlen mit den

Ebenen yz und xz bilden, so geht der Ausdruck für die Intensität über in

$$I = \left(\iint \cos 2\pi \frac{x \sin \delta + y \sin \delta'}{\lambda} dx\, dy\right)^2 + \left(\iint \sin 2\pi \frac{x \sin \delta + y \sin \delta'}{\lambda} dx\, dy\right)^2.$$

76. Verschiedene Methoden Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen hervorzubringen.

Lässt man Lichtstrahlen von einem Punkte der Axe einer Sammellinse ausgehen, so dass sich dieselben auf der anderen Seite der Linse wieder in einem Punkte treffen, so hat man zwischen der Linse und dem letzteren Punkte sphärische concave Wellen. Bringt man innerhalb dieses Raumes einen Beugungsschirm an, so erhält man auf einem durch den Vereinigungspunkt der directen Strahlen gelegten Schirm das Phänomen, auf welches sich die in (74) gegebene Formel bezieht. Man wird es jedoch meist vorziehen, statt des Schirmes eine Lupe anzuwenden (24). Sammellinse und Lupe finden sich vereinigt im astronomischen Fernrohr. Eine erste Methode, Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen hervorzubringen, besteht also darin, dass ein astronomisches Fernrohr auf einen Lichtpunkt eingestellt und zwischen Objectiv und Ocular ein Beugungsschirm und in der Bildebene der Lichtquelle, auf welche das Ocular eingestellt ist, eine Mikrometertheilung angebracht wird.

Der in (75) besprochene Fall hat die folgende praktische Bedeutung. Fassen wir die aus der Beugungsöffnung in irgend einer Richtung (δ, δ') austretenden Elementarstrahlen ins Auge, von welchen wir uns denken können, dass sie sich in einem Punkte eines unendlich entfernten Schirmes treffen. Lassen wir diese Strahlen durch eine Sammellinse treten, deren Axe mit der Richtung der Strahlen parallel ist. Die Strahlen treffen sich im Brennpunkte der Linse unter denselben Phasendifferenzen, unter welchen sie sich in ihrem Vereinigungspunkte auf dem unendlich entfernten Schirme treffen würden (24). Bedeutet also I die Intensität im Brennpunkte der Linse und sind δ und δ' die Winkel, welche die Axe der Linse mit den Ebenen yz und xz bildet, so behält die in (75) abgeleitete Intensitätsformel ihre Gültigkeit. Es ergiebt sich hieraus eine zweite Methode, Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen hervorzubringen und zu messen. Man lässt die von einem entfernten Lichtpunkte kommenden Strahlen senkrecht auf die Beugungsöffnung fallen und richtet nach derselben ein auf unendlich gestelltes astronomisches Fernrohr mit Fadenkreuz, welches beweglich ist und um mess-

bare Winkel gedreht werden kann. Handelt es sich nicht um genaue Messungen, so kann man, was sehr bequem ist, den Beugungsschirm unmittelbar vor dem Objectiv des auf einen entfernten Lichtpunkt eingestellten unbeweglichen Fernrohres befestigen, oder wenn die Beugungsöffnung sehr klein ist, dieselbe unmittelbar vor das Auge bringen.

Schiebt man das Ocular aus der vorausgesetzten Stellung entweder ein oder zieht man dasselbe aus, so ändern sich die Beugungsfiguren beständig, indem Elementarstrahlen zur Interferenz kommen, welche aus der Beugungsöffnung mehr oder weniger convergent oder divergent austreten. Wir werden auf einige dieser Erscheinungen zurückkommen.

Wie bei den Interferenzstreifen (29) muss auch hier die Lichtquelle eine geringe scheinbare Grösse haben und kann unter Umständen an die Stelle eines Lichtpunktes eine Lichtlinie gesetzt werden. Auch kann man, statt einen entfernten Lichtpunkt zu benutzen, die Strahlen vermittelst eines Collimators parallel machen.

Die in Rede stehende Classe von Beugungserscheinungen wurde zuerst von Fresnel[1]) in Betracht gezogen. Fraunhofer bediente sich zuerst eines Fernrohres und ermittelte die Gesetze namentlich der Gittererscheinungen im engeren Sinne[2]). Herschel machte Beobachtungen über die Bilder der Sterne in Fernrohren, welche mit Diaphragmen von verschiedener Oeffnung versehen waren[3]). Eingehender wurden diese Erscheinungen ferner behandelt von Airy[4]), und namentlich von Schwerd in seinem classischen Werke „Die Beugungserscheinungen, Manheim, 1835“.

Die Fresnel'schen Beugungserscheinungen, welche wir oben charakterisirt haben (73) und auf welche wir später eingehender zurückkommen werden, zeichnen sich vor den Fraunhofer'schen dadurch aus, dass sie nicht nur mit der Gestalt der Oeffnung variabel sind, sondern auch mit der Entfernung vom Beugungsschirm. Sie gestatten nicht nur die Berechnung der Beugungsfigur, welche einer bestimmten Oeffnung entspricht, sie gestatten auch die schönen Variationen durch Rechnung zu verfolgen, welche sich während der Annäherung oder Entfernung der Fresnel'schen Lupe vom Beugungsschirme zeigen; sie sind endlich durch die einfachsten Mittel herzustellen. Das Sonnenbild in einem kleinen Convexspiegel (Gartenkugel) als Lichtquelle, eine Stecknadel, ein in eine Spitze zulaufendes Stückchen Stanniol, eine kreisrunde Oeffnung von 1 bis 2 mm Durchmesser, ein Gitter aus dickerem Drahte u. s. w. als Beugungsschirm in einer Entfernung von ungefähr 10 m von der Lichtquelle und eine Lupe reichen hin zur Wahrnehmung einer grossen Mannigfaltigkeit charakteristischer Erscheinungen.

---

[1]) *OEuvres complètes*, I. — [2]) Gilbert's Ann., LXXIV. — [3]) Optik, I. — [4]) *Mathematical Tracts, Cambridge*, 1831.

77. Beugung durch eine rechteckige Oeffnung.

Um die in (74) abgeleitete Formel auf eine rechteckige Beugungsöffnung anzuwenden, legen wir das Coordinatensystem so, dass die z-Axe durch die Mitte der Oeffnung geht und die beiden anderen Axen den Seiten a, b der Oeffnung parallel laufen.

Wir haben dann

$$I = \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{R\lambda}\, dx\, dy\right)^2 + \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sin 2\pi \frac{x\xi + y\eta}{R\lambda}\, dx\, dy\right)^2$$

$$= \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy - \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sin 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sin 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy\right)^2$$

$$+ \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sin 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sin 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy\right)^2.$$

Bemerken wir, dass

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sin 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx = 0, \qquad \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sin 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy = 0,$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos 2\pi \frac{x\xi}{R\lambda}\, dx = \frac{R\lambda}{\pi\xi} \sin \pi \frac{a\xi}{R\lambda},$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos 2\pi \frac{y\eta}{R\lambda}\, dy = \frac{R\lambda}{\pi\eta} \sin \pi \frac{b\eta}{R\lambda}$$

so wird

$$I = \frac{R^4 \lambda^4}{\pi^4 \xi^2 \eta^2} \sin^2 \pi \frac{a \xi}{R \lambda} \cdot \sin^2 \pi \frac{b \eta}{R \lambda}$$

und schliesslich

$$I = a^2 b^2 \frac{\sin^2 \pi \dfrac{a \xi}{R \lambda}}{\dfrac{\pi^2 a^2 \xi^2}{R^2 \lambda^2}} \cdot \frac{\sin^2 \pi \dfrac{b \eta}{R \lambda}}{\dfrac{\pi^2 b^2 \eta^2}{R^2 \lambda^2}}.$$

Genau in gleicher Weise würden wir aus der Formel in (75) erhalten haben

$$I = a^2 b^2 \frac{\sin^2 \dfrac{\pi a \sin \delta}{\lambda}}{\dfrac{\pi^2 a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{\sin^2 \dfrac{\pi b \sin \delta'}{\lambda}}{\dfrac{\pi^2 b^2 \sin^2 \delta'}{\lambda^2}}.$$

Die Intensität im Punkte ξ, η oder δ, δ' erscheint sonach als abhängig von zwei variabeln Factoren von der Form $\frac{\sin^2 u}{u^2} = S$.

S ist 1 für $u = 0$ und 0 für $u = m\pi$, wenn m eine ganze Zahl und nicht Null ist.

Um die Maxima und Minima von S zu erhalten, differenziren wir:

$$\frac{\sin u}{u} \cdot \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin u}{u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt die Lage der Minima der Function S. Die zweite giebt die Lage der Maxima und kann auf die Form gebracht werden:

$$u \cos u - \sin u = 0$$

oder

$$u = \operatorname{tang} u.$$

Diese Gleichung hat eine erste Wurzel gleich Null; eine zweite liegt zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$, eine dritte zwischen 2π und $\frac{5\pi}{2}$ u. s. w. Im Allgemeinen liegt zwischen $2n\frac{\pi}{2}$ und $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ stets eine und nur eine Wurzel der Gleichung. Die Werthe dieser Wurzeln wurden von Schwerd berechnet und sind

$$\frac{u_1}{\pi} = 1,4303 \qquad \frac{u_5}{\pi} = 5,4818$$

$$\frac{u_2}{\pi} = 2,4590 \qquad \frac{u_6}{\pi} = 6,4844$$

$$\frac{u_3}{\pi} = 3,4709 \qquad \frac{u_7}{\pi} = 7,4865$$

$$\frac{u_4}{\pi} = 4,4774 \qquad \ldots\ldots$$

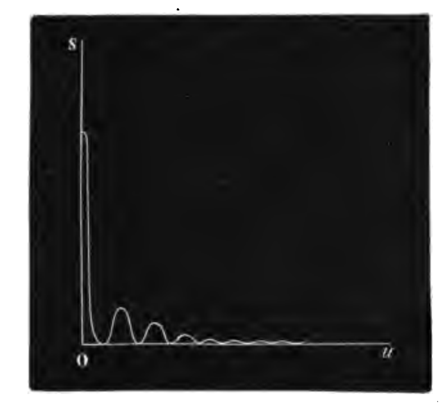
Man sieht, dass die Wurzel u_n sich der Limite $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ nähert, was auch leicht unmittelbar eingesehen werden kann.

Die Maxima der Function S sind sonach:

$$1, \quad \frac{sin^2 u_1}{u_1^2}, \qquad \frac{sin^2 u_2}{u_2^2} \ldots,$$

die Minima sind sämmtlich Null. Die Maxima nehmen rasch an Grösse ab, da u_n^2 continuirlich und rasch wächst, während $sin^2 u_n$ stets kleiner als eins bleibt. Der Verlauf der Function S ist in Fig. 57 durch eine Curve versinnlicht.

Fig. 57.



Wir können uns nun eine Vorstellung von dem Aussehen des Phänomens machen, welches durch die rechteckige Oeffnung hervorgebracht wird. Wir haben vollkommene Dunkelheit in allen Punkten, für welche einer der beiden variabeln Factoren des für J gefundenen Ausdruckes gleich Null wird, d. i. in allen Punkten, für welche, unter m eine ganze, von der Null verschiedene Zahl verstanden,

$$\frac{\pi a \xi}{R\lambda} = m\pi$$

oder

$$\frac{\pi b \eta}{R\lambda} = m\pi.$$

Es existiren also zwei Systeme vollkommen dunkler Streifen, deren Gleichungen

$$\xi = \frac{mR\lambda}{a} \text{ und } \eta = \frac{mR\lambda}{b}$$

sind. Die beiden Streifensysteme bilden ein Netz rechtwinkliger Maschen,

welche unter einander congruent, mit der Beugungsöffnung ähnlich und der Lage nach gegen letztere um 90 Grad gedreht sind. Je länger eine der Seiten der Oeffnung ist, deso gedrängter erscheinen die Streifen, welche auf der Richtung dieser Seite senkrecht stehen. Fig. 58 stellt das Netz dunkler Streifen und die Beugungsöffnung in ihrer gegenseitigen Lage dar.

Für jede der Geraden $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ist einer der beiden variabeln Factoren des Ausdruckes für I gleich Eins, während der andere äquidistante Minima gleich Null und an Grösse rasch abnehmende Maxima zeigt. Die Intensität längs einer dieser Geraden zeigt also die durch die Curve in Fig. 57 versinnlichten Veränderungen. Jede dieser beiden Geraden liegt zwischen zwei Linien des dunkeln Netzes, welches in Fig. 58 abgebildet ist und der Punkt ($\xi = 0$, $\eta = 0$) ist der hellste Punkt des Phänomens. Für alle Punkte, welche keiner dieser beiden Geraden nahe liegen, sind die beiden variabeln Factoren von I kleine Grössen; es ist also die Intensität des Phänomens längs dieser Geraden am grössten, und der sichtbarste Theil desselben besteht aus einer Art Kreuz, parallel zur Richtung der x und der y. Ist die Beugungsöffnung nicht sehr klein, so können die Maxima und Minima so nahe aneinander liegen, dass sie nicht unterschieden werden. Man nimmt dann nur zwei sich rechtwinklig durchkreuzende helle gerade Linien wahr, deren Intensität vom Kreuzungspunkte aus abnimmt. In dieser Art erschien W. Herschel das Bild eines hellen Sternes, als er vor das Objectiv des Fernrohres ein Diaphragma mit rechteckiger Oeffnung brachte[1]). Je kleiner die Beugungsöffnung ist, desto ausgedehnter wird das Phänomen und desto wahrnehmbarer seine Einzelheiten. Die Mitte bildet ein helles Rechteck, welches gegen das der Beugungsöffnung um 90 Grade gedreht ist; in der Richtung der beiden Axen erscheinen weitere helle Rechtecke angereiht, von derselben Gestalt und Lage, doch rasch abnehmender Intensität. In den Räumen zwischen den Axen erscheinen ähnliche Maxima von beträchtlich geringerer Intensität.

Fig. 58.



Bei Anwendung weissen Lichtes verwandeln sich die Maxima in Spectra; die Werthe von ξ und η, welche den Maximis und Minimis derselben Ordnung entsprechen, wachsen mit der Wellenlänge, sämmtliche Spectra zeigen die rothen Enden dem Punkte O abgekehrt.

---

[1]) Optik, I.

78. Beugung durch eine Spalte.

Lassen wir eine der beiden Dimensionen der in (77) betrachteten rechteckigen Oeffnung, z. B. b, sehr gross werden, d. i. lassen wir die rechteckige Oeffnung in eine Spaltöffnung übergehen, so reducirt sich das Phänomen auf den Ort einer geraden Linie, welche durch den leuchtenden Punkt geht und auf der Spalte senkrecht steht. Dies ergiebt sich aus der für die rechteckige Oeffnung aufgestellten Intensitätsformel oder aus der Betrachtung der Fig. 57 unter der Voraussetzung sehr nahe aneinander gerückter Minima des einen der beiden Streifensysteme. Die Linie, auf welche sich das Phänomen reducirt, zeigt Minima gleich Null und an Grösse rasch abnehmende Maxima. Man kann, um das Phänomen sichtbarer zu machen, wie auch, wenn die Beugungsöffnung aus mehreren parallelen Spalten besteht, statt eines Lichtpunktes eine zu der Spaltöffnung parallele Lichtlinie als Lichtquelle benutzen. Dann gewinnt das früher lineare Phänomen eine zweite Ausdehnung in der Richtung der Lichtquelle, so dass die Intensität längs jeder zur Lichtquelle parallelen Geraden constant erscheint.

Um die Intensitätsgleichung zu erhalten, setzen wir in die für eine rechteckige Oeffnung gefundene Intensitätsgleichung, da wir das Phänomen nur längs der x-Axe betrachten, $\eta = 0$, wodurch der letzte Factor $= 1$ wird. Nehmen wir ferner Winkelcoordinaten an, so haben wir, unter δ den Beugungswinkel verstanden, d. i. den Winkel, welchen die in irgend einer Richtung parallel austretenden Elementarstrahlen mit der Richtung der directen Strahlen bilden, bei Unterdrückung des constanten Factors b^2 (77):

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi \dfrac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \dfrac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} = a^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

Die Minima dieser Function sind (77) gegeben durch

$$u = m\pi,$$

wenn m eine ganze, von Null verschiedene Zahl ist. Die Intensität ist also Null für alle Richtungen, für welche

$$\sin \delta = \frac{m\lambda}{a},$$

oder wenn δ sehr klein ist,

$$\delta = \frac{m\lambda}{a}.$$

Die Beugungswinkel der Maxima der Intensität sind gegeben durch die Gleichung

$$\sin\delta = \frac{u_n \lambda}{\pi a},$$

wenn u_n eine der Wurzeln der Gleichung

$$u = \operatorname{tang} u$$

vorstellt (77), oder für kleine δ

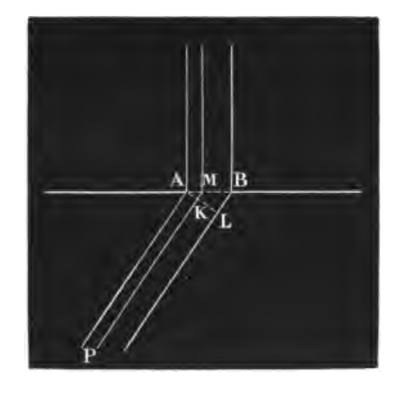
$$\delta = \frac{u_n \lambda}{\pi a}.$$

Hat n einen etwas beträchtlicheren Werth, so unterscheidet sich u_n (77) wenig von $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$. Man erhält also für die Maxima grösserer Ordnungszahlen näherungsweise

$$\sin\delta = \frac{(2n + 1)\lambda}{2a}.$$

Bei weissem Lichte erscheint die Mitte des Phänomens weiss. Die übrigen Maxima gehen in Spectra über, deren minder brechbare Enden von der Mitte abgekehrt sind. Diese durch eine einzige Spalte hervorgebrachten Spectra nennt Fraunhofer Spectra erster Classe.

Fig. 59.



Man kann die Lage der Minima leicht auch auf elementarem Wege finden. Die Intensität wird offenbar Null, wenn (Fig. 59) BL eine ganze Zahl von Wellenlängen enthält, d. i. wenn

$$BL = m\lambda$$

oder, da $BL = a \sin\delta$, wenn

$$\sin\delta = \frac{m\lambda}{a}.$$

Die Lage der Maxima auf elementarem Wege zu finden, ist minder leicht; doch ist einleuchtend, dass dieselben näherungsweise durch die Bedingung gegeben sind, es betrage BL eine ungerade Zahl heller Wellenlängen, woraus sich ergiebt

$$\sin\delta = \frac{(2n + 1)\lambda}{2a}.$$

79. Beugung durch zwei parallele und gleichbreite Spalten.

Setzen wir wieder die Breite einer Spalte gleich a und setzen wir die Breite des Raumes zwischen den beiden Spalten gleich d. Nehmen wir an, dass von einem unendlich entfernten Punkte kommende Lichtstrahlen senkrecht auf die Ebene der Spalten auffallen und dass die Beugungserscheinung vermittelst eines drehbaren, auf unendlich eingestellten, Fernrohres betrachtet werde, so dass die im Brennpunkte des Fernrohres sich treffenden Elementarstrahlen parallel aus der Beugungsöffnung austreten. Der Winkel der in irgend einer Richtung austretenden Elementarstrahlen mit der Richtung der directen Strahlen, der Beugungswinkel, heisse wieder δ.

Die Elementarstrahlen, welche aus einer der beiden Spaltöffnungen in einer durch δ bestimmten Richtung austreten, geben (78) die resultirende Intensität:

$$\alpha^2 = a^2 \frac{\sin^2 \pi \dfrac{a \sin\delta}{\lambda}}{\pi^2 \dfrac{a^2 \sin^2\delta}{\lambda^2}}.$$

Da ferner zwischen den unter dem Beugungswinkel δ von den beiden Spaltöffnungen kommenden resultirenden Strahlen die Wegdifferenz $(a + d) \sin\delta$ besteht, so erhalten wir (55) für die dem Beugungswinkel δ entsprechende Gesammtintensität:

$$\begin{aligned} I &= 2\alpha^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{(a+d)\sin\delta}{\lambda}\right) \\ &= 2\alpha^2 \,.\, 2\cos^2 \pi \frac{(a+d)\sin\delta}{\lambda} \\ &= 4a^2 \frac{\sin^2 \pi \dfrac{a \sin\delta}{\lambda}}{\pi^2 \dfrac{a^2 \sin^2\delta}{\lambda^2}} \cdot \cos^2 \pi \frac{(a+d)\sin\delta}{\lambda}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält zwei variable Factoren. Der eine ist von der Form $\frac{\sin^2 u}{u^2}$, hat also äquidistante Minima gleich Null und rasch an Grösse abnehmende Maxima (77). Der andere hat ebenfalls äquidistante Minima gleich Null und äquidistante Maxima, welche sämmtlich der Einheit gleich sind. Die Minima des letzteren Factors sind gegeben durch

$$\sin\delta = \frac{(2n+1)\lambda}{2(a+d)},$$

die Maxima durch

$$\sin\delta = \frac{n\lambda}{a+d}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen besagt, dass die Wegdifferenz der von homologen Punkten der beiden Spalten kommenden Strahlen eine ungerade, die zweite, dass sie eine gerade Zahl halber Wellenlängen betrage.

Die resultirende Intensität wird Null, wenn einer der beiden variabeln Factoren Null wird, sie wird also Null für jene Richtungen, für welche

$$\sin\delta = \frac{m\lambda}{a}$$

oder

$$\sin\delta = \frac{(2n+1)\lambda}{2(a+d)}.$$

Das Phänomen zeigt also zwei Systeme dunkler Linien, das eine hängt von der Breite einer der Spalten ab, das andere von der gegenseitigen Entfernung der Mitten der beiden Spalten. Die Streifen des zweiten Systems liegen näher aneinander, als die des ersten und erscheinen um so gedrängter, je grösser der Raum zwischen den beiden Spalten ist.

Im weissen Lichte nimmt man einen weissen Centralstreifen wahr und zu beiden Seiten Spectra, welche das rothe Ende dem Centralstreifen abkehren und deren Intensität mit wachsender Entfernung vom Centralstreifen rasch abnimmt. Die vom ersten Factor herrührenden Spectra sind die besprochenen Spectra erster Classe (78), die vom zweiten Factor herrührenden minder ausgedehnten Spectra heissen Spectra zweiter Classe.

Wenn der Raum zwischen den Spalten hinreichend gross ist im Vergleiche mit der Breite einer Spalte, so dass die Spectra zweiter Classe sehr schmal werden, so kann es geschehen, dass sämmtliche sichtbare Spectra zweiter Classe auf den achromatischen Streifen des Phänomens einer der Spaltöffnungen fallen.

Wird eines der beiden von den zwei Spaltöffnungen kommenden Strahlenbüschel zwischen Beugungsschirm und Fernrohr verzögert, so findet eine Verschiebung der Streifen zweiter Classe statt. Werden die beiden Strahlenbüschel in verschiedenen Entfernungen vom Beugungsschirme in gleichem Maasse geschwächt, z. B. durch Reflexion an einer gegen die Strahlen geneigten Glasplatte, so findet ebenfalls eine Verschiebung der Streifen zweiter Classe statt. J. J. Müller hat in dieser Weise eine Abhängigkeit der Wellenlänge oder Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Intensität nachgewiesen (30)[1].

---

[1]) Pogg. CXLV und CL.

80. Beugung durch eine grosse Zahl gleicher, paralleler und äquidistanter Spaltöffnungen. — Gittererscheinungen im engeren Sinne.

Die experimentellen Gesetze der Gittererscheinungen im engeren Sinne wurden von Fraunhofer dargelegt, ihre Theorie von Schwerd[1]) entwickelt. Sie sind als ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung der Wellenlängen besonders wichtig.

Wir setzen ein Gitter voraus bestehend aus n gleich breiten äquidistanten Spaltöffnungen, nennen a die Breite einer Oeffnung, d den Raum zwischen zwei Oeffnungen und nehmen an, das Phänomen werde durch senkrecht auf das Gitter auffallende Strahlen erzeugt und auf einen unendlich entfernten Schirm projicirt oder vermittelst eines Fernrohres beobachtet.

Berechnen wir die Wirkung der unter einem Beugungswinkel δ austretenden Elementarstrahlen. Die Elementarstrahlen einer der Oeffnungen setzen sich zu einem resultirenden Strahle zusammen, dessen Vibrationsgeschwindigkeit v sei. Wir haben dann noch so viele solcher Strahlen zusammenzusetzen, als Oeffnungen vorhanden sind. Es besteht aber zwischen einem solchen Strahle und dem der nächsten Oeffnung entsprechenden eine constante Phasendifferenz, welche wir durch ε bezeichnen wollen. Wir haben also für die resultirende Intensität (55):

$$\begin{aligned} I &= (v \cos\varepsilon + v \cos 2\varepsilon + v \cos 3\varepsilon + \ldots + v \cos n\varepsilon)^2 \\ &\qquad + (v \sin\varepsilon + v \sin 2\varepsilon + v \sin 3\varepsilon + \ldots + v \sin n\varepsilon)^2 \\ &= v^2 \left[(\cos\varepsilon + \cos 2\varepsilon + \ldots \cos n\varepsilon)^2 \right. \\ &\qquad \left. + (\sin\varepsilon + \sin 2\varepsilon + \ldots + \sin n\varepsilon)^2\right] \end{aligned}$$

und durch die bekannte Summation der hier vorkommenden Reihen[2]):

$$I = v^2 \left[\left(\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2} \cdot \cos\frac{(n+1)\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2\right]$$

$$= v^2 \cdot \frac{\sin^2\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Setzen wir für v und ε ihre Werthe:

---

[1]) Die Beugungserscheinungen, 1835. — [2]) Herr, Lehrbuch d. höh. Math., I, p. 66.

$$v^2 = a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

$$\varepsilon = \frac{(a + d) \,.\, \sin \delta}{\lambda} \,.\, 2\pi,$$

so erhalten wir für die dem Beugungswinkel δ entsprechende Intensität des Gitterphänomens:

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{\sin^2 n\pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}.$$

Dieser Ausdruck enthält zwei variable Factoren, welche wir durch P und Q bezeichnen wollen. Die Variationen des Factors P wurden schon in (77) in Betracht gezogen, er zeigt äquidistante Minima gleich Null und rasch abnehmende Maxima. Es handelt sich noch um die Maxima und Minima des zweiten Factors, Q.

Setzen wir

$$\pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda} = z,$$

so nimmt er die Form an:

$$\frac{\sin^2 nz}{\sin^2 z}.$$

Um nun die Werthe von z zu finden, welche Q zu einem Maximum oder Minimum machen, setzen wir das Differential von Q in Bezug auf z der Null gleich:

$$\frac{\sin nz \,(n \sin z \cos nz - \cos z \sin nz)}{\sin^3 z} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch

$$\frac{\sin nz}{\sin z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und

$$\frac{n \sin z \cos nz - \cos z \sin nz}{\sin^2 z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Wurzeln der Gleichung (1) sind gegeben durch

$$z = \frac{k}{n}\pi,$$

wo k eine ganze, durch n nicht theilbare Zahl bedeutet. Ist k durch n theilbar, so nimmt $\frac{\sin nz}{\sin z}$ die Form $\frac{0}{0}$ an und man findet für den wah-

ren Werth nach dem gewöhnlichen Verfahren durch Differentiation des Zählers und des Nenners den Werth n, welcher die Gleichung nicht befriedigt. Die Wurzeln der Gleichung (1) in Q eingesetzt, reduciren diesen Factor auf Null und entsprechen also Minimis. Die entsprechenden Beugungswinkel sind

$$\sin\delta = \frac{k}{n}\frac{\lambda}{a+d},$$

wo k eine durch n nicht theilbare ganze Zahl bedeutet. Für alle Richtungen, welche dieser Gleichung entsprechen, ist Q, also auch die Lichtintensität gleich Null.

Die Gleichung (2) wird zunächst befriedigt durch

$$z = m\pi,$$

wo eine beliebige ganze Zahl ist. Setzt man nämlich diesen Werth ein, so erhält man auf der linken Seite zunächst $\frac{0}{0}$ und wenn man den wahren Werth durch Differentation bestimmt, Null. Die Substitution giebt für Q zunächst $\frac{0}{0}$ und, nach dem gewöhnlichen Verfahren:

$$\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2 = \left(\frac{\partial\,.\,\sin nz}{\partial\,.\,\sin z}\right)^2 = \left(\frac{n\,\cos nz}{\cos z}\right)^2 = n^2.$$

Der Factor Q hat also äquidistante Maxima gleich n^2 für alle Richtungen, für welche $z = m\pi$ oder

$$\sin\delta = \frac{m\lambda}{a+d},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl ist. Wir wollen diese Maxima **Hauptmaxima** nennen.

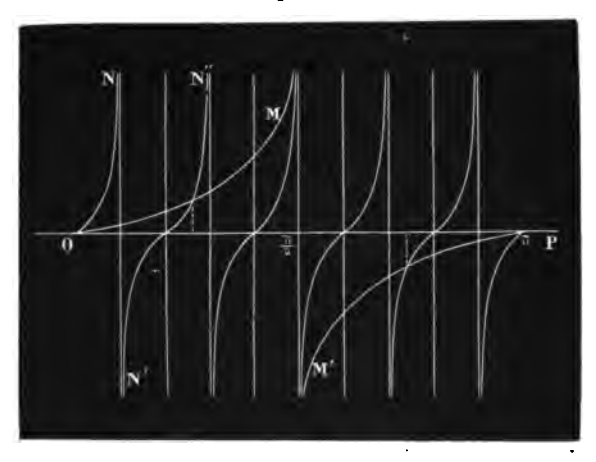
Ist z nicht gleich $m\pi$, also $\sin z$ nicht gleich Null, so nimmt die Gleichung (2) die Form an

$$\operatorname{tang} nz = n \operatorname{tang} z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

wo z nicht gleich $m\pi$, und die Wurzeln dieser Gleichung werden ebenfalls Maximis oder Minimis der Intensität entsprechen. Suchen wir zunächst jene Wurzeln der Gleichung (3), welche zwischen $z = 0$ und $z = \pi$ liegen. Während z von 0 bis $\frac{\pi}{2n}$ wächst, wächst sowohl $\operatorname{tang} nz$ als $n \operatorname{tang} z$, und zwar erstere Grösse schneller. Es existirt also innerhalb dieses Intervalles keine Wurzel. Wächst z weiter von $\frac{\pi}{2n}$ bis $\frac{3\pi}{2n}$, so wächst $\operatorname{tang} nz$ von $-\infty$ bis $+\infty$, während $n \operatorname{tang} z$ ebenfalls wächst. Es existirt also innerhalb dieses Intervalles eine und nur eine Wurzel.

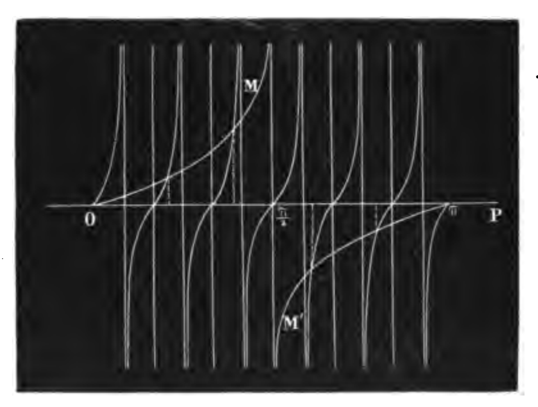
Der Gang der Functionen $n \tang z$ und $\tang nz$ ist in Fig. 60 für $n = 5$ und in Fig. 61 für $n = 6$ durch Curven dargestellt. Die Abscissen geben die Werthe von z, die Ordinaten die Werthe der beiden Func-

Fig. 60.



tionen. Lassen wir z von 0 bis π wachsen, so ist die eine der beiden Functionen, $n \tang z$, durch die aus den beiden Aesten OM, $M'P$ bestehende Curve gegeben, die andere, $\tang nz$, durch eine aus $n + 1$ Aesten, ON, $N'N''$ ... bestehende Curve. Die Ordinaten der Durch-

Fig. 61.



schnitte dieser beiden Curven sind die Wurzeln der Gleichung (3). Man sieht, dass zwischen $\frac{\pi}{2n}$ und $\frac{3\pi}{2n}$ eine und nur eine Wurzel enthalten ist, allgemein gesprochen zwischen $(2p - 1)\frac{\pi}{2n}$ und $(2p + 1)\frac{\pi}{2n}$, wo p eine ganze Zahl und $2p + 1$ kleiner als n ist. Man könnte

schliessen, dass zwischen 0 und π an Zahl $n - 1$ Wurzeln existiren. Es giebt aber deren nur $n - 2$, da für ein gerades n zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$ und $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$ keine Wurzel liegt und für ein ungerades n die beiden zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$ und $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$ enthaltenen Wurzeln ein und denselben Werth $\frac{\pi}{2}$ annehmen. Wir haben also zwischen 0 und π an Zahl $n - 2$ Wurzeln, $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-2}$. Vermehren wir eine von ihnen um $q\pi$, wo q eine ganze Zahl bedeutet, so haben wir abermals eine Wurzel. Es folgt, dass allgemein zwischen $q\pi$ und $(q + 1)\pi$ an Zahl $n - 2$ Wurzeln gleich $z_1 + q\pi, z_2 + q\pi, z_3 + q\pi, \ldots z_{n-2} + q\pi$ liegen. Wir wollen jene Werthe von Q, welche dieser zweiten Gruppe von Wurzeln der Gleichung (2) entsprechen, secundäre Maxima nennen.

Man sieht leicht, dass die secundären Maxima gegen die Hauptmaxima sehr klein sind. Um dies zu zeigen, bringen wir die Gleichung (3) auf die Form:

$$\frac{n^2 \sin^2 z}{1 - \sin^2 z} = \frac{\sin^2 nz}{1 - \sin^2 nz}$$

und erhalten

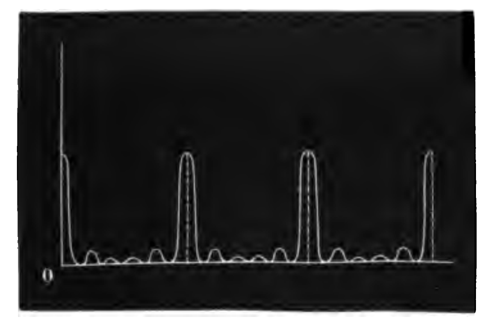
$$\frac{\sin^2 nz}{\sin^2 z} = \frac{n^2}{1 + (n^2 - 1)\sin^2 z}$$

und

$$Q = \frac{n^2}{1 + (n^2 - 1)\sin^2 z}.$$

Da $\sin z$ von der Null verschieden ist, so sieht man, dass für grosse n die secundären Maxima gegen die Hauptmaxima, deren Grösse n^2 ist, klein sind. Man sieht auch, dass die secundären Maxima des Factors Q, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hauptmaximis enthalten sind, nicht äquidistant, doch der Lage und Grösse nach symmetrisch bezüglich der Mitte des zwischen den beiden Hauptmaximis enthaltenen Intervalles sind und dass sie gegen diese Mitte zu an Grösse rasch abnehmen.

Fig. 62.



Der Gang der Function Q für $n = 6$ ist in Fig. 62 durch eine Curve dargestellt, welche sich auf ein Wachsthum der Grösse z von 0 bis 3π bezieht.

Wir wiederholen: Der Factor Q zeigt:

1. Aequidistante Minima gleich Null entsprechend den Beugungswinkeln

$$sin\,\delta = \frac{k}{n}\,\frac{\lambda}{a+d},$$

wo k eine ganze, durch n nicht theilbare Zahl ist.

2. Aequidistante Hauptmaxima gleich n^2 entsprechend den Beugungswinkeln

$$sin\,\delta = m\,\frac{\lambda}{a+d},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl ist.

3. Secundäre Maxima, $n - 2$ zwischen zwei Hauptmaximis, weder gleich gross noch äquidistant und an Grösse verschwindend gegen die Hauptmaxima, wenn n gross ist.

Würde also die Intensität nur vom Factor Q abhängen, so würde man eine, den Hauptmaximis entsprechende, Reihe heller Streifen wahrnehmen, gleich hell, äquidistant, und unabhängig von n. In den Räumen zwischen diesen Streifen würden sich wieder helle, den secundären Maximis entsprechende, Streifen zeigen, welche bei wachsendem n an Zahl zunehmend endlich nicht mehr unterschieden und nur als ein geringer Grad allgemeiner Helligkeit wahrgenommen würden.

In Wirklichkeit hängen jedoch die Variationen der Intensität auch noch vom Factor P ab. Dieser Factor ändert sich langsamer als Q, da die Minima von P durch

$$sin\,\delta = m\,\frac{\lambda}{a},$$

die Hauptmaxima von Q durch

$$sin\,\delta = m\,\frac{\lambda}{a+d}$$

gegeben sind. Es wird also Q durch eine Reihe von Hauptmaximis gehen, ehe P sein erstes Minimum erreicht, was bei hinreichender Kleinheit von a selbst erst ausserhalb des Gesichtsfeldes geschehen kann, und der Einfluss des Factors P wird sich in folgender Weise geltend machen:

1. Da dieser Factor an Grösse rasch abnimmt, so werden die Hauptmaxima um so lichtschwächer werden, je mehr sie sich vom Centralstreifen entfernen.

2. Da die Minima von P Null sind, wird, wenn ein Hauptmaximum von Q mit einem Minimum von P zusammenfällt, die Intensität, statt durch ein Maximum zu gehen, Null sein. Dies wird geschehen, wenn

$$\frac{m\lambda}{a} = \frac{m'\lambda}{a+d}$$

oder
$$\frac{a}{a+d} = \frac{m}{m'}$$
und
$$\frac{a}{d} = \frac{m}{m'-m}.$$

Bei Anwendung weissen Lichtes wird man sonach drei Gattungen Spectra unterscheiden: Die Spectra erster Classe, welche von den Variationen des Factors P herrühren, die Spectra zweiter Classe, welche den Hauptmaximis des Factors Q entsprechen, und Spectra dritter Classe, welche zwischen den Spectren zweiter Classe liegen und den secundären Maximis des Factors Q entsprechen. Werden die Oeffnungen schmal und zahlreich, so werden die Spectra dritter Classe so gedrängt, dass sie nicht mehr unterschieden werden, und die Spectra erster Classe manifestiren ihre Existenz nur durch eine allmälige Abschwächung der Spectra zweiter Classe, so dass diese allein sichtbar bleiben und die Fraunhofer'schen Linien zeigen. Die Beziehung der Wellenlängen dieser Linien zu ihrer Lage im Spectrum ist eine einfache im Gegensatze zu den Prismenspectren. Man sieht also bei einer grossen Zahl sehr enger Spaltöffnungen in der Mitte einen hellen, achromatischen Streifen, dann beiderseits dunkle Räume und hierauf eine Folge von Spectren, welche ihre minder brechbaren Enden nach aussen kehren, die Fraunhofer'schen Linien zeigen, an Intensität abnehmen und sich verbreiten, so dass die dunklen Zwischenräume verschwinden und die Spectra mehr und mehr übereinanderfallen.

Einer Farbe von bestimmter Wellenlänge entsprechen Beugungswinkel, welche durch
$$\sin \delta = \frac{m\lambda}{a+d},$$
oder für kleine Winkel δ durch
$$\delta = \frac{m\lambda}{a+d}$$
gegeben sind. Also:

1. Die Beugungswinkel ein und derselben homogenen Farbe in den aufeinanderfolgenden Spectren zweiter Classe verhalten sich wie die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

2. Sie hängen nicht von der Zahl der Oeffnungen des Gitters ab.

3. Die Längen der aufeinanderfolgenden Spectra zweiter Classe oder genauer, der zwischen bestimmten Farben liegenden Theile derselben, verhalten sich wie die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

4. Die Lage der Spectra hängt nur von der Summe $a + d$ einer Oeffnung und eines Zwischenraumes ab, also nicht von dem Verhältnisse $a : d$.

Diese Resultate der Rechnung sind dieselben, welche Fraunhofer durch zahlreiche Versuche gefunden hat.

Ist die Zahl der Oeffnungen grösser als zwei, so haben wir drei Classen Spectra. Ist die Zahl der Oeffnungen nicht zu gross, so kann man bei hinreichend intensiver Lichtquelle die Spectra dritter Classe zwischen den Spectren zweiter Classe wahrnehmen, wenigstens in der Nähe des Centralstreifens. Diese Spectra waren Fraunhofer entgangen und die Entdeckung derselben durch Schwerd wurde für diesen der Ausgangspunkt seiner Arbeiten über die Beugung.

Fig. 63.



Zum Schlusse wollen wir noch den Fall betrachten, wo die Strahlen schief auf das Gitter fallen.

Es sei (Fig. 63) i der Einfallswinkel, δ der Winkel der gebeugten Strahlen mit den einfallenden Strahlen. Sind nun A, M zwei Punkte des Gitters, so ist die Wegdifferenz, welche zwischen den von diesen Punkten kommenden Strahlen besteht,

$$QM + MR = AM \,.\, \sin i + AM \sin(\delta - i).$$

Ist i klein, so wird diese Wegdifferenz

$$AM \,.\, \sin i + AM \sin\delta \cos i - AM \cos\delta \sin i$$

$$= AM \,.\, \sin\delta + 2\, AM \sin i \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

$$= AM \sin\delta.$$

Die für senkrechte Incidenz abgeleiteten Gesetze gelten daher auch für schiefe Incidenzen, wenn der Incidenzwinkel klein ist, und die Deviation nicht von der Normale des Gitters, sondern von der Richtung der einfallenden Strahlen aus gerechnet wird.

Man versteht überhaupt unter dem Beugungswinkel den Winkel der gebeugten Strahlen mit den directen.

Es ist also bei Bestimmung der Wellenlängen mit Hülfe der Gitter nicht nothwendig, auf die normale Incidenz eine grosse Sorgfalt zu verwenden.

81. Beugung durch ein lamellares Oeffnungspaar [1]).

Belegt man eine planparallele Glasplatte mit einer dünnen, durchsichtigen Lamelle und bringt in dieser äquidistante spaltförmige Oeffnungen an, in ähnlicher Weise, wie man Gitter in Russ oder Goldblatt theilt,

---

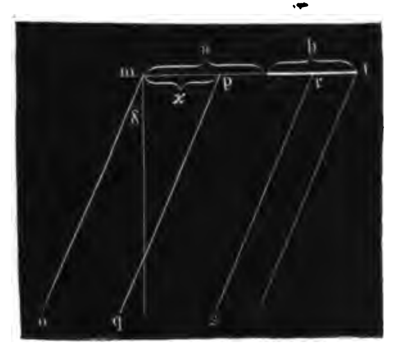
[1]) Quincke, Pogg. CXXXII.

so nimmt man durch ein solches Gitter ähnliche Erscheinungen wahr, wie bei einem Gitter mit undurchsichtigen Zwischenräumen.

Wir wollen zunächst nur ein Element eines solchen Gitters berechnen, bestehend aus einem unbelegten und einem daneben liegenden belegten Theile des Gitters.

Es sei (Fig. 64) *mt* die Doppelspalte, *a* der unbelegte, *b* der belegte Theil derselben. Wir ziehen die Elementarstrahlen in Betracht, welche unter dem Beugungswinkel δ von den verschiedenen Punkten der Doppelspalte ausgehen, und berechnen die Intensität im Focus eines Fernrohres, dessen Axe jenen Elementarstrahlen parallel ist (76). Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Doppelspalte in unendlich schmale Elemente parallel der Längenausdehnung der Spalte, nennen x die Entfernung eines solchen Elementes vom Rande *m* der Spalte, dx die Breite desselben, K die durch einen Theil von der Breite 1 der unbelegten Oeffnung, K' die durch einen eben solchen Theil der belegten Oeffnung tretende Lichtmenge. Wir können dann die Vibrationsgeschwindigkeit, welche von dem Elemente *m* der Oeffnung auf den Focus des Fernrohres übertragen wird, in irgend einem Momente gleich

Fig. 64.



$$K dx \, . \, \sin \theta$$

setzen. Ein Strahl, *pq*, welcher von einer Stelle des unbedeckten Theiles kommt, hat gegen den Strahl *mn* eine Wegdifferenz $x \sin \delta$, also eine Phasenverzögerung

$$2\pi \frac{x \sin \delta}{\lambda} = \eta.$$

Ein Strahl *rs*, welcher von einer belegten Stelle kommt, hat ausser dieser Verzögerung noch eine Phasenverzögerung in Folge seines Durchganges durch die Lamelle. Dieselbe ist (23), wenn ε und n die Dicke und den Brechungsexponenten der Lamelle bezeichnen,

$$2\pi \frac{\varepsilon (n - 1)}{\lambda} = \Delta.$$

Wir haben also für die Vibrationsgeschwindigkeiten, welche von den bei *p* und *r* liegenden Elementen der Spaltöffnung herrühren:

$$K dx \sin (\theta - \eta)$$

und

$$K' dx \sin (\theta - \eta - \Delta).$$

Bezeichnen wir durch v die dem Beugungswinkel δ entsprechende, von sämmtlichen Strahlen herrührende, resultirende Vibrationsgeschwindigkeit, so ist folglich

$$v = K \int_0^a dx \sin(\theta - \eta) + K' \int_a^{a+b} dx \sin(\theta - \eta - \Delta).$$

Dieser Ausdruck wird durch Entwickelung der Grössen $\sin(\theta - \eta)$ und $\sin(\theta - \eta - \Delta)$ zu

$$v = \sin\theta \left(K \int_0^a dx \cos\eta + K' \cos\Delta \int_a^{a+b} dx \cos\eta - K' \sin\Delta \int_a^{a+b} dx \sin\eta\right)$$

$$- \cos\theta \left(K \int_0^a dx \sin\eta + K' \cos\Delta \int_a^{a+b} dx \sin\eta + K' \sin\delta \int_a^{a+b} dx \cos\eta\right)$$

$$= M \sin\theta - N \cos\theta.$$

Wir setzen (53):

$$M \sin\theta - N \cos\theta = R \sin(\theta - \varphi),$$

woraus sich ergiebt

$$M^2 + N^2 = R^2 \quad \frac{N}{M} = tang\, \varphi$$

und

$$v = (M^2 + N^2)^{1/2} \sin(\theta - \varphi).$$

Die resultirende Intensität ist also

$$I = M^2 + N^2,$$

oder wenn wir für M und N ihre Werthe setzen und die Abkürzungen

$$K \int_0^a dx \cos\eta = C$$

$$K \int_0^a dx \sin\eta = S$$

$$K' \int_a^{a+b} dx \cos\eta = C'$$

$$K' \int_a^{a+b} dx \sin\eta = S'$$

einführen,

$$I = (C^2 + S^2) + (C'^2 + S'^2) + 2 \cos\Delta\, (CC' + SS') - 2 \sin\Delta\, (CS' - SC').$$

Die hier vorkommenden Integrale sind:

$$\int \cos\eta\, dx = \int \cos 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda}\, dx = \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} + const.$$

$$\int \sin\eta\, dx = \int \sin 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda}\, dx = -\frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \cos 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} + const.$$

$$\int_0^a dx \cos 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}$$

$$\int_0^a dx \sin 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(1 - \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}\right)$$

$$\int_a^{a+b} dx \cos 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(- \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{(a+b) \sin\delta}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda} \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \times$$

$$\times \left(1 - \cos 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}$$

$$\int_a^{a+b} dx \sin 2\pi \frac{x \sin\delta}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(\cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{(a+b) \sin\delta}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(1 - \cos 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda} \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda},$$

so dass wir haben

$$C = K \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}$$

$$S = K \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(1 - \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}\right)$$

und wenn weiter zur Abkürzung

$$\bar{C} = K' \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \sin 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda}$$

$$\bar{S} = K' \frac{\lambda}{2\pi \sin\delta} \left(1 - \cos 2\pi \frac{b \sin\delta}{\lambda}\right)$$

gesetzt wird,

$$C' = \bar{C} \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda} - \bar{S} \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}$$

$$S' = \bar{S} \cos 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda} + \bar{C} \sin 2\pi \frac{a \sin\delta}{\lambda}.$$

Wir setzen die eben für C' und S' aufgestellten Werthe in die letzte Intensitätsformel ein und erhalten

$$I = (C^2 + S^2) + (\bar{C}^2 + \bar{S}^2) + 2\cos\left(\Delta + 2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\right)(C\bar{C} + S\bar{S}) - 2\sin\left(\Delta + 2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\right)(C\bar{S} + S\bar{C}).$$

Es ist also schliesslich

$$I = (C^2 + S^2) + (\bar{C}^2 + \bar{S}^2) + 2(C\bar{C} + S\bar{S})\cos(\Delta + \alpha) - 2(C\bar{S} - S\bar{C})\sin(\Delta + \alpha),$$

wo

$$C = \frac{K\lambda}{2\pi\sin\delta}\sin 2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}$$

$$S = \frac{K\lambda}{2\pi\sin\delta}\left(1 - \cos 2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\right)$$

$$\bar{C} = \frac{K'\lambda}{2\pi\sin\delta}\sin 2\pi\frac{b\sin\delta}{\lambda}$$

$$\bar{S} = \frac{K'\lambda}{2\pi\sin\delta}\left(1 - \cos 2\pi\frac{b\sin\delta}{\lambda}\right)$$

$$\Delta = 2\pi\frac{\varepsilon(n-1)}{\lambda}$$

$$\alpha = 2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}.$$

82. Beugung durch ein lamellares Gitter[1]).

Ersetzt man bei einem gewöhnlichen Gitter (80) die gedeckten Stellen durch lamellare Stellen, so hat man ein lamellares Gitter.

Wir haben bei Gelegenheit der Berechnung der gewöhnlichen Gittererscheinungen (80) gesehen, dass man die von dem ganzen Gitter herrührende Intensität erhält, wenn man die von einer Oeffnung des Gitters herrührende Intensität mit

$$\frac{\sin^2 p\pi\frac{(a+d)\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2\pi\frac{(a+d)\sin\delta}{\lambda}}$$

multiplicirt. Hier bedeutet p die Zahl der Oeffnungen, $a + d$ den Abstand zweier homologer Punkte zweier neben einander liegender Oeff-

---

[1]) G. Quincke, Pogg. CXXXII.

nungen, δ den Beugungswinkel. Aus denselben Gründen erhalten wir aus der in (81) für ein lamellares Oeffnungspaar berechneten Intensität die durch das ganze lamellare Gitter hervorgebrachte Intensität durch Multiplication mit dem Factor

$$\frac{\sin^2 p\pi \frac{(a+b)\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+b)\sin\delta}{\lambda}},$$

wo wieder p die Zahl der Oeffnungspaare und $a+b$ der Abstand zweier homologer Punkte zweier neben einander liegender Oeffnungspaare sind. Wir erhalten also für das lamellare Beugungsgitter (81)

$$I = [(C^2 + S^2) + (\bar{C}^2 + \bar{S}^2) + 2(C\bar{C} + SS')\cos(\varDelta + \alpha) -$$
$$- 2(C\bar{S} - S\bar{C})\sin(\varDelta + \alpha)]\left[\frac{\sin^2 p\pi \frac{(a+b)\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+b)\sin\delta}{\lambda}}\right],$$

wo C, S, $\bar{C}$, $\bar{S}$, $\varDelta$, α die in (81) angegebene Bedeutung haben. Diese Formel ist etwas complicirt und vereinfacht sich beträchtlich, wenn die Oeffnungen eines Paares gleich breit sind, und wenn man annimmt, dass durch die Flächeneinheit der bedeckten Oeffnung ebenso viel Licht geht, wie durch die der unbedeckten. Dann wird

$$a = b \qquad K = \bar{K}$$
$$C = \bar{C} \qquad S = \bar{S}$$

und wir erhalten

$$I = 2(C^2 + S^2)[1 + \cos(\varDelta + \alpha)]\frac{\sin^2 p\pi \frac{2a\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{2a\sin\delta}{\lambda}}.$$

Ferner wird, wenn für C, S, α und $\varDelta$ ihre Werthe eingesetzt werden,

$$C^2 + S^2 = [\sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2]\cdot\frac{K^2\lambda^2}{4\pi^2\sin^2\delta}$$
$$= 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{K^2\lambda^2}{4\pi^2\sin^2\delta}$$
$$= \frac{K^2\lambda^2}{4\pi^2\sin^2\delta}\cdot 4\sin^2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}$$
$$= \frac{K^2\lambda^2}{\pi^2\sin^2\delta}\cdot\sin^2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}$$

und

$$1 + \cos(\varDelta + \alpha) = 2\cos^2\frac{\varDelta + \alpha}{2} = 2\cos^2\left(\pi\frac{\varepsilon(n-1)}{\lambda} + \pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\right),$$

also, wenn überdies $K = 1$ gesetzt wird,

$$I = 2\frac{\lambda^2}{\pi^2\sin^2\delta}\sin^2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\cdot 2\cos^2\left(\pi\frac{\varepsilon(n-1)}{\lambda} + \pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}\right)\times$$

$$\times\frac{\sin^2 p\pi\frac{2a\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2\pi\frac{2a\sin\delta}{\lambda}},$$

so dass man schliesslich für das lamellare Beugungsgitter bei gleicher Breite der belegten und unbelegten Theile erhält:

$$I = 4\frac{a^2\sin^2\pi\frac{a\sin\delta}{\lambda}}{\frac{\pi^2 a^2\sin^2\delta}{\lambda^2}}\cdot\frac{\sin^2 p\pi\frac{2a\sin\delta}{\lambda}}{\sin^2\pi\frac{2a\sin\delta}{\lambda}}\times$$

$$\times\cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon(n-1)}{\lambda} + \frac{\pi a\sin\delta}{\lambda}\right).$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem für die gewöhnlichen Gitter gefundenen (80), so sehen wir, dass ein solches Lamellengitter dieselben Beugungserscheinungen zeigt wie jenes, nur ist wegen des letzten Factors, welcher ε enthält, die Lichtintensität an manchen Stellen ausgelöscht, wo sie sonst bei einem gewöhnlichen Gitter einen merklichen Werth hat. Wir ersehen insbesondere:

1. Die neuen Minima sind gegeben durch

$$\cos^2\left(\frac{\pi\varepsilon(n-1)}{\lambda} + \frac{\pi a\sin\delta}{\lambda}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\pi}{\lambda}[(n-1)\varepsilon + a\sin\delta] = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, also durch:

$$\frac{(n-1)\varepsilon + a\sin\delta}{\lambda} = \frac{2m+1}{2}.$$

Für die Mitte des Phänomens ist $\delta = 0$. Das Bild der Lichtquelle verschwindet also für

$$\varepsilon = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda}{n-1}.$$

Blickt man durch ein Gitter in einer keilförmigen Jodsilberschicht, deren Dicke in der Richtung der Spaltöffnungen allmälig zunimmt, nach einer entfernten, ziemlich homogenen Lichtflamme, so sieht man, wie bei einem Gitter mit undurchsichtigen Stäben auf dem durch die Maxima

und Minima erster Classe abgegrenzten Gesichtfelde, dem Beugungsbilde einer einzigen Oeffnung, eine Reihe von Lichtflammenbildern, den Maximis und Minimis zweiter Classe entsprechend. Die Lage der einzelnen Bilder ist dieselbe, wie wenn die Stäbe des Gitters undurchsichtig wären. Sieht man nun durch immer dickere Stellen des keilförmigen Lamellengitters nach der Lichtflamme, so erscheint bei der Dicke $\varepsilon = 0$ nur das direct gesehene oder centrale Bild der Lichtflamme. Wird die Lamelle dicker, so treten die Seitenbilder deutlicher hervor. Das centrale Bild der Lichtflamme wird dann lichtschwächer, als die Seitenbilder, verschwindet für $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n-1}$, um dann von Neuem, wenn die Dicke weiter wächst, lichtstärker zu werden und so periodisch mit wachsender Dicke seine Lichtintensität zu ändern.

2. Die Mitte des Gesichtsfeldes, welche bei einem gewöhnlichen Gitter unter Anwendung weissen Lichtes weiss erscheint, muss bei einem Lamellengitter im Allgemeinen gefärbt erscheinen, da alle Farben ausgelöscht werden, für welche

$$(n-1)\,\varepsilon = (2\,m + 1)\,\frac{\lambda}{2}.$$

Tritt weisses Licht durch eine Luftlamelle von der Dicke d, so werden nach den Gesetzen der Newton'schen Farben jene Farben ausgelöscht, für welche

$$2\,d = (2\,m + 1)\,\frac{\lambda}{2},$$

wobei jedoch eine Beimengung von weiss übrig bleibt (39). Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$d = \frac{n-1}{2}\,\varepsilon,$$

d. h. an der centralen Stelle des Phänomens tritt eine Farbe auf, wie sie eine Luftlamelle zwischen Glasplatten von der Dicke $\frac{1}{2}\,(n-1)\,\varepsilon$ bei senkrecht auffallendem weissen Lichte durchlässt. Die Färbung ist nur insofern intensiver, als hier die Beimengung von weissem Lichte fehlt. Hat man ein keilförmiges Gitter und geht man zu grösseren Dicken der Lamelle über, so folgen sich die Farben in derselben Ordnung, wie die Farben der durchgelassenen Newton'schen Ringe mit zunehmender Luftdicke.

Aehnliches gilt von den seitlichen Theilen des Phänomens. Ist eine Stelle des Gesichtsfeldes bei einem gewöhnlichen Gitter mit undurchsichtigen Stäben gefärbt, so erscheint die Farbe der entsprechenden Stelle des Gesichtsfeldes bei dem Lamellengitter so, als ob man diese Stelle des Gesichtsfeldes bei einem gewöhnlichen Gitter durch eine Luft-

lamelle von einer Dicke betrachtete, welche vom Beugungswinkel abhängt und sich wie folgt berechnet.

Wir haben

$$(n-1)\,\varepsilon + a \sin\delta = (2m+1)\,\frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad 2d = (2m+1)\,\frac{\lambda}{2},$$

woraus folgt

$$d = \frac{1}{2}\,(n-1)\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,a \sin\delta.$$

Benutzt man als Lichtquelle einen Spalt von ungefähr 6 mm Breite, welcher mit Wolkenlicht erleuchtet ist, so erscheint das centrale Bild lebhaft gefärbt und die Farben folgen sich, wenn die Stäbe so breit wie die Oeffnungen des Gitters sind, mit zunehmender Lamellendicke wie die Farben der Newton'schen Ringe im durchgelassenen Lichte. Quincke beobachtete folgende Farben des centralen Spaltbildes: Weiss, Braun, Roth, Blau, Blaugrün, Gelb, Orange, Roth, Purpur, Blau, bläulich Grün, Grün etc.

Betrachtet man statt eines hellen Spaltes auf schwarzem Grunde einen dunklen Körper, etwa einen Stab auf hellem Grunde durch das Lamellengitter, so folgen sich die Farben des centralen Bildes wie die Farben der reflectirten Newton'schen Farbenringe, nämlich in der Ordnung: Schwarz, Grau, Blau, Weiss, Gelb, Orange, Roth, Purpur, Blau, Blaugrün, Grün, Orange, Purpur etc. (32).

83. Bestimmung der Wellenlänge vermittelst der Gittererscheinungen.

Die Formel

$$\sin\delta = \frac{m\lambda}{a+d}$$

für die Beugungswinkel einer Farbe von der Wellenlänge λ (80) gestattet λ zu berechnen, wenn δ und $a+d$ bekannt sind. Diese Methode die Wellenlängen zu messen ist vor anderen Methoden ausgezeichnet. Die Gitterspectra sind homogen und zeigen die Fraunhofer'schen Linien, so dass die Messungen auf diese bezogen werden können; die Verfertigung der Gitter ist von mehreren Optikern auf einen hohen Grad der Vollkommenheit gebracht, so dass die Beugungsspectra mit Vortheil bei Spectroskopen an Stelle der prismatischen Spectra gesetzt worden sind; so wurde[1]) ein Beugungsgitter von 6480 Linien auf einen Zoll bei der Sonnenspectroskopie angewendet und stand in seiner Leistung im rothen Theile des Spectrums einem Apparate mit vier Flintglas-

[1]) C. A. Young, Phil. Mag. (4), XLVI, 87.

prismen gleich; die Messung des Beugungswinkels kann mit grosser Genauigkeit vermittelst des Goniometers geschehen. Fraunhofer hat diese Methode zuerst angewendet. Er gebrauchte anfangs Gitter, welche er durch Aufwickeln eines feinen Drahtes auf zwei parallel gestellte Schrauben von gleicher Ganghöhe erhielt, später Goldgitter auf Glas, oder Gitter, welche mittelst eines Diamanten und einer Theilmaschine auf Glas geritzt wurden. Solche Gitter werden mit mehr als tausend Theilstrichen auf den Millimeter angefertigt. Bei dem von Fraunhofer mit Nr. 4 bezeichneten Gitter konnte die *D*-Linie bis ins 13. Spectrum verfolgt werden.

Fraunhofer's Methode der Messung der Deviationen bestand darin, das Gitter im Centrum einer Kreistheilung anzubringen, an deren Peripherie sich ein bewegliches Fernrohr befand; er stellte das Fernrohr nach einander auf dieselbe Linie in zwei, rechts und links vom Centralstreifen liegenden Spectren derselben Ordnung ein; der Drehungswinkel des Fernrohres gab den doppelten Deviationswinkel der zu bestimmenden Linie.

Fraunhofer hat drei Reihen von Messungen zur Bestimmung der Wellenlängen der Linien des Sonnenspectrums angestellt. Die Resultate seiner ersten Arbeit finden sich in Schumacher's Astronomischen Abhandlungen, 1823, in einer Publication, welche sich mit der experimentellen Feststellung der Gesetze der Gittererscheinungen überhaupt beschäftigt. Einige Jahre später publicirte er eine Arbeit[1]), welche sich ausschliesslich mit der Bestimmung der Wellenlängen beschäftigt. Die folgende Tabelle enthält Fraunhofer's Resultate. Die Linie *A* hat Fraunhofer in den Gitterspectren nie wahrnehmen können.

Fraunhofer.

Linie	1.	2.	3.
B	λ = 0,0006878 mm	6881	—
C	6564 „	6567	6556
D	5888 „	5896	5888
E	5260 „	5271	5265
F	4843 „	4856	4856
G	4291 „	4293	4296
H	3928 „	3944	3963

[1]) Denkschriften der Münchener Akademie, VIII; Gilbert's Annalen, LXXIV, 337.

Die Arbeiten Fraunhofer's wurden später von anderen Physikern fortgesetzt.

Eisenlohr bestimmte mit Hülfe der Gitterspectra und eines Schirmes von Chininpapier die Wellenlänge der äussersten ultravioletten Strahlen, welche er auf diese Weise erhalten konnte.

Nach Helmholtz ist das Spectrum in einer Ausdehnung von einer Octav und einer Quart sichtbar. Obgleich nun der ultraviolette Theil des Spectrums wahrnehmbar ist, so ist er doch zu lichtschwach, um die gewöhnliche Anwendung der Beugungsgitter zur Bestimmung der Wellenlängen zu gestatten. Aus diesem Grunde haben Esselbach und Mascart zur Bestimmung der Wellenlängen des ultravioletten Theiles des Spectrums neue Methoden angewendet.

Esselbach wendete bei seiner im Laboratorium von Helmholtz in Königsberg ausgeführten Arbeit [1]) eine auch von Stokes vorgeschlagene Methode an, welche sich auf die Theorie der Talbot'schen Streifen gründet. Schiebt man, während man ein Spectrum im Fernrohr betrachtet, ein dünnes, durchsichtiges Blättchen von der violetten Seite her so vor die Hälfte der Pupille, dass seine Kante parallel mit den Fraunhofer'schen Linien läuft, so erscheint das Spectrum durchzogen von dunkeln Streifen, welche den genannten Linien parallel sind und von ihnen durch die Regelmässigkeit ihrer Aufeinanderfolge leicht unterschieden werden. Von den Strahlen einer bestimmten Farbe geht die eine Hälfte durch das Blättchen und erhält hierdurch gegen die andere Hälfte einen Gangunterschied, von dessen Betrag es abhängt, ob die beiden Hälften sich bei ihrer Vereinigung auf der Retina des Auges verstärken oder zerstören. Der Gangunterschied ist (23), wenn ε die Dicke des Blättchens und n seinen Brechungsexponenten bedeutet,

$$\frac{\varepsilon\,(n-1)}{\lambda}.$$

Es wird also ein dunkler Streifen entstehen, wenn

$$\frac{\varepsilon\,(n-1)}{\lambda} = m + \frac{1}{2}$$

und für eine andere, brechbarere Farbe, wenn

$$\frac{\varepsilon\,(n'-1)}{\lambda'} = m + p + \frac{1}{2}.$$

p ist die Zahl der dunklen Streifen zwischen den beiden Farben. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\lambda' = \frac{\varepsilon\,(n'-1)\,\lambda}{\varepsilon\,(n-1) + p\lambda}.$$

---

1) Pogg. XCVIII.

Liegen also zwischen zwei bestimmten Farben p Interferenzstreifen und kennt man ausser ε, n, n' auch noch die Wellenlänge der einen Farbe, so kann man die der anderen nach der letzten Formel berechnen. In Wirklichkeit wurden die Fraunhofer'schen Werthe für C und H als gegeben angenommen, so dass die Bestimmungen nur relative sind.

Mascart[1]) bestimmte die Wellenlängen der Linien des ultravioletten Theiles des Spectrums mit Hülfe der Gitterspectra, indem zur Aufnahme der Linien eine kleine photographisch sensible Platte an der Stelle des Fadenkreuzes diente. Mascart zählte in dieser Weise zwischen H und S 280 Linien. Die folgende Tabelle enthält die auf den ultravioletten Theil des Spectrums bezüglichen Bestimmungen Esselbach's und Mascart's.

Esselbach und Mascart.

Linie	Wellenlänge. E.	Wellenlänge. M.	
L	0,0003791 mm	3819	38201
M	3657 „	3729	37284
N	3498 „	3580	35795
O	3360 „	3440	34400
P	3290 „	3360	33605
Q	3232 „	3286	32870
R	3091 „	3177	31775

Die von Mascart mit Hülfe der Gitter angestellten Messungen der Wellenlängen vieler Linien des Spectrums sind, wie die Esselbach's, nur relative, indem die von Fraunhofer für die Linie D gefundene Zahl zu Grunde gelegt wurde. Später bestimmte Mascart[2]) die D-Linie mittelst vier Gittern zu

$$\lambda = 0{,}58882.$$

Mascart und Ditscheiner[3]) bemerkten, dass die durch Gitter erhaltenen Spectra gleich den durch Prismen erhaltenen einem Minimum der Ablenkung unterliegen, ein Umstand, welcher bei den Messungen der Wellenlängen benutzt werden kann. Es ist nämlich die Ablenkung des $m$ten Spectrums gegeben durch (80)

$$\sin i + \sin (\delta - i) = \frac{m\lambda}{a + d},$$

[1]) *Ann. de l'Ecole norm.*, I, IV; C. R., LVI, 138, LVIII, 1111. — [2]) C. R., LXIV, 454. — [3]) Wien. Ber., L, (2), S. 296.

woraus sich für das Minimum der Ablenkung durch Differentiation ergiebt

$$i = \frac{\delta}{2}.$$

Das Minimum der Ablenkung findet also statt, wenn das Gitter den Winkel, welcher vom einfallenden und gebeugten Strahle gebildet wird, halbirt. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt für das Minimum der Ablenkung

$$\lambda = \frac{2\,(a + d)}{m} \sin \frac{\delta}{2}.$$

Die folgenden Tabellen enthalten die Wellenlängen einiger heller Spectrallinien farbiger Flammen, wie sie von J. Müller[1]) mit Hülfe der Gitterspectra bestimmt wurden, nebst zwei Bestimmungen der Thalliumlinie durch F. Bernard[2]) und Ketteler[3]), ferner die Bestimmungen Mascart's[4]).

J. Müller.

Linien	Wellenlänge	
Lichtstärkere der beiden blauen Linien des Indiums	0,000455 mm	
Li_α	6763 „	
Na	5918 „	
Sr_δ	4631 „	
Tha_α	5348 „	5352 (*B*) 53451 (*K*)

1) Pogg. CXXIV. — 2) *Mondes* V, 181. — 3) Pogg. CIV. — 4) C. R., LXIV, 454.

Mascart.

Wasserstoff	Roth	λ = 65617
	Blau	48606
Lithium	Roth	67057
	Blau	46020
Calcium, Blau		42255
Strontium, Blau		46068
Thallium, Grün		53488
Magnesium	Grün	51820
		51706
		51655
	Blau	44795
Silber, Grün		54635
		52071
Wismuth, Blau		47212
Zinn, Blau		45233
Zink	Roth	63607
	Grün	49232
		49105
		48090
	Blau	47206
		46785
Cadmium	Roth	64370
	Grün	53771
		53363
		50844
	Blau	47986
		46765
	Violett	44145
	Ultraviolett	39856
		36075
		34645
		34030
		32875
		27434
		25742
		23183
		22656
		22171

F. Bernard[1]) verfuhr mit Hülfe der Interferenzstreifen und van der Willigen[2]) bestimmte mit Hülfe dreier Nobert'scher Gitter die Wellenlängen von 51 Linien des Sonnenspectrums.

[1]) *Mondes*, V. — [2]) *Arch. du musée Teyler*, I.

Die eingehendsten Messungen rühren von Ditscheiner und Ångström her.

Ditscheiner[1]) bestimmte die Wellenlänge für 130 Fraunhofer'sche Linien des Sonnenspectrums mittelst eines Fraunhofer'schen Gitters von 3001 Linien auf 13,8765 mm und eines Meyerstein'schen Goniometers. Für den Theil des Spectrums zwischen *G* und *H* wurden griechische Buchstaben zur Bezeichnung der Linien eingeführt.

A. J. Ångström[2]) bestimmte die Wellenlängen von mehr als 1000 Fraunhofer'schen Linien. Zur Herstellung der Beugungsspectra diente namentlich ein ausgezeichnetes Gitter von 1501 Oeffnungen auf 8 Par. Linien. Die Linien liessen sich bis in das siebente Spectrum verfolgen und die Superposition von Spectren verschiedenen Ranges bot in den Coincidenzen der Linien ein ausgezeichnetes Mittel, die gewonnenen Resultate auf das Schärfste zu controliren. Die Arbeiten zum Vergleiche der Dimensionen des Gitters mit dem Normalmeteretalon zu Paris wurden mit der äussersten Sorgfalt durchgeführt.

Die folgende Tabelle enthält einige der von Ångström gefundenen Werthe, sowie die entsprechenden Bestimmungen Ditscheiner's und Bestimmungen von J. Stefan[3]), welche nach einer anderen Methode erhalten sind nebst einigen der Bestimmungen von van der Willigen.

Der gelben Nordlichtlinie, welche Ångström auch im Zodiakallichte und in den Strahlen der allgemeinen Phosphorescenz des Himmels beobachtet hat, entspricht die Wellenlänge 5567.

Ångström — Ditscheiner — Stefan.

Linie	Å.	D.	St.	v. d. W.
A	0,0007604 mm	—	—	—
B	68667 „	68741	6873	687132
C	65618 „	65623	6578	656557
D_1	58949 „	58974	5893	589844
D_2	58890 „	58910		589230
E	52690 „	52713	5271	527203
b	51722 „	51740	—	—
F	48608 „	48622	4869	48400
G	43070 „	43112	4291	431137
H_1	39680 „	39689	3959	397146
H_2	39330 „	39353		393872

[1]) Wien. Ber. (2), LXIII, 565. — [2]) *Recherches sur le spectre solaire. Upsala,* 1868; *Ann. de chim.* (4), XVII, 507. — [3]) Ber. d. Wien. Akad., LIII.

Als Mittel der Messungen von Fraunhofer, van der Willigen, Ditscheiner, Ångström und Mascart ergiebt sich

A	B	C	D_1	D_2	E	F	G
0,0007606 mm	6875	6565	5899	5887	5269	4858	4302

H_1	H_2
3971	3937.

Wir sehen, dass die Bestimmungen der den verschiedenen Farben entsprechenden Wellenlängen aus der Berechnung sehr verschiedener Erscheinungen, wie der Interferenzen, welche durch die Fresnel'schen Spiegel hervorgebracht werden (21), der Newton'schen Ringe (36), der Talbot'schen Streifen, der Gittererscheinungen u. s. w. übereinstimmende Resultate ergeben.

84. Gittererscheinungen im reflectirten Lichte.

Wenn die Ebene des Gitters die Eigenschaft besitzt, das Licht an den Stellen, an welchen sie es durchlässt, auch regelmässig zu reflectiren, an den anderen Stellen aber nicht, wie dies bei geritzten Glasgittern zutrifft, so zeigen sich im reflectirten Lichte dieselben Erscheinungen, wie im durchgelassenen. Es ist in der That klar, dass sich in diesem Falle alles so verhält, als wenn das Phänomen im durchgelassenen Lichte unter Benutzung einer Lichtquelle entstände, welche mit dem Spiegelbilde der wirklichen Lichtquelle zusammenfiele.

Derlei Phänomene wurden von Young beobachtet, welcher sie für Interferenzerscheinungen hielt [1]). Er setzte in diese Classe von Erscheinungen das Irisiren der Oberflächen unvollständig polirter Metalle und gewisser Mineralien, sowie die schillernden Reflexe der Vogelfedern.

Fraunhofer wies an einem Goldgitter die vollständige Uebereinstimmung der durch Transmission und Reflexion entstehenden Erscheinungen nach.

Die Eigenschaft gefurchter Flächen, Farbenerscheinungen zu zeigen, führte Brewster auf die Ursache des Schillerns der Perlmutter. Um zu zeigen, dass die Farben der Perlmutter von der Oberflächenstructur derselben herrühren, vortretenden Rändern dünner Kalkschichten, aus welchen die Schale besteht, übertrug er das Farbenspiel durch Abdruck auf Wachs und andere Körper [2]). In diese Classe von Beugungserscheinungen gehören auch die lebhaften Farben der Barthon'schen Knöpfe [3]), welche durch gefurchte Metallflächen hervorgebracht werden.

---

[1]) *Phil. Tr.*, 1862. — [2]) *Phil. Tr.*, 1814. — [3]) Barthon, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXIII.

85. Beugung durch eine grosse Zahl gleich breiter, paralleler und nicht äquidistanter Spaltöffnungen.

Wir nehmen an, das Beugungsgitter bestehe aus einer sehr grossen Zahl gleichbreiter, paralleler und nicht äquidistanter, sondern völlig unregelmässig vertheilter Spaltöffnungen. Man erhält ein solches Gitter, wenn man auf einer mit einem Goldblatte belegten Glasplatte vermittelst einer Theilmaschine Spaltöffnungen anbringt und die Lage jeder derselben durch das Loos bestimmt.

Um die einem Beugungswinkel δ entsprechende Intensität zu finden, bestimmen wir zunächst die Intensität der von einer einzigen Spaltöffnung herrührenden Vibrationsbewegung. Sie ist (78)

$$a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}}.$$

Ist n die Zahl der Oeffnungen, v die von einer derselben herrührende Vibrationsgeschwindigkeit, ε die entsprechende Phase, so haben wir für die resultirende Intensität (55)

$$[\Sigma (v \cos \varepsilon)]^2 + [\Sigma (v \sin \varepsilon)]^2,$$

oder

$$v^2 [(\Sigma \cos \varepsilon)^2 + (\Sigma \sin \varepsilon)^2],$$

oder

$$v^2 [\Sigma \cos^2 \varepsilon + 2 \Sigma (\cos \varepsilon \cos \varepsilon') + \Sigma \sin^2 \varepsilon + 2 \Sigma (\sin \varepsilon \sin \varepsilon')],$$

oder

$$v^2 [n + 2 \Sigma (\cos \varepsilon \cos \varepsilon' + \sin \varepsilon \sin \varepsilon')]$$

und schliesslich

$$v^2 [n + 2 \Sigma \cos (\varepsilon - \varepsilon')] = v^2 . n + 2 v^2 . \Sigma \cos (\varepsilon - \varepsilon').$$

Das erste Glied ist die Summe der von den einzelnen Spaltöffnungen herrührenden Intensitäten, das zweite hängt von der zufälligen Vertheilung der Oeffnungen ab und liegt zwischen $v^2 . n (n - 1)$ und $- v^2 n$, so dass die Intensität zwischen 0 und $n^2 v^2$ liegt. Variirt der Beugungswinkel, so variiren beide Glieder des obigen Ausdruckes, das erste, dessen Veränderungen von den Gangunterschieden der von ein und derselben Oeffnung kommenden Elementarstrahlen abhängen, verhältnissmässig langsam, das zweite, dessen Veränderungen von den Gangunterschieden von Elementarstrahlen abhängen, welche von verschiedenen, durchschnittlich weit aus einander liegenden Oeffnungen herrühren, verhältnissmässig schnell, und während das erste Glied stets positiv bleibt, ändert das zweite Glied beständig das Vorzeichen, indem schon für sehr kleine Variationen des Beugungswinkels jedes der Glieder $\cos (\varepsilon - \varepsilon')$

sehr oft alle positiven und negativen Werthe durchläuft. Wir können also schon innerhalb Grenzen δ, δ', zwischen welchen sich v sehr wenig verändert,

$$\int_{\delta}^{\delta'} [v^2 n + 2 v^2 \Sigma \cos(\varepsilon - \varepsilon')]\, d\delta = \int_{\delta}^{\delta'} v^2 n\, d\delta = v^2 n\, (\delta' - \delta)$$

setzen und haben also, wenn wir unter der Intensität I die mittlere Intensität in der Nähe eines Punktes des Phänomens verstehen,

$$I = n v^2,$$

oder, wenn für v sein Werth gesetzt wird,

$$I = n a^2 \frac{\sin^2 \pi \dfrac{a \sin \delta}{\lambda}}{\dfrac{\pi^2 a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}}.$$

Das Phänomen unterscheidet sich also von jenem einer einzigen der Spaltöffnungen nur durch eine $n$mal grössere Intensität und durch eine unregelmässige, den Spaltöffnungen parallel laufende Faserung der erhellten Theile des Gesichtfeldes.

86. Das Princip von Babinet.

Wenn eine hinreichend grosse Oeffnung in einem Schirme von Strahlen normal getroffen wird, so haben wir in jeder Richtung, welche mit der Richtung der einfallenden Strahlen einen merklichen Winkel bildet, eine Lichtintensität, welche Null oder doch sehr gering ist. Nehmen wir nun an, dass Theile der Oeffnung bedeckt werden, so dass hinreichend schmale und zahlreiche Zwischenräume entstehen, so wird für irgend eine schiefe Richtung im Allgemeinen die Intensität nicht mehr Null oder unbeträchtlich sein, es wird ein Beugungsphänomen entstehen, und es ist evident, dass die einer bestimmten Richtung entsprechende resultirende Oscillationsgeschwindigkeit dem Vorzeichen nach entgegengesetzt und der Grösse nach gleich ist jener Geschwindigkeit, welche für dieselbe Richtung erhalten würde, wenn die freien Theile der Oeffnung des Schirmes bedeckt, und die bedeckten frei wären, denn die Summe beider Geschwindigkeiten ist Null oder verhältnissmässig gering. Man kann dies kurz so ausdrücken: Complementäre Beugungsgitter geben dasselbe Phänomen, doch differiren die Oscillationen der Phase nach um 180 Grade.

Wenden wir dieses von Babinet[1]) herrührende Princip beispielsweise auf die Gittererscheinungen im engeren Sinne an (80). Ersetzt man die offenen Stellen eines solchen Gitters durch gedeckte und die

[1]) C. R., IV., 638.

gedeckten durch offene, so erhält man nach dem Principe von Babinet für dieselbe Beugungsrichtung auch dieselbe Intensität, und insbesondere wird sie Null für $a = 0$ und für $d = 0$. Wir wollen diesen aus dem Babinet'schen Principe unmittelbar folgenden Satz auch direct beweisen.

Wir haben bei einem Gitter von einer sehr grossen Zahl, n, Oeffnungen von der Breite a und Zwischenräumen von der Breite d für einen Beugungswinkel δ die Intensität (80)

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\frac{\pi^2 a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{\sin^2 n \pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}.$$

Vertauschen wir a und d, so erhalten wir:

$$I' = d^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{d \sin \delta}{\lambda}}{\frac{\pi^2 d^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{\sin^2 n \pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a + d) \sin \delta}{\lambda}}.$$

Das Verhältniss der beiden Intensitäten ist:

$$I : I' = \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} : \sin^2 \pi \frac{d \sin \delta}{\lambda}.$$

Für das $m$te Spectrum ist (80)

$$\sin \delta = \frac{m \lambda}{a + d}$$

und es wird:

$$I : I' = \sin^2 \pi \frac{am}{a + d} : \sin^2 \pi \frac{dm}{a + d}.$$

Nun ist

$$\pi \frac{am}{a + d} + \pi \frac{dm}{a + d} = m \pi,$$

folglich

$$\sin^2 \pi \frac{am}{a + d} = \sin^2 \pi \frac{dm}{a + d}$$

und

$$I = I'.$$

87. Beugung durch eine grosse Zahl gleich breiter paralleler und nicht äquidistanter Fäden.

Bezeichnen wir die Dicke eines Fadens durch d, so ergiebt sich aus dem Babinet'schen Principe (86) und aus (85)

$$I = nd^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{d \sin \delta}{\lambda}}{\frac{\pi^2 d^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}}.$$

Das Beugungsphänomen, welches ein solches System von Fäden hervorbringt, kann dazu benutzt werden, die Durchmesser der Fäden zu bestimmen.

Ist δ_n der dem $n$ten Minimum entsprechende Beugungswinkel für Licht von der Wellenlänge λ, so hat man

$$\sin \delta_n = \frac{n\lambda}{d}$$

und

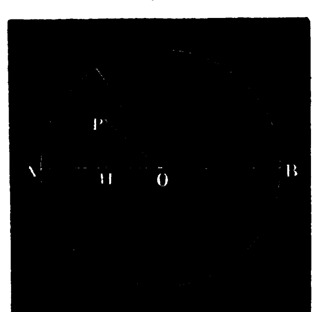
$$d = \frac{n\lambda}{\sin \delta_n}.$$

Hierauf beruht Young's Eriometer[1]).

88. Beugung durch eine kreisrunde Oeffnung[2]).

Wir nehmen an, dass Strahlen, welche von einem unendlich entfernten Lichtpunkte kommen, senkrecht auf eine kreisförmige Oeffnung vom Radius R fallen und nennen θ den Beugungswinkel parallel austretender und sich im Focus M des Fernrohres vereinigender Elementarstrahlen.

Fig. 65.



Sei AB (Fig. 65) der Durchmesser der Oeffnung, welcher mit der Projection des in O gebeugten Strahles auf die Ebene der Oeffnung zusammenfällt. Wird die von A auf M übertragene Geschwindigkeit durch

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} d^2 \sigma$$

ausgedrückt und sind

$$OP = \varrho \text{ und } \sphericalangle AOP = \varphi$$

die Coordinaten eines Punktes P der Oeffnung, so ist das dem Punkte P entsprechende Flächenelement $\varrho d\varphi d\varrho$ und die von diesem Elemente auf M übertragene Geschwindigkeit

$$\varrho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AH \sin \theta}{\lambda}\right) d\varphi\, d\varrho,$$

oder da

---

1) Phil. Mag. (2), I, 112. — 2) Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichtes, Berlin, 1839.

$$AH = R - \varrho \cos\varphi,$$

die von dem Flächenelemente P herrührende Vibrationsgeschwindigkeit:

$$\varrho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{R \sin\theta}{\lambda} + \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\right) d\varphi\, d\varrho,$$

und schliesslich (53):

$$I = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^R \varrho \cos 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\, d\varphi\, d\varrho\right)^2$$
$$+ \left(\int_0^{2\pi}\int_0^R \varrho \sin 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\, d\varphi\, d\varrho\right)^2.$$

Das zweite Integral ist Null, da sich je zwei Elemente desselben aufheben, welche bezüglich O symmetrisch liegenden Punkten entsprechen. Es bleibt also:

$$I = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^R \varrho \cos 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\, d\varphi\, d\varrho\right)^2.$$

Die Integration lässt sich in Bezug auf ϱ vollständig ausführen. Die Integration durch Theile giebt:

$$\int_0^R \varrho \cos 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\, d\varrho$$
$$= \left(\frac{\lambda \varrho}{2\pi \cos\varphi \sin\theta} \sin 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\right)_0^R$$
$$- \int_0^R \frac{\lambda}{2\pi \cos\varphi \sin\theta} \sin 2\pi \frac{\varrho \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}\, d\varrho$$
$$= \frac{\lambda R}{2\pi \cos\varphi \sin\theta} \sin 2\pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}$$
$$+ \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta}\left(\cos 2\pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda} - 1\right)$$
$$= \frac{\lambda R}{2\pi \cos\varphi \sin\theta} \sin 2\pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}$$
$$- \frac{\lambda^2}{2\pi^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta} \sin^2 \pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}.$$

Hierdurch wird der Ausdruck für die Intensität:

$$I = \left(\frac{\lambda R}{2\pi \sin\theta} \int_0^{2\pi} \sin 2\pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^2}{2\pi^2 \sin^2\theta} \int_0^{2\pi} \sin^2 \pi \frac{R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^2$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} R^2 \frac{\sin 2\pi \frac{R\cos\varphi \sin\theta}{\lambda}}{\frac{2\pi R \cos\varphi \sin\theta}{\lambda}} d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{R\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi^2 R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta}{\lambda^2}} d\varphi \right)^2.$$

Setzen wir

$$\frac{\pi R \sin\theta}{\lambda} = m,$$

so wird schliesslich

$$I = \left[\int_0^{2\pi} R^2 \frac{\sin(2m\cos\varphi)}{2m\cos\varphi} d\varphi - \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\sin^2(m\cos\varphi)}{m^2\cos^2\varphi} d\varphi\right]^2.$$

Beide Integrationen können nur mit Hülfe der unendlichen Reihen ausgeführt werden. Wir haben

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{2}{1.2} - \frac{2^3 x^2}{1.2.3.4} + \frac{2^5 x^4}{1.2.3.4.5.6} - \frac{2^7 x^6}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \dots$$

Also:

$$I = \left\{\int_0^{2\pi} R^2 \left[1 - \frac{(2m\cos\varphi)^2}{1.2.3} + \frac{(2m\cos\varphi)^4}{1.2.3.4.5} - \frac{(2m\cos\varphi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots\right] d\varphi \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \left[\frac{2}{1.2} - \frac{2^3(m\cos\varphi)^2}{1.2.3.4} + \frac{2^5(m\cos\varphi)^4}{1.2.3.4.5.6} - \frac{2^7(m\cos\varphi)^6}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \dots\right] d\varphi\right\}^2,$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} 2\pi$$

folgt:

$$I = \pi^2 R^4 \Big[2 - \frac{2^3 m^2}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^5 m^4}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1.3}{2.4} - \frac{2^7 m^6}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots - \Big(\frac{2}{1.2} - \frac{2^3 m^2}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2^5 m^4}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1.3}{2.4} - \frac{2^7 m^6}{1.2.3.4.5.6.7.8} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots\Big)\Big]^2$$

und schliesslich

$$I = \pi^2 R^4 \Big[1 - \frac{m^2}{2} + \frac{m^4}{(1.2)^2.3} - \frac{m^6}{(1.2.3)^2.4} + \frac{m^8}{(1.2.3.4)^2.5} - \dots\Big]^2.$$

Da die in der Klammer befindliche Reihe aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern besteht, ist sie convergent, sobald sie eine fallende Reihe ist. Dies trifft für jedes beliebige m zu. Man hat nämlich für das $n$te und das $n+1$te Glied

$$\frac{m^{2(n-1)}}{[1.2.3\dots(n-1)]^2 n} \text{ und } \frac{m^{2n}}{(1.2.3\dots n)^2 (n+1)},$$

Ausdrücke, deren Verhältniss

$$\frac{m^2}{n(n+1)}$$

für

$$n^2 + n > m^2,$$

also jedenfalls von einem bestimmten Gliede der Reihe an, kleiner als Eins wird. Die Reihe ist also für jedes beliebige m convergent.

Wenn man den Werth dieser Reihe für wachsende Werthe von m berechnet, so findet man, dass Zeichenwechsel vorhanden sind und schliesst hieraus, dass die Intensität durch Maxima und Minima geht und dass die Minima Null sind. Die gewöhnlichen Interpolationsformeln gestatten die den Maximis und Minimis entsprechenden Werthe von m zu berechnen; die entsprechenden Beugungswinkel ergeben sich dann aus der Gleichung

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{\pi R}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass für verschieden grosse Oeffnungen der Sinus des einem Maximum oder Minimum von bestimmter Ordnungszahl entsprechenden Beugungswinkels oder bei kleinen Beugungswinkeln dieser Winkel selbst dem Radius der Oeffnung verkehrt proportional ist.

Die folgende Tabelle enthält die den ersten Maximis und Minimis entsprechenden Werthe von m und I.

	$\frac{m}{\pi}$	Intensität
Erstes Maximum	0	1
Erstes Minimum	0,610	"
Zweites Maximum	0,819	0,01745
Zweites Minimum	1,116	"
Drittes Maximum	1,333	0,00415
Drittes Minimum	1,619	"
Viertes Maximum	1,847	0,00165
Viertes Minimum	2,120	"
Fünftes Maximum	2,361	0,00078
Fünftes Minimum	2,621	"

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass die Differenz der, zwei aufeinanderfolgenden Minimis entsprechenden, Werthe von m sich der Limite $\frac{\pi}{2}$ nähert und hat daher für das $n$te Minimum näherungsweise

$$sin\ \theta = \frac{\lambda}{2R}\ (0{,}22 + n).$$

Man sieht ferner, dass die Maxima rasch an Grösse abnehmen, woher es kommt, dass immer nur einige Ringe wahrnehmbar sind.

Vor Knochenhauer war schon Schwerd[1]) auf dem mühsamen Wege der Zerlegung des Kreises in 180 Trapeze zu denselben numerischen Resultaten gelangt.

Bei Anwendung homogenen Lichtes besteht hiernach das Beugungsphänomen aus einer hellen kreisförmigen Scheibe, Aureole, und einigen concentrischen abwechselnd hellen und dunklen Ringen. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Ringe ist nahezu constant, der Radius der Aureole um ungefähr $\frac{1}{5}$ grösser als eine volle Ringbreite, d. i. der Abstand zweier aufeinanderfolgender Minima. Bei wenig intensivem Lichte bleibt die Aureole, deren Durchmesser jenem der Oeffnung verkehrt proportional ist, allein sichtbar. Bei Anwendung weissen Lichtes erscheint die Aureole röthlich gesäumt, und die Ringe erscheinen gefärbt.

Die Resultate der Rechnung stimmen mit den von Fraunhofer und Schwerd angestellten Messungen überein.

[1]) Die Beugungserscheinungen, S. 67.

89. Anwendung auf die optischen Bilder.

Unsere optischen Instrumente sind in Bezug auf die Qualität und die Combination der Linsen und Spiegel auf einen Grad der Vollkommenheit gebracht, welcher die aus den Gesetzen der geometrischen Optik hervorgehenden Aberrationen als nahezu beseitigt erscheinen lässt. Gleichwohl ist es nicht möglich, das von einem Punkte kommende und in das Instrument gelangende Licht wieder in einem Punkte zu vereinigen, das beste Teleskop zeigt das Bild eines Fixsternes als eine Scheibe von merklichem scheinbaren Durchmesser. Diese Aberration kommt daher, dass die Oeffnung oder das Diaphragma des Instrumentes als Beugungsöffnung wirkt, so dass (88) das Bild eines leuchtenden Punktes als eine von Ringen umgebene Scheibe erscheinen muss, deren Durchmesser dem Durchmesser der Oeffnung des Instrumentes verkehrt proportional ist. Die scheinbare Grösse eines Fixsternes nimmt in Folge dessen zu, wenn die Oeffnung des Teleskops verkleinert wird, so dass die mit einer solchen Verkleinerung verbundene Reducirung der geometrischen Aberration als mit dem Entstehen einer neuen Aberration unzertrennlich verbunden erscheint.

Das Studium dieser Erscheinungen wurde zuerst von W. Herschel[1]) betrieben, später von Arago.

Da das Bild eines leuchtenden Punktes stets als eine helle Scheibe erscheint, so werden zwei leuchtende Punkte vermittelst eines optischen Instrumentes offenbar nur dann als getrennt wahrgenommen, wenn ihre scheinbare gegenseitige Entfernung eine gewisse Grösse überschreitet. Der reciproke Werth dieser Grösse wurde von Foucault das optische Vermögen des Instrumentes genannt[2]).

Die Ausdehnung des sichtbaren Theiles des Beugungsbildes eines leuchtenden Punktes hängt von mehreren Umständen, namentlich von der Helligkeit der Lichtquelle ab. Das optische Vermögen eines Instrumentes ist also keine constante Grösse; alles Uebrige jedoch gleich gesetzt ist das optische Vermögen dem Durchmesser der Oeffnung des Instrumentes proportional.

Die in (88) entwickelte Theorie gestattet eine Anwendung auf die Berechnung des optischen Vermögens eines Instrumentes. Nehmen wir an, das Bild des leuchtenden Punktes reducire sich auf die Aureole und bezeichnen wir den scheinbaren Halbmesser derselben durch ω, so ist $\frac{1}{2\omega}$ das optische Vermögen des Instrumentes. Wir haben nun (88)

---

[1]) Optik. — [2]) *Mémoires sur la construction des télescopes, Annales de l'Observatoire,* V.

$$\frac{\pi R \sin \omega}{\lambda} = 0{,}610 \, . \, \pi$$

$$\sin \omega = 0{,}610 \, \frac{\lambda}{R}.$$

Setzen wir $\lambda = 0{,}0005$ mm und nehmen wir den Durchmesser der Oeffnung gleich 10 cm an, so giebt das

$$\sin \omega = 0{,}610 \, \frac{0{,}0005}{50}$$

und

$$2\,\omega = 2^1/_4 \text{ Secunde.}$$

Versuche, welche Foucault mit einem Fernrohre von 10 cm Oeffnung anstellte, ergaben etwas kleinere Werthe.

Schliesslich ist klar, dass die Pupille des Auges ähnliche Wirkungen hervorbringen muss.

90. Beugung durch eine grosse Zahl unregelmässig vertheilter, gleich grosser kreisförmiger Oeffnungen oder opaker Schirmchen (Höfe).

Auf der Theorie der Beugung durch eine kreisförmige Oeffnung beruht die Erklärung der sogenannten Höfe, welche man häufig um Sonne und Mond wahrnimmt, wenn diese Gestirne durch leichtes Gewölk verschleiert sind. Die Höfe bestehen aus Farbenringen, welche im Gegensatze zu den sogenannten grossen Höfen mit der Scheibe des Mondes oder der Sonne in Berührung stehen. Um die Sonnenhöfe zu beobachten, bedient man sich eines schwarzen Glases oder man betrachtet mit Newton das Spiegelbild der Sonne in der Oberfläche des Wassers. Delezenne gab ein bequemes Verfahren an, die Durchmesser der Ringe zu messen und stellte selbst solche Messungen an [1]). Das Phänomen der Höfe unterscheidet sich in Nichts von dem durch eine kreisförmige Oeffnung hervorgebrachten Beugungsphänomen.

Newton erkannte zuerst [2]), dass die Höfe durch in der Luft schwebende Wassertröpfchen hervorgebracht werden. Fraunhofer brachte das Phänomen künstlich hervor durch eine mit gleich grossen Körperchen von kreisförmigen Querschnitten, wie Lycopodiumpollen, unregelmässig bedeckte Glasplatte. Blickt man durch eine solche Platte nach einem Lichtpunkte, so erscheint derselbe von den Ringen umgeben [3]).

Eine Abart der Höfe erhält man durch Behauchung einer Glasplatte. Hier ist die Vertheilung der beugenden Körperchen, der Wassertröpfchen, nicht mehr völlig unregelmässig. Hierdurch wird das Phänomen in der

---

[1]) *Mémoires de la Société des sciences de Lille*, 1838. — [2]) Optik, II. — [3]) Schumacher's astronomische Abhandlungen, III.

Weise geändert, dass der innere Theil der Aureole durch einen dunklen Raum ersetzt erscheint [1]).

Um die Abhängigkeit der Grösse der Ringe von den Durchmessern der Körperchen experimentell festzustellen, wendete Fraunhofer kreisrunde Stanniolblättchen von bekanntem Durchmesser an, welche zwischen zwei Glasplatten unregelmässig vertheilt wurden. Auch Babinet stellte Messungen an [2]).

Eine vollständige Erklärung des Phänomens wurde erst von Verdet [3]) gegeben. Dasselbe entsteht durch die Beugung des Lichtes an den Körperchen. Es ist leicht, das Resultat dieser Beugung zu finden. Man ersetze zunächst die Körperchen durch entsprechende Oeffnungen nach dem Principe von Babinet (86) und schliesse hierauf wie in (85), um zu erhalten, dass das Phänomen sich von jenem einer kreisrunden Oeffnung vom Durchmesser eines der Körperchen nur durch eine n mal grössere Intensität unterscheidet, wenn n die Zahl der Körperchen ist.

Sind die Schirmchen oder Projectionen der Körperchen nicht kreisrund, doch sämmtlich gleich und gleichliegend, so erhält man, wie leicht zu sehen, die Beugungserscheinung einer Oeffnung von der Gestalt, Grösse und Lage eines der Schirmchen.

Diese Theorie wird durch die angestellten Messungen vollständig bestätigt.

Da die Durchmesser der Ringe zu den Durchmessern der Körperchen, durch welche sie hervorgebracht werden, in einer einfachen Relation stehen (88), so kann man aus der Grösse der Höfe, welche Sonne oder Mond umgeben, die Grösse der Wassertropfen berechnen, durch welche sie hervorgebracht werden. Die Durchmesser der Ringe sind jenen der Tropfen verkehrt proportional; hierdurch findet sich das Sprichwort bestätigt: „Kleiner Hof, grosser Regen.“

Wenn sich die lichtbeugenden Körperchen nicht unmittelbar vor dem Auge oder dem Fernrohre, sondern in grösserer Entfernung zwischen Beobachter und Lichtquelle befinden, so wird jede Stelle des Phänomens nur durch einige unmittelbar neben einander liegende Körperchen hervorgebracht. Sind dann die Körperchen ungleich gross und ist ihre Grösse eine Function des Ortes, an welchem sie sich befinden, so ändert sich die Breite der Ringe, welche von der Grösse der Körperchen abhängt, von einer Stelle des Phänomens zur anderen, die Ringe hören auf, kreisförmig zu sein. Solche Abweichungen von der kreisförmigen Gestalt kann man oft an mit Wassertröpfchen belegten Glasscheiben und an den Sonnen- und Mondhöfen wahrnehmen. Letztere erscheinen zuweilen als aus mehreren Ringsystemen zusammengesetzt, welche von verschiedenen hinter einander liegenden Gewölken von ungleicher Tropfengrösse herrühren.

---

[1]) K. Exner, Ber. d. Wiener Akad. d. Wissensch., 1877. — [2]) C. R., IV. — [3]) *Ann. de chim. et de phys.*, XXXIV.

Experimentell kann man die Höfe mit Hülfe eines Fernrohres und eines Stanniolblattes hervorbringen, in welchem sich zahlreiche unregelmässig vertheilte kreisrunde Oeffnungen von gleich grossen Durchmessern befinden, wie dies Verdet zuerst gethan hat, oder, indem man durch eine mit Lycopodium bestreute Glasplatte nach einer Kerzenflamme blickt. Auch das freie, gesunde Auge erblickt das Bild einer Kerzenflamme von lichtschwachen Ringen umgeben. Sie entstehen durch die Beugung des Lichtes beim Durchgange durch das Netz der Epithelzellen der Hornhaut des Auges und erscheinen mit gesteigerter Intensität bei krankhaften Zuständen des Auges durch Bildung von Granulationen oder durch Einwirkung von Osmiumsäure auf die Hornhaut [1]).

91. Beugung durch ein Oeffnungspaar.

Wir verstehen unter einem Oeffnungspaare ein Paar gleicher und gleichliegender Oeffnungen. Sei die durch eine der Oeffnungen hervorgebrachte Intensität

$$i_1 = [f(\delta, \delta')]^2,$$

wo δ und δ' zwei Winkelcoordinaten sind, durch welche die Richtung der austretenden gebeugten Elementarstrahlen bestimmt wird; dann ist die durch beide Oeffnungen hervorgebrachte Intensität (55)

$$I = 2\,[f(\delta, \delta')]^2 \cdot \left(1 + \cos 2\,\pi \frac{b \sin \varphi}{\lambda}\right),$$

wenn b die Entfernung zweier homologer Punkte der Oeffnungen und φ der Winkel ist, welchen die austretenden unter einander parallelen Elementarstrahlen mit einer zur Entfernungslinie jener beiden Punkte senkrechten Ebene bilden.

Das Phänomen des Oeffnungspaares unterscheidet sich also von jenem einer der beiden Oeffnungen durch ein System dunkler Streifen, deren Lage durch

$$2\,\pi \frac{b \sin \varphi}{\lambda} = (2\,m + 1)\,\pi$$

oder

$$\sin \varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{b}$$

gegeben ist, wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Wegen der geringen Grösse der Beugungswinkel erscheinen diese Minima als merklich geradlinige Streifen. Dieselben stehen senkrecht auf der Verbindungslinie zweier homologer Punkte der Oeffnungen. Die Streifenbreite ist, wie aus der letzten Gleichung hervorgeht, $\frac{\lambda}{b}$.

---

[1]) K. Exner, Wien. Ber. 1877.

Ersetzen wir die beiden Oeffnungen durch zwei opake Schirmchen, welche genau den Ort der Oeffnungen einnehmen, so entsteht nach dem Babinet'schen Principe (86) dasselbe Phänomen. In experimenteller Beziehung kommt hier in Betracht, dass es nicht ohne Weiteres ausführbar ist, das Phänomen eines Schirmchens oder einer Gruppe solcher nach der Fraunhofer'schen Methode hervorzubringen, da, sobald ein grösserer Theil des Objectivs des Fernrohres frei ist, das unregelmässig zerstreute Licht die wenig intensiven Beugungserscheinungen, um welche es sich handelt, nicht wahrnehmen lässt. Um die Erscheinungen gleichwohl bei Anwendung der Fraunhofer'schen Methode zu erhalten, setze man die Schirmchen in grössere Beugungsöffnungen. Eine einfache Ueberlegung lehrt, dass man dann beide Phänomene, das des Körperchens und das der Oeffnung, gleichzeitig erhält, dass dieselben sich modificiren, wo sie übereinanderfallen, jedoch ungestört erscheinen an Stellen, an welchen die Intensität des einen Phänomens die des anderen bei weitem übertrifft; es ist überdies leicht, für ein Schirmchen von gegebener Gestalt eine Oeffnung zu finden, welche das Phänomen des Schirmchens in hinreichender Ausdehnung wahrnehmen lässt.

92. Verschiebung einer der beiden Oeffnungen in der Richtung der directen Lichtstrahlen.

Wir setzen nunmehr voraus, eine der beiden Oeffnungen sei in der Richtung der directen Lichtstrahlen um die Länge a verschoben. Um ein solches Oeffnungspaar zu erhalten, kann man den in (91) vorausgesetzten Beugungsschirm zerschneiden und die Theile in die geeignete Lage bringen. Sind r, s zwei homologe Punkte der beiden Oeffnungen, $2e$ die Länge der Linie rs, α der Winkel der directen Lichtstrahlen mit rs, χ der Winkel der in irgend einer Richtung gebeugten Lichtstrahlen mit rs, so ist die Wegdifferenz der von r und s kommenden gebeugten Strahlen

$$2e\,(\cos\alpha - \cos\chi).$$

Sind α und χ kleine Winkel, was voraussetzt, dass die Projection der Linie rs auf die Richtung der directen Lichtstrahlen gross ist im Vergleiche mit der Projection dieser Linie auf eine zur Richtung der directen Lichtstrahlen senkrechte Ebene, so geht der letzte Ausdruck näherungsweise über in

$$e\,(\chi^2 - \alpha^2)$$

und wir erhalten für das Phänomen des Oeffnungspaares (55):

$$I = 2\,[f(\delta, \delta')]^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{e\,(\chi^2 - \alpha^2)}{\lambda}\right)$$

und für das System dunkler Streifen, welches durch die gegenseitige

Einwirkung der von den beiden Oeffnungen kommenden resultirenden gebeugten Strahlen entsteht,

$$\chi^2 = \alpha^2 + \frac{(2k + 1)\lambda}{2e},$$

wo k eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Ohne diese Vernachlässigung ergiebt sich

$$I = 2f(\delta, \delta')^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{2e[\cos\alpha - \cos\chi]}{\lambda}\right)$$

und für die Minima

$$\cos\chi = \cos\alpha - \frac{(2k + 1)\lambda}{4e}.$$

Da die Grösse rechts vom Gleichheitszeichen constant ist, so gehören die dieser Gleichung entsprechenden dunkeln Streifen concentrischen Kreisen an, deren Mittelpunkt die Richtung rs entspricht. Das Bild der Lichtquelle wird von einem hellen Streifen durchschnitten. Für die Streifenbreite ergiebt sich

$$\frac{\lambda}{2e\chi},$$

woraus folgt, dass dieselbe mit wachsender Ordnungszahl der Ringe abnimmt. Für jene Streifen, welche nahe am Bilde der Lichtquelle vorbeigehen, also am sichtbarsten sind, ist die Streifenbreite

$$\frac{\lambda}{b},$$

wo b die Entfernung zweier homologer Punkte der Oeffnungen senkrecht zur Richtung der directen Lichtstrahlen genommen, bedeutet. Dieser Ausdruck stimmt genau mit jenem Ausdrucke überein, welchen wir für zwei gleiche, um einen Abstand b senkrecht zur Richtung der directen Lichtstrahlen gegen einander verschobene Beugungsöffnungen erhielten (91).

Verschiebt man also eine der beiden Oeffnungen des in (91) betrachteten Oeffnungspaares in der Richtung der directen Lichtstrahlen um eine Länge, welche beträchtlich sein, z. B. 20 Centimeter und mehr betragen darf, so ändert sich das durch die wechselseitige Einwirkung der beiden Oeffnungen entstehende, ursprünglich geradlinige Streifensystem derart, dass die Streifen sich bei nahezu ungeänderter Breite zu concentrischen Kreisbogen krümmen, deren Mittelpunkt der Richtung der Distanzlinie zweier homologer Punkte der beiden Oeffnungen entspricht.

Nach dem Babinet'schen Principe wird man dieselben Erscheinungen erhalten, wenn an die Stelle der beiden Oeffnungen lichtbeugende Körperchen von der Gestalt und Lage der Oeffnungen gesetzt werden.

93. Combination einer Bestäubungsfläche mit einem Spiegel.

Befindet sich ein bestäubtes Glasblättchen, beispielsweise ein mit Reismehl bestäubtes Deckgläschen, vor einem ebenen Spiegel und fällt ein von einem unendlich entfernten Punkte kommendes Lichtbündel auf den Spiegel, so durchdringt dasselbe die Bestäubungsfläche zweimal, nämlich auf dem Hinwege vor der Reflexion und auf dem Rückwege nach der Reflexion. Das gebeugte Licht, welches bei dem ersten Durchgange entstanden ist, gelangt, nachdem es an dem Spiegel zurückgeworfen worden, durch die Bestäubung hindurch wieder nach vorn, und interferirt mit dem gebeugten Lichte, welches beim Durchgange des reflectirten Lichtbündels durch die Bestäubung entsteht. Es handelt sich darum, das Resultat dieser Interferenz zu ermitteln.

Mit dieser Anordnung ist die folgende gleichbedeutend. Wir denken uns zwei Bestäubungsflächen, von welchen die eine das Spiegelbild der anderen ist, auf dem Wege des einfallenden Lichtes hinter einander aufgestellt. Alsdann interferiren sämmtliche am ersten Schirme gebeugte Strahlen, welche in einem Punkte der Bildfläche zusammentreffen, mit allen am zweiten Schirme gebeugten Strahlen, welche in demselben Bildpunkte vereinigt werden.

Das Interferenzbild werde durch eine Linse auf einem in der Brennweite aufgestellten Schirme entworfen oder durch ein auf unendliche Entfernung eingestelltes Fernrohr beobachtet. Dann kommen in jedem Bildpunkte gebeugte Strahlen zur Interferenz, welche von den Bestäubungsflächen in parallelen Richtungen austreten.

Es werde ferner vorausgesetzt, dass die Richtung der einfallenden Strahlen von der Spiegelnormale nur wenig abweiche, dass die Bestäubung eine spärliche sei, so dass die von der ersten Bestäubungsfläche ausgehenden gebeugten Wellen durch die zweite Bestäubungsfläche nahezu unversehrt hindurchgehen und endlich, dass die Bestäubungsfläche eine dem Spiegel parallele Lage habe.

Um das Interferenzbild zu berechnen, bemerken wir, dass jedem von einem Punkte der einen Bestäubungsfläche ausgehenden Elementarstrahle ein von dem homologen Punkte der anderen Bestäubungsfläche in derselben Richtung ausgehender Elementarstrahl entspricht, dass die Phasendifferenz der beiden Strahlen eines solchen Paares, eine bestimmte Beugungsrichtung vorausgesetzt, für sämmtliche Paare constant ist und dass folglich die in dieser Richtung von den beiden Bestäubungsflächen herrührenden resultirenden gebeugten Strahlen dieselbe gegenseitige Phasendifferenz haben. Es ist aber diese Phasendifferenz, wie man leicht sieht (92):

$$2\,e\,(\cos\alpha - \cos\chi)$$

oder näherungsweise

$$e\,(\chi^2 - \alpha^2),$$

wenn e die Entfernung der Bestäubungsfläche vom Spiegel, α der Winkel der einfallenden Strahlen mit der Spiegelnormale und χ der Winkel der gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale sind.

Stellt also I_1 die Intensität des hellen Feldes dar, welches eine einzige Bestäubung hervorbringen würde, so hat man (55), (92)

$$I = 2\,I_1\left(1 + \cos 2\,\pi\,\frac{2\,e\,(\cos\alpha - \cos\chi)}{\lambda}\right).$$

Um die Lage der dem zweiten variabeln Factor entsprechenden hellen und dunkeln Streifen des Interferenzbildes zu finden, setzen wir die Wegdifferenz

$$2\,e\,(\cos\alpha - \cos\chi) = k\,\frac{\lambda}{2},$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und finden für die Lage der hellen und dunkeln Streifen

$$\cos\chi = \cos\alpha - \frac{k\lambda}{4\,e}$$

oder näherungsweise

$$\chi^2 = \alpha^2 + \frac{k\lambda}{2\,e}$$

und zwar beziehen sich die geraden Werthe von k auf die hellen, die ungeraden auf die dunkeln Streifen. Da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen constant ist, sind die Interferenzringe Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt in der Richtung der Spiegelnormale liegt.

Für den achromatischen oder Centralstreifen, für welchen die Wegdifferenz Null ist, ergiebt sich aus $k = 0$:

$$\chi = \alpha,$$

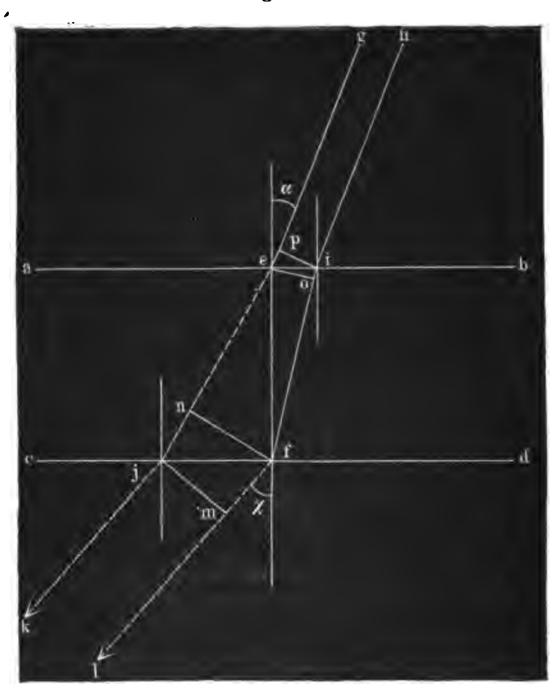
d. h. der achromatische Ring geht durch das Bild der Lichtquelle.

Benutzt man zur Erzeugung des Phänomens einen an der Hinterfläche belegten Glasspiegel, so dass die Strahlen sich nach der ersten und vor der zweiten Beugung durch ein Medium von anderem Brechungsexponenten bewegen, so ändert sich die Wegdifferenz, von welcher die Lage der Ringe abhängt. Denken wir uns wieder wie oben statt des doppelten Durchganges der Strahlen durch eine einzige Bestäubungsfläche den directen Durchgang derselben durch zwei identische Bestäubungsflächen und zwischen diesen eine Glasplatte von der doppelten Dicke des Glases des Spiegels.

Seien (Fig. 66, a. f. S.) *abcd* die Glasplatte, n der Brechungsexponent des Glases, e und f zwei homologe Punkte der Bestäubungsflächen, ge und

hif einfallende Strahlen, *ejk* und *fl* bei *e* und *f* gebeugte und in derselben Richtung austretende Strahlen.

Fig. 66.



Die Wegdifferenz dieser letzteren Strahlen berechnet sich wie folgt: Ist

$$jm \perp fl, \quad fn \perp ej, \quad eo \perp if, \quad ip \perp ge,$$

so werden die Wege *pe* und *io* und ebenso die Wege *nj* und *fm* gleichzeitig zurückgelegt. Die Wegdifferenz ist also *of* — *en* bezogen auf die Substanz der Platte und bezogen auf Luft:

$$n\,(of - en) = n\,(ef \cos efi - ef \,.\, \cos nef)$$

oder näherungsweise

$$en\,(\chi^2 - \alpha^2) = en\left(\frac{\chi^2}{n^2} - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) = \frac{e}{n}\,(\chi^2 - \alpha^2).$$

Demgemäss sind die hellen und dunkeln Ringe in diesem Falle gegeben durch

$$\frac{e}{n}\,(\chi^2 - \alpha^2) = k\,\frac{\lambda}{2}$$

oder

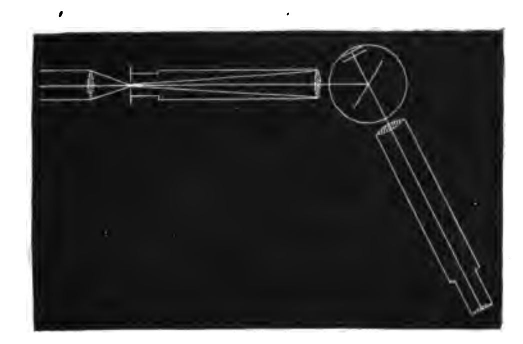
$$\chi^2 = \alpha^2 + n\,\frac{k\,\lambda}{2\,e}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen, so sehen wir, dass er sich von demselben nur durch den Factor n unterscheidet, welcher von der Brechung im Glase herrührt. Da auch hier der achromatische Streifen durch $\chi = \alpha$ gegeben ist, so sehen wir ferner, dass die Lage des achromatischen Streifens von der Brechung im Glase unabhängig ist und dass die Wirkung der Brechung darin besteht, die Breite der Streifen zu vergrössern.

Um das Phänomen hervorzubringen, kann man in der folgenden Weise verfahren [1]).

Auf dem Tischchen inmitten des Theilkreises eines Spectrometers wird dem Beobachtungsfernrohre gegenüber ein kleiner ebener Spiegel senkrecht zur Axe des Fernrohres aufgestellt; während diese Axe mit derjenigen des Collimators einen rechten oder stumpfen Winkel einschliesst, wird das aus letzterem austretende parallele Strahlenbündel von einer in der Mitte des Tischchens aufgestellten durchsichtigen planparallelen Glasplatte senkrecht auf den kleinen Spiegel reflectirt, um von diesem zurückgeworfen durch die Glasplatte in das Fernrohr zu gelangen. Durch eine Linse von kurzer Brennweite wird das vom Heliostaten kommende Licht in der Mitte des weit geöffneten Collimatorspaltes concentrirt. Ist die nach vorn gewendete Glasfläche des silberbelegten Spiegels auf irgend eine Weise getrübt oder bestäubt, oder befindet sich vor einem Metallspiegel ein getrübtes, dünnes Glas- oder Glimmerblättchen, so sieht man, in das Fernrohr blickend, den leuchtenden Punkt von prächtig gefärbten Ringen umgeben. Diese Versuchsanordnung ist in Fig. 67 angedeutet. Dreht man den Spiegel oder die Glasplatte, so entfernt sich der gemeinsame Mittelpunkt der Ringe und diese verwandeln sich schliesslich in merklich geradlinige Streifen.

Fig. 67.



Um das Phänomen objectiv zu erhalten, hat man das Beobachtungsfernrohr durch eine achromatische Linse von grosser Brennweite zu ersetzen und in der Focalebene derselben einen Schirm anzubringen.

[1]) E. Lommel, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes, Erlangen, 1875.

94. Schiefe Lage der Bestäubungsfläche.

Schliesst die Bestäubungsebene (bestäubtes Deckgläschen) mit dem Spiegel einen beliebigen Winkel ein, so beweist man ähnlich wie in (52), (85) und (87), dass die mittlere Intensität in der Nähe jedes Punktes des Gesichtsfeldes gleich der Summe der Intensitäten ist, welche durch die einzelnen Stäubchen für sich hervorgebracht werden[1]), wobei man diese letzteren Intensitäten nach dem Babinet'schen Principe (86) berechnet, indem man die opaken Schirmchen durch gleiche Oeffnungen ersetzt denkt. Bedeutet also i die durch ein einziges Stäubchen hervorgebrachte Intensität, so hat man

$$I = \Sigma\,(i).$$

Bedeutet ferner i_1 die durch ein einziges Stäubchen ohne den Spiegel hervorgebrachte Intensität, so ist (93)

$$i = 2\,i_1 \left(1 + \cos 2\,\pi\,\frac{2\,e\,(\cos\alpha - \cos\chi)}{\lambda}\right)$$

und, wenn der Einfachheit wegen

$$\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(\cos\alpha - \cos\chi) = s$$

gesetzt wird,

$$I = \Sigma\,[2\,i_1\,(1 + \cos 2\,es)].$$

Zerlegen wir die Bestäubungsfläche in schmale Streifen parallel der Spiegelebene, so wird

$$I = \Sigma''\,\{\Sigma'\,[2\,i_1\,(1 + \cos 2\,es)]\},$$

wenn sich Σ' auf einen einzigen Streifen, Σ'' auf sämmtliche Streifen bezieht. Es ist dann weiter

$$I = \Sigma''\,[(1 + \cos 2\,es)\,\Sigma'\,(2\,i_1)].$$

Bedeutet nun j die von der Flächeneinheit der (gleichförmig) bestäubten Fläche (ohne Spiegel) in der betrachteten Beugungsrichtung herrührende Intensität, ist ferner $\frac{1}{p}$ die (constante) Breite eines Streifens und $f(e)$ seine Länge, so wird

$$\Sigma'\,(2\,i_1) = \frac{2\,j}{p}\,f(e)$$

und

$$I = \frac{2\,j}{p}\cdot\Sigma''\,[(1 + \cos 2\,es)\,f(e)].$$

[1]) K. Exner, Ueber die Newton'schen Staubringe. Wied. Ann. XI, 1880.

Sind ferner e_1 und e_2 bezüglich die kleinste und die grösste Entfernung der Bestäubungsebene vom Spiegel und ψ der Winkel der Bestäubungsebene mit dem Spiegel, so wird, wenn kleine Grössen als Differentiale behandelt werden, schliesslich

$$I = \frac{2j}{\sin\psi} \int_{e_1}^{e_2} (1 + \cos 2es)\, f(e)\, de.$$

Hat insbesondere die Bestäubungsebene die Gestalt eines Rechteckes, dessen zwei Seiten der Spiegelebene parallel sind, so wird

$$f(e) = \frac{\Sigma\,(i_1)\,\sin\psi}{(e_2 - e_1)\,j}$$

und

$$I = \frac{\Sigma\,(2\,i_1)}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} (1 + \cos 2es)\, de$$

$$= \Sigma\,(2\,i_1)\left[1 + \frac{\sin s\,(e_2 - e_1)}{s\,(e_2 - e_1)} \cos s\,(e_2 + e_1)\right]$$

und, wenn durch I_1 die Intensität des hellen Feldes bezeichnet wird, welches die Bestäubungsfläche für sich (ohne Spiegel) giebt:

$$I = 2\,I_1 \left[1 + \frac{\sin 2\pi \dfrac{(e_2 - e_1)(\cos\alpha - \cos\chi)}{\lambda}}{2\pi \dfrac{(e_2 - e_1)(\cos\alpha - \cos\chi)}{\lambda}} \cdot \cos 2\pi \frac{(e_2 + e_1)(\cos\alpha - \cos\chi)}{\lambda}\right].$$

Insbesondere erhält man bei normaler Incidenz, d. i. wenn $\alpha = 0$, aus der letzten Intensitätsgleichung für $e_1 = e_2 = e$, d. i. für die Parallellage der Bestäubungsfläche:

$$I = 2\,I_1 \left(1 + \cos 2\pi \frac{e\chi^2}{\lambda}\right) = 2\,I_1 \cdot f_1(\chi),$$

und für $e_1 = 0$, $e_2 = 2\,e$, d. i. für die schiefste Lage der Bestäubungsebene:

$$I = 2\,I_1 \left(1 + \frac{\sin 2\pi \dfrac{2\,e\chi^2}{\lambda}}{2\pi \dfrac{2\,e\chi^2}{\lambda}}\right) = 2\,I_1 \cdot f_2(\chi).$$

Die Variationen des zweiten Factors der beiden letzten Gleichungen sind in Fig. 68 (a. f. S.) durch Curven versinnlicht. Die Ordinaten

der beiden Curven stellen die Werthe der Functionen $f_1(\chi)$, $f_2(\chi)$ dar die Abscissen die entsprechenden Werthe von $2\pi\frac{e\chi^2}{\lambda}$. Aus der Betrachtung derselben ergiebt sich die folgende Consequenz der Theorie:



Fig. 68.

Dreht man die rechteckige Bestäubungsebene um ihre Mittellinie, bis eine ihrer Seiten den Spiegel berührt, so hören die Minima auf Null zu sein, die Ringe verschwinden bis auf einige wenige dem Centrum zunächst liegende und auch der Glanz dieser Ringe erscheint beträchtlich vermindert. Zugleich reduciren sich die Radien der Ringe derart, dass ungefähr die vier ersten Ringe (Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Minimis) an die Stelle der zwei ersten Ringe treten.

Diese Consequenz der Theorie wird durch den Versuch bestätigt (l. c.).

Schaltet man bei der schiefen Stellung der Bestäubungsebene in den Gang der Strahlen einen Schirm mit einer kleinen Oeffnung ein, so dass nur eine Stelle der Bestäubungsfläche von geringer Ausdehnung wirksam ist, so gewahrt man ein Ringsystem entsprechend der Entfernung der wirksamen Stelle der Bestäubung vom Spiegel. Sind am Schirme zwei Oeffnungen angebracht, so gewahrt man eine Uebereinanderlagerung zweier Ringsysteme entsprechend den verschiedenen Entfernungen der beiden wirksamen Stellen der Bestäubung vom Spiegel. Die Ursache des Verschwindens der Ringe bei der Drehung der Bestäubungsfläche aus der Parallellage in die schiefe Lage liegt also, wie nicht minder aus dem Experimente als aus der Theorie hervorgeht, im Auseinandergehen der durch die einzelnen Staubtheilchen hervorgebrachten elementaren Ringsysteme in Folge der wachsenden Ungleichheit der Abstände der Staubtheilchen vom Spiegel, indem eine Stelle der Bestäubung um so engere Ringe hervorbringt, je weiter sie vom Spiegel entfernt ist.

95. Der Newton'sche Hohlspiegelversuch[1]).

Sonnenstrahlen treten durch eine Oeffnung im Fensterladen, hierauf durch eine sehr kleine Oeffnung eines Schirmes, fallen auf einen an der Rückseite belegten Hohlspiegel aus Glas, welcher so aufgestellt ist, dass sein Krümmungsmittelpunkt auf die Oeffnung des Schirmes fällt, werden von dem Spiegel nach dem Schirme zurückgeworfen und erzeugen daselbst ein Bild der Oeffnung, welches mit der Oeffnung selbst zusammenfällt. Man gewahrt nun auf dem Schirme Farbenringe, welche die Oeffnung umgeben, violett innen, roth aussen. Das Centrum der Erscheinung bildet eine sich unmittelbar an das Bild der Oeffnung anschliessende, aussen röthliche, Aureole. Dreht man den Spiegel, so dass sich das Bild der Oeffnung auf dem Schirme verschiebt und nicht mehr mit der Oeffnung selbst zusammenfällt, so verwandelt sich die Aureole in einen kreisförmigen achromatischen Ring, an beiden Rändern roth gefärbt, welcher so liegt, dass die Distanzlinie der Oeffnung und ihres Bildes ein Durchmesser des Ringes ist. Die früher vorhandenen Ringe erscheinen nun als äussere, mit dem achromatischen concentrische Ringe, während sich im Innern des achromatischen Ringes neue, ebenfalls mit dem achromatischen concentrische Ringe zeigen, roth innen. Bei fortgesetzter Drehung des Spiegels vergrössern sich die Durchmesser der Ringe, während aus dem Centrum sich neue Ringe entwickeln. Die Breite der Ringe nimmt von innen nach aussen ab. Das Phänomen erscheint nicht in allen Theilen gleich hell, vielmehr bemerkt man ein mit dem Bilde der Oeffnung zusammenfallendes Maximum der Intensität, so dass bei hinreichender Neigung des Spiegels das Phänomen nur in der Nähe des Bildes der Oeffnung sichtbar bleibt. Ueberschreitet die Neigung des Spiegels 10 bis 15 Grade, so gewahrt man noch ein das Bild der Oeffnung umgebendes helles Feld, welches von nahezu geradlinigen, schmalen dunklen Streifen durchsetzt erscheint. Bei weiterer Drehung rücken die Streifen immer näher aneinander und verschwinden zuletzt.

Wir haben den Versuch beschrieben, wie er von Newton angestellt worden ist. Die Intensität des Phänomenes wird jedoch durch eine künstliche Bestäubung der Vorderfläche des Spiegels beträchtlich gesteigert. Das Glas des Spiegels trägt nichts zur Erzeugung des Phänomenes bei, weshalb mit Vortheil ein Metallspiegel und als Träger der Bestäubung ein dünnes Glas- oder Glimmerblättchen benutzt werden kann, wie dies der Herzog von Chaulnes zuerst gethan hat[2]). Schliess-

---

[1]) Optik, II. — [2]) *Mém. de l'anc. Acad. des sc.* 1755.

lich kann statt des Hohlspiegel ein ebener Spiegel verwendet werden, dessen Distanz vom Schirme beliebig ist. Um die Zerstreuung der einfallenden Strahlen einzuschränken, wird am ebenen Spiegel ein Diaphragma angebracht, dessen Oeffnung jener des Schirmes an Grösse nahezu gleich ist.

Die Erklärung dieses Versuches ist die folgende:

Es ist klar, dass die directen Lichtstrahlen zweimal, vor und nach ihrer Reflexion am Metallspiegel, die Bestäubungsfläche durchsetzen. Die beim ersten Durchgange gebeugten Strahlen treffen den Schirm nach ihrer Reflexion am Spiegel, die beim zweiten Durchgange gebeugten gelangen direct dahin. Es projiciren sich also auf dem Schirme zwei den beiden Durchgängen des Lichtes durch die Bestäubungsfläche entsprechende Beugungsphänomene, von welchen jedes bei unregelmässig gestalteten Stäubchen aus einem das Bild der Lichtquelle, d. i. der kleinen Oeffnung des Schirmes, umgebenden hellen Felde besteht. Es findet nun keineswegs eine einfache Uebereinanderlagerung der beiden Beugungsbilder statt, vielmehr interferiren dieselben gegenseitig, und das Resultat dieser Interferenz ist die Entstehung der Ringe.

Die Lage der Ringe berechnet sich wie in (93). Es ergiebt sich für die Lage der hellen und dunklen Ringe

$$1 + \cos 2\pi \frac{\frac{1}{2} e (\chi^2 - \alpha^2)}{\lambda} = 2 \text{ oder } 0$$

oder

$$\chi^2 = \alpha^2 + \frac{k\lambda}{e},$$

wo k eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Die geraden Werthe von k entsprechen den hellen, die ungeraden den dunklen Ringen.

Sei ed (Fig. 69) das dünne einfallende Strahlenbündel, mn der Schirm, dessen Ebene wir senkrecht zu den einfallenden Strahlen voraussetzen, f die Bestäubungsfläche, d der Spiegel, welcher nahezu in senkrechter Lage gegen die einfallenden Strahlen gedacht wird, da das reflectirte Strahlenbündel, a das Bild der Oeffnung b, do die Normale des Spiegels im Punkte d. Da der Winkel bda als klein gedacht wird, liegt der Punkt o in der Mitte zwischen a und b. Ist r die Entfernung des Punktes o von irgend einem Punkte des Schirmes, ferner $oa = ob = a$ und schliesslich E die Entfernung des Spiegels vom Schirme, so ist näherungsweise

$$\chi = \frac{r}{E} \qquad \alpha = \frac{a}{E}$$

und die Gleichung für die hellen oder dunklen Ringe geht über in

$$r^2 = a^2 + k\frac{\lambda E^2}{e}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

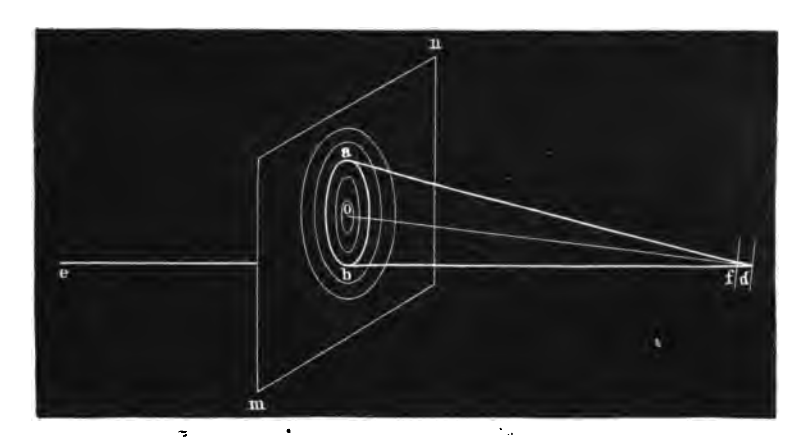
$$k = o,$$

so erhalten wir einen hellen Ring, dessen Gleichung

$$r = a$$

nicht von λ abhängt, den achromatischen Ring, welcher nach dieser Gleichung ein Kreis ist und ab zum Durchmesser hat. Setzen wir für k

Fig. 69.



positive oder negative Werthe, so erhalten wir die äusseren oder inneren Ringe, welche nach ihren Gleichungen ebenfalls Kreise sind, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt auf O fällt.

Wir haben für zwei aufeinanderfolgende Ringe

$$r^2 = a^2 + k \frac{\lambda E^2}{e}$$

$$r'^2 = a^2 + (k + 1) \frac{\lambda E^2}{e},$$

woraus sich ergiebt

$$r'^2 \pi - r^2 \pi = \frac{E^2 \lambda}{e}.$$

Die Flächen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ringen sind also sämmtlich gleich gross, d. h. die Ringe befolgen das Gesetz der Newton'schen Ringe (34). Wir erhalten ferner für den ersten äusseren dunkeln Ring, dessen Abstand vom achromatischen Ringe x sei,

$$(a + x)^2 = a^2 + \frac{\lambda E^2}{e},$$

also näherungsweise

$$2ax = \frac{\lambda E^2}{e}$$

und

$$x = \frac{\lambda E^2}{2ae}.$$

Die Streifenbreite in der Nähe des achromatischen Ringes ist also näherungsweise

$$\frac{\lambda E^2}{ae}.$$

Ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \lambda &= 0{,}0000006 \text{ m} \\ E &= 15 \text{ „} \\ a &= 0{,}9 \text{ „} \\ e &= 0{,}003 \text{ „} \end{aligned}$$

so erhält man für die Streifenbreite ungefähr 5 Centimeter.

96. Der Newton'sche Versuch, subjectiv angestellt.

Schon Newton erkannte, dass das Phänomen auch subjectiv wahrgenommen werden könne.

Stokes[1]) brachte eine kleine Flamme in den Krümmungsmittelpunkt des bestäubten Hohlspiegels, stellte das Auge so, dass die Flamme, welche sich zwischen dem Beobachter und dem Spiegel befand, deutlich wahrgenommen wurde und bedeckte die Flamme durch ein Schirmchen, um vor Blendung zu schützen. Das Schirmchen erscheint von den Ringen umgeben, welche in der Luft zu schweben scheinen (Fig. 70).

Blickt man, ein Kerzenlicht in der Hand und dasselbe dem Auge nähernd, nach einem an der Rückseite belegten Glasspiegel, so genügt eine geringe Verunreinigung an der Vorderfläche des Spiegels, um die sogenannten Quetelet'schen[2]) oder Whewell'schen[3]) Streifen zu zeigen, Farbenstreifen, welche das Bild der Kerzenflamme umgeben und im Wesentlichen mit den von Newton beobachteten Farbenstreifen identisch sind. Hier wird jedoch jede Stelle des Phänomens auf der Netzhaut nur durch einige, neben einander liegende, Stäubchen erzeugt und ist auch Rücksicht auf die Brechung im Glase des Spiegels zu nehmen. Es ergiebt sich für die Lage der Streifen genau wie in (93)

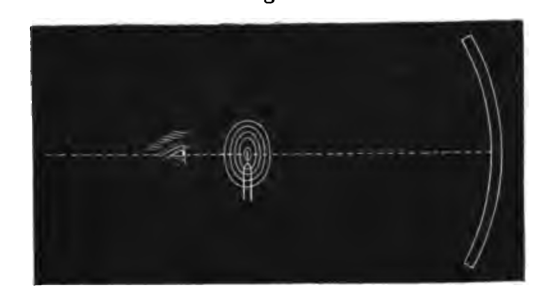
$$\chi^2 = \alpha^2 + n\frac{k\lambda}{2e}.$$

---

1) *Phil. Mag.* II. — 2) *Corresp. phys. et mathém.* V, 394. — 3) *Phil. Mag.* (4) I, 336.

α und χ bedeuten hier die Winkel der Normale des Spiegels mit den Geraden, welche von einem Punkte des Spiegels nach der Lichtquelle

Fig. 70.



und dem Auge gezogen werden, k eine ganze Zahl, n den Brechungsexponenten des Glases des Spiegels, e die Dicke des Spiegels. Die geraden Werthe von k entsprechen den hellen, die ungeraden den dunkeln Ringen.

Das Phänomen besteht sonach aus gekrümmten Farbenstreifen, welche das Bild der Lichtquelle eingeben, und theils äussere theils innere Streifen sind, entsprechend den positiven und negativen Werthen von k. Dem Werthe $k = 0$ entspricht der achromatische Streifen. Wir unterlassen es, eine ausführliche Discussion der letzten Gleichung zu geben und begnügen uns damit, die Gestalt und Lage des achromatischen Streifens zu bestimmen. Für diesen ist

$$\chi = \alpha.$$

Sind also (Fig. 71, a. f. S.) $abcd$ der Spiegel, A das Auge, B die Lichtquelle, A', B' die Projectionen dieser Punkte auf den Spiegel, S der Punkt des Spiegels, in welchem das Auge die Lichtquelle sieht, S' irgend ein Punkt des achromatischen Streifens auf dem Spiegel, so hat man

$$A'S' : B'S' = AA' : BB'.$$

Construirt man daher auf dem Spiegel zu den drei Punkten A', S, B' den vierten, dem Punkte S zugehörigen, harmonischen Punkt T, so ist ST ein Durchmesser des Kreises lm, welcher vom achromatischen Streifen gebildet wird, wie zuerst Schlaefli[1]) nachgewiesen hat.

97. Zahlreiche Variationen des Newton'schen Versuches.

Es ist klar, dass man analoge Erscheinungen erhalten muss, wenn man statt einer Bestäubungsfläche irgend eine lichtbeugende Fläche, d. i.

[1]) Grunert's Arch., XIII.

irgend ein Beugungsgitter anwendet, indem man das Licht nach einander durch zwei völlig gleiche und parallel liegende Gitter oder unter Anwendung einer Reflexion an einem Spiegel zweimal durch dasselbe Gitter treten lässt. Die beiden so erzeugten Beugungsphänomene interferiren unter einander.

Schon der Herzog von Chaulnes ersetzte die Bestäubung durch Behauchung, durch einen Ueberzug eingetrockneten Milchwassers, durch

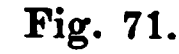


Fig. 71.

eine Messerschneide, durch ein Gitter nicht äquidistanter Silberfäden. Im letzteren Falle treten bei Anwendung einer linearen Lichtquelle statt der Ringe geradlinige Streifen auf.

Statt der Silberfäden kann man auch die Fettstreifen benutzen, welche sich an der Oberfläche eines Glasspiegels bilden, wenn man mit einem befetteten Gegenstande geradlinig über dieselbe wegfährt. Der Schweif gebeugten Lichtes, welchen ein in dieser Art getrübter Spiegel wahrnehmen lässt, zeigt bei der geeigneten Stellung der Lichtquelle spectral gefärbte Stellen. William Herschel[1]) erzeugte die Ringe, indem er an einer bestimmten Stelle vor einem Spiegel ein feines Pulver in die Luft streute. Pouillet wendete ein mit einem runden Loche versehenes schwarzes Papier vor einem metallenen Hohlspiegel an[2]), E. Lommel beschäftigte sich mit der Erscheinung, welche sich darbietet,

---

[1]) *Phil. Trans.* 1807, 231. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.* 1816.

wenn ein Gitter (im engeren Sinne) vor eine spiegelnde Fläche gebracht wird. Die „gezackten" Interferenzstreifen, welche Brewster[1]) innerhalb der Gitterspectra wahrnahm, als er eine Glasplatte, deren untere Fläche geritzt war, über eine ebenfalls geritzte Stahlplatte brachte und das an der Stahlplatte reflectirte zweimal durch das Gitter gegangene Licht ins Auge gelangen liess, sowie die Streifen, welche Crova[2]) erhielt, indem er ein durch einen schmalen Spalt gegangenes Lichtbündel durch zwei gleiche und parallele Glasgitter treten liess, gehören ebenfalls hierher; ebenso das Phänomen, welches Braham[3]) vermittelst eines kreisförmig geritzten Glasgitters erhielt. Schliesslich wurden Ringe hervorgebracht mittelst zweier in ganz gleicher Weise auf Glasplatten photographirter künstlicher Bestäubungen, welche nach einander von den Lichtstrahlen durchsetzt wurden[4]).

98. Die sogenannten Interferenzen diffusen Lichtes.

Die durch Combination einer Bestäubungsfläche und eines Spiegels erzeugten Phänomene galten bis in die jüngste Zeit als hervorgebracht durch die Interferenz jener Lichtstrahlen, welche von den Staubpartikelchen ausgehend diese sichtbar machen, und wurden demgemäss in den Compendien der Optik und Physik[5]) abseits von den Beugungserscheinungen als Interferenzen diffusen Lichtes abgehandelt. Stokes trat zuerst für die Beugungstheorie ein, und in der That lässt sich strenge nachweisen, dass man es mit Beugungserscheinungen zu thun habe. Die Diffusionstheorie berechnet die Erscheinungen in ähnlicher Weise, wie die Beugungstheorie, und gelangt in Bezug auf die Lage der Ringe bei den bisher besprochenen Versuchen zu denselben Resultaten. Es giebt aber einen Versuch, in Bezug auf welchen die Resultate auseinandergehen und welcher daher entscheidet. Wendet man Lycopodiumbestäubung an, deren Partikelchen gleich grosse Kugeln sind, so erscheinen gleichzeitig die Fraunhofer'schen Ringe, welche unbestritten ein Beugungsphänomen sind (90). Nach der Diffusionstheorie müsste das vereinigte Phänomen der Fraunhofer'schen Ringe und der dieselben durchschneidenden Quetelet'schen Streifen bei Anwendung homogenen Lichtes ein helles Netz auf dunklem Grunde ergeben, es könnten in keiner Weise die hellen Stellen des einen Phänomens durch die dunklen des anderen ausgelöscht erscheinen. Ein anderes verlangt die Beugungstheorie. Nach dieser sind die vereinigten Phänomene gegeben durch (88), (93)

$$I = 2n\pi^2 r^4 \left(1 - \frac{m^2}{2} + \dots\right)^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\frac{1}{2} e\,(\chi^2 - \alpha^2)}{\lambda}\right).$$

---

[1]) *Phil. Mag.*, 1865. — [2]) C. R., 1871, 1872. — [3]) *Nature*, X, 389. — [4]) K. Exner, Wiener Akad. d. Wiss., 1875. — [5]) Billet, Verdet, Mousson.

Die beiden Factoren in den Klammern haben jeder für sich ihre Minima. Die Minima des ersten Factors entsprechen den dunklen Fraunhofer'schen Ringen, die des zweiten Factors den dunklen Quetelet'schen Streifen und zwar sind die Minima beider Factoren sämmtlich der Null gleich. Indem die beiden Ringsysteme sich durchschneiden, muss das vereinigte Phänomen bei Anwendung homogenen Lichtes ein dunkles Netz auf hellem Grunde zeigen. Es liegt hier ein *experimentum crucis* vor, welches in unzweideutiger Weise für die Beugungstheorie entscheidet.

Wir wollen schliesslich bemerken, dass Young[1]) zuerst das Princip der Interferenz auf die von Newton entdeckten Erscheinungen anwendete und dass die Uebereinstimmung der Rechnung mit dem Versuche durch zahlreiche, namentlich von Mousson[2]) angestellte Messungen nachgewiesen ist.

Die Beugungserscheinungen, welche durch die Combination einer Bestäubungsfläche mit einem Spiegel hervorgebracht werden, gehören sonach in eine Classe mit jenen, welche durch eine einzige Bestäubung hervorgebracht werden, also namentlich mit der Erscheinung der Höfe. Das Charakteristische der Erzeugungsweise liegt in der unregelmässigen Vertheilung und grossen Zahl der beugenden Körperchen. Die Erscheinungen selbst zeigen stets bei Anwendung einer punktförmigen Lichtquelle eine Granulation des Gesichtsfeldes, welche das Ergebniss der Interferenz der durch die einzelnen Körperchen für sich hervorgebrachten elementaren Beugungserscheinungen ist. Die mittlere Intensität in der Nähe jeder Stelle eines solchen Phänomens ist jedoch nicht zufällig, sondern, wie sich durch Rechnung nachweisen lässt[3]), gleich der Summe der durch die einzelnen Körperchen hervorgebrachten Intensitäten.

99. Die Theoreme von Bridge.

Wir nehmen einen Beugungsschirm mit beliebiger Oeffnung an, durch welche parallele Strahlen senkrecht treten, legen in die Ebene des Schirmes ein rechtwinkeliges Coordinatensystem OXY und berechnen die Intensität für einen entfernten hinter dem Schirm in der xz-Ebene liegenden Punkt P. Wir theilen die Oeffnung in unendlich schmale Streifen parallel der Richtung der y. Ist $d^2\dot{\sigma} \,.\, \sin 2\pi \frac{t}{T}$ die Vibrationsgeschwindigkeit, welche von dem bei O liegenden Flächenelemente $d^2\sigma$ auf den Punkt P übertragen wird, so ist die von einem der Streifen, deren Fläche ydx ist, auf den Punkt P übertragene Vibrationsgeschwindigkeit:

---

[1]) *Phil. Tr.* 1802. — [2]) Verh. d. Schweizer Natf. Ges. 1850. 1853. — [3]) K. Exner, Wied. Ann., XI.

$$y\,dx\;.\;\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\sin\theta}{\lambda}\right),$$

wo θ den Beugungswinkel bedeutet, die von der ganzen Oeffnung herrührende Vibrationsgeschwindigkeit:

$$\int y\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)dx,$$

und die Intensität im Punkte P:

$$I=\left(\int y\sin 2\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}\,dx\right)^2+\left(\int y\cos 2\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}\,dx\right)^2.$$

Da die Lage der x-Axe in der Ebene des Beugungsschirmes willkürlich angenommen ist, so kann mit Hülfe dieser Formel die Intensität für eine beliebige Beugungsrichtung berechnet werden. Ist

$$\frac{\sin\theta}{\lambda}=\frac{\sin\theta'}{\lambda'}$$

und setzt man die zweite dieser beiden Grössen für die erste in den Ausdruck für die Intensität, so bleibt derselbe ungeändert. Es folgt:

1. Die Sinus der Beugungswinkel, welche einem bestimmten Maximum oder Minimum entsprechen, sind den Wellenlängen proportional. Die Beugungsfiguren, welche man bei Anwendung homogener Lichtgattungen von verschiedenen Wellenlängen erhält, sind also ähnlich und ihr lineares Grössenverhältniss ist das der Wellenlängen.

2. Aehnliche, aber ungleich grosse Beugungsöffnungen geben ähnliche Beugungsfiguren, deren lineares Grössenverhältniss das umgekehrte des linearen Grössenverhältnisses der Oeffnungen ist. Man hat nämlich für eine m mal grössere Oeffnung:

$$I'=\left(\int my\sin 2\pi\frac{mx\sin\theta'}{\lambda}\,dx\right)^2+\left(\int my\cos 2\pi\frac{mx\sin\theta'}{\lambda}\,dx\right)^2$$

und das Verhältniss der Intensitäten I und I' wird constant, wenn

$$m\sin\theta'=\sin\theta$$

oder wenn

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}=\frac{1}{m}.$$

3. Aendert sich die Beugungsöffnung derart, dass sämmtliche Ordinaten mit einem constanten Factor m multiplicirt erscheinen, so multiplicirt sich für einen in der xz-Ebene liegenden Punkt die Intensität mit dem constanten Factor m^2. Es bleibt also die Beugungsfigur auf xz ungeändert.

4. Wird die Beugungsöffnung in der Ebene xy parallel zu sich selbst verschoben, so ändert sich die Beugungsfigur nicht.

5. Die von einer Gruppe gleicher und gleichliegender Oeffnungen auf einen entfernten Punkt übertragene Intensität ist gleich der durch

eine einzige der Oeffnungen hervorgebrachten Intensität multiplicirt mit der durch ein System leuchtender Punkte hervorgebrachten Intensität, welche die Lage homologer Punkte sämmtlicher Oeffnungen haben.

Um diesen Satz zu beweisen, sei $d^2\sigma$ ein Element einer der Oeffnungen. Die von diesem Elemente und den homologen Elementen der übrigen Oeffnungen in irgend einer Richtung auf einen entfernten Punkt, P, fortgepflanzte Vibrationsgeschwindigkeit ist offenbar proportional der in derselben Richtung fortgepflanzten Vibrationsgeschwindigkeit des oben betrachteten Punktsystems. Bezeichnen wir diese Vibrationsgeschwindigkeit durch M, so haben wir bei passender Wahl des Nullpunktes der Zeit für die von den besprochenen Elementen herrührende Bewegung

$$v = M \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot d^2\sigma$$

und

$$I = M^2.$$

M ist offenbar constant für jede Lage des Elementes $d^2\sigma$ auf der Oeffnung, welcher es angehört.

Wir haben also für ein anderes System solcher homologer Elemente:

$$v = M \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) \cdot d^2\sigma,$$

wo δ die Wegdifferenz zwischen den beiden Elementen derselben Oeffnung bedeutet, und wir haben für die von sämmtlichen Oeffnungen herrührende Vibrationsgeschwindigkeit:

$$v = M \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) d^2\sigma$$

und für die entsprechende Intensität:

$$I = M^2 \left[\left(\int \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\, d^2\sigma\right)^2 + \left(\int \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\, d^2\sigma\right)^2\right].$$

Der zweite Factor dieses Ausdruckes bedeutet die von einer einzigen Oeffnung herrührende Intensität und somit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Eine Consequenz dieses Theorems ist, dass bei einer Gruppe gleicher und gleichliegender Oeffnungen die Intensität für jede Richtung Null ist, für welche entweder die Intensität für eine einzige Oeffnung oder die Intensität für ein System von Punkten Null ist, welche die Lage homologer Elemente der Oeffnungen haben, dass es also im Allgemeinen zwei Gattungen Minima giebt.

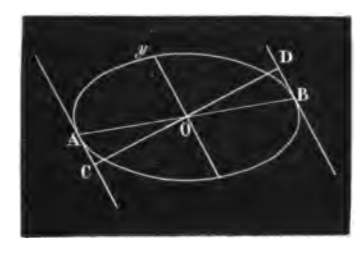
Die vorstehenden Theoreme rühren von dem englichen Astronomen Bridge her.

100. Beugung durch eine elliptische Oeffnung.

Die Theoreme Bridge's gestatten den Fall einer elliptischen Oeffnung auf den einer kreisförmigen zurückzuführen.

Um die Wirkung der elliptischen Oeffnung auf einen entfernten Punkt P zu erhalten, verbinden wir diesen Punkt durch eine Gerade mit dem Centrum O der Oeffnung, legen durch OP eine Ebene senkrecht zur Ebene der Oeffnung, nehmen den Durchschnitt beider Ebenen, CD (Fig. 72), zur x-Axe und die Ebene der Ellipse zur xy-Ebene. Der Effect der gebeugten Strahlen in der betrachteten Richtung wird nicht geändert, wenn wir die zu y parallelen Sehnen der Ellipse in ihrer eigenen Richtung verschieben, bis ihre Centra auf die x-Axe fallen. Nachdem wir so die Ellipse durch eine andere Ellipse ersetzt haben, multipliciren wir noch sämmtliche Ordinaten mit einem constanten Factor, so dass wir einen Kreis vom Radius OC erhalten. Nach einem der Theoreme Bridge's wird durch diese letzte Substitution zwar die Intensität, nicht aber die Lage der Maxima und Minima in der Ebene xz geändert.

Fig. 72.



Nachdem wir derart die elliptische Oeffnung durch eine kreisförmige Oeffnung ersetzt haben, bemerken wir, dass (88) bei einer solchen die Sinus der den verschiedenen Maximis und Minimis entsprechenden Deviationen dem Radius der Oeffnung verkehrt proportional sind. Möge sich nun die Ebene xz, in welcher wir das Phänomen betrachten, um die Axe z drehen. Es folgt aus dem Vorhergehenden, dass der Sinus des in dieser Ebene einem Maximum oder Minimum von bestimmter Ordnungszahl entsprechenden Deviationswinkels stets verkehrt proportional bleibt dem Abstande des Centrums der elliptischen Oeffnung von einer zu der jeweiligen Lage der y-Axe parallelen Tangente der elliptischen Oeffnung. Es sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse unter der Voraussetzung, dass die x- und y-Axe des Coordinatensystems mit den Axen der Ellipse zu Coincidenz gebracht worden sind. Dies vorausgesetzt betrachten wir eine auf der Ellipse senkrechte Ebene, welche mit der Ebene xz einen Winkel α bildet; die Tangente der Ellipse, welche auf dem Durchschnitte der betrachteten Ebene mit der Ebene der Ellipse senkrecht steht, hat zur Gleichung:

$$y = -\frac{x}{tang\,\alpha} + \sqrt{\frac{a^2}{tang^2\alpha} + b^2},$$

und die Entfernung des Centrums der Ellipse von dieser Tangente ist

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2}{tang^2\alpha} + b^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{tang^2\alpha}}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2\,tang^2\alpha}}{\sqrt{1 + tang^2\alpha}}.$$

Dieser letzteren Grösse sind also die Sinus der Deviationswinkel verkehrt proportional, welche einem Maximum oder Minimum von bestimmter Ordnungszahl in einer Ebene entsprechen, die durch die z-Axe geht und mit der Ebene xz einen Winkel α bildet. Es ist leicht, hieraus die Gestalt der Curven der Maxima und Minima auf einem entfernten, zur Ebene der Ellipse parallelen Schirm abzuleiten. Nehmen wir auf dem Schirme ein Coordinatensystem $O'X'Y'$ an. Es falle O' auf die z-Axe und sei $O'X'$ mit der grossen, $O'Y'$ mit der kleinen Axe der Ellipse parallel. Betrachten wir eine Maximum- oder Minimum-Curve von bestimmter Ordnungszahl auf dem Schirme; ein Radiusvector dieser Curve, welcher mit $O'X'$ einen Winkel gleich α einschliesst, ist, wie wir gesehen haben, verkehrt proportional der Grösse

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2\,tang^2\alpha}}{\sqrt{1 + tang^2\alpha}},$$

oder gerade proportional der Grösse

$$\frac{1}{\cos\alpha\,\sqrt{a^2 + b^2\,tang^2\alpha}}.$$

Bezeichnen wir also durch $x'y'$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes des Radiusvectors mit der Curve und durch K eine constante Grösse, so wird

$$x'^2 = \frac{K^2}{a^2 + b^2\,tang^2\alpha}$$

$$y'^2 = \frac{K^2\,tang^2\alpha}{a^2 + b^2\,tang^2\alpha},$$

woraus durch Elimination von α folgt:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = \frac{K^2}{a^2 b^2}.$$

Die von den Maximis und Minimis gebildeten Curven sind also Ellipsen, welche mit der Beugungsöffnung ähnlich, aber gegen dieselbe um einen rechten Winkel gedreht sind.



VIII.

Fresnel'sche Beugungserscheinungen.

101. Fresnel's Integrale.

Während bei den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen sowohl die punktförmige Lichtquelle als der Projectionsschirm in unendlicher Entfernung zu denken sind, findet keines von beiden bei den sogenannten Fresnel'schen oder mikroskopischen Beugungerscheinungen statt. Die punktförmige Lichtquelle befindet sich in einer beliebigen Entfernung vom Beugungsschirme und das Phänomen wird in endlicher Entfernung mittelst eines Schirmes aufgefangen oder mittelst einer Fresnel'schen Lupe betrachtet, welche auf die Ebene eingestellt ist, in welcher sich der Schirm befinden würde (18).

Die Fraunhofer'schen Beugungen sind also ein specieller Fall der Fresnel'schen. Auch die letzteren können mittelst eines Fernrohres beobachtet werden, dessen Ocular jedoch im Allgemeinen nicht auf das Bild der Lichtquelle eingestellt ist, sondern eine beliebige Einstellung hat entsprechend den verschiedenen Lagen des Projectionsschirmes, dessen Entfernung vom Beugungsschirme in diesem Falle auch negativ genommen werden kann.

Wir werden zunächst Beugungsschirme in Betracht ziehen, deren Begrenzungen durch parallele, unendlich lange gerade Linien gebildet werden.

Sei (Fig. 73, a. f. S.) O die Lichtquelle, XG eine zu O gehörige sphärische Welle, PD der Schirm, auf welchen sich das Beugungsphänomen projicirt. Wir legen eine Ebene E durch O senkrecht auf die Ränder des Beugungsschirmes und betrachten die Wirkung der sphärischen Welle auf einen in der Ebene E liegenden Punkt P. Die Ebene E schneidet die Welle längs eines grössten Kreises, AX.

Wir zerlegen den Bogen AX in Elementarbogen und legen durch die Theilungspunkte grösste Kreise, welche auf dem grössten Kreise AX senkrecht stehen. Die Kugelwelle wird hierdurch in schmale Zweiecke getheilt, deren gemeinsame Axe der zu AX senkrechte Durchmesser der Kugelwelle ist. Die Wirkung jedes dieser Zweiecke auf den Punkt P reducirt sich (62) auf diejenige eines kleinen Theiles des Zweieckes, welcher sich zu beiden Seiten von AX gleich weit erstreckt. Hat überdies der wirksame Theil der Welle nur eine geringe Ausdehnung, so können die

Fig. 73.

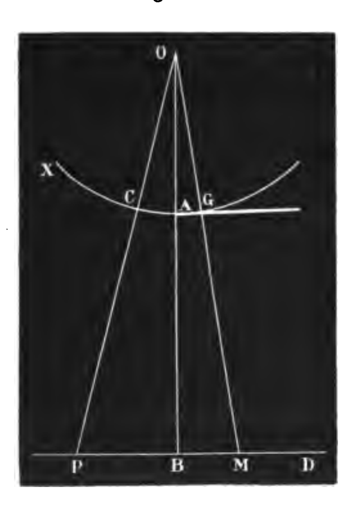
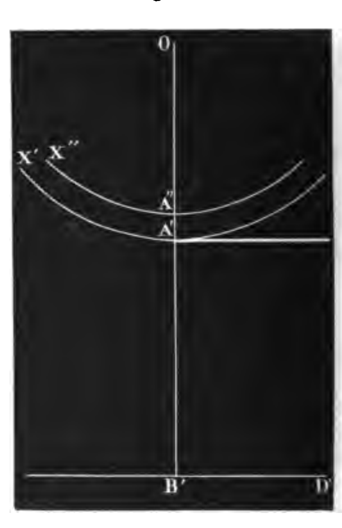


Fig. 74.



Längen der wirksamen Theile sämmtlicher Zweiecke als gleich gross angenommen werden. Handelt es sich also nur um die relativen Intensitäten längs des Durchschnittes BD der Ebene E und des Projectionsschirmes, so kann für die Kugelwelle die Kreiswelle AX substituirt werden.

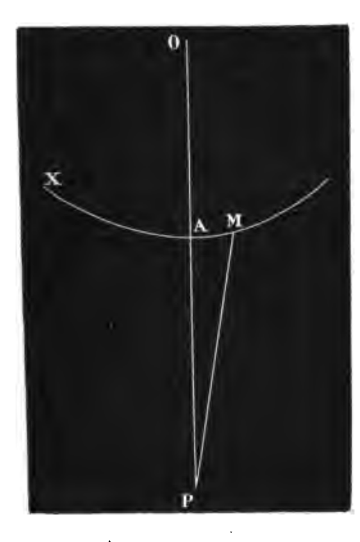
Sei $B'D' \parallel BD$ eine auf dem Projectionsschirme in sehr geringem Abstande von BD gelegene Gerade. Wir legen die Ebene $B'D'O$ und nehmen dieselbe zur Ebene der Figur 74. Diese Ebene schneidet die früher betrachtete sphärische Welle längs eines grössten Kreises $A''X''$. Um die relativen Intensitäten längs $B'D'$ zu erhalten, kann man an die Stelle der sphärischen Welle die Kreiswelle $A''X''$ oder die den Beugungsschirm berührende Kreiswelle $A'X'$ setzen. Da OA' nahe eben so gross ist wie OA, kann man schliessen, dass die Maxima und Minima auf $B'D'$ bezüglich des Punktes B' merklich dieselbe Lage haben wie die Maxima und Minima auf BD bezüglich des Punktes B. Die Maxima und Minima auf dem Projectionsschirme werden also Streifen

bilden, welche in der Nähe der Ebene E merklich geradlinig und dem Rande des Beugungsschirmes parallel verlaufen.

Hiernach genügt es, die Wirkung der Kreiswelle AX auf die verschiedenen Punkte der Geraden BD zu berechnen. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Lichtquelle ein Punkt oder eine den Rändern des Schirmes parallele Gerade ist.

Wir sind also darauf geführt, die Wirkung einer irgend begrenzten Kreiswelle auf einen äusseren Punkt ihrer Ebene zu berechnen. Sei AX (Fig. 75) die Kreiswelle, O der leuchtende Punkt, P der erleuchtete Punkt, A der Pol der Welle in Bezug auf P, und werde $OA = a$, $AP = b$ gesetzt. Ist auf der Welle AX die nach irgend einer Richtung genommene Composante der Vibrationsgeschwindigkeit $\sin 2\pi \frac{t}{T}$, so ertheilt das bei A liegende Element der Welle, ds, dem Punkte P parallel zu dieser Richtung eine Vibrationsgeschwindigkeit gleich

Fig. 75.



$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda}\right) \cdot ds$$

und ein bei M liegendes Element die Vibrationsgeschwindigkeit

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b+\delta}{\lambda}\right) \cdot ds,$$

wenn $MP = b + \delta$ gesetzt und auf die geringe Neigung des Strahles MP gegen die Welle und auf die Abnahme der Intensität in Folge des kleinen Wegzuwachses δ keine Rücksicht genommen wird.

Die Vibrationsgeschwindigkeit in P parallel zu der angenommenen Richtung ist also:

$$\int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b+\delta}{\lambda}\right) ds$$

und die Intensität:

$$I = \left(\int \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} ds\right)^2 + \left(\int \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} ds\right)^2.$$

Nimmt man die Geschwindigkeit nach einer anderen Richtung, so multiplicirt sich dieser Ausdruck mit einem für sämmtliche erleuchtete Punkte constanten Factor. Dieser Ausdruck gilt also auch für die Gesammtintensität der Vibrationsbewegung.

So lange wir nur Theile der Welle betrachten, welche sich nicht weit vom Pole entfernen, können wir für δ den in (60) gefundenen Werth setzen:

$$\delta = \frac{s^2 (a + b)}{2ab},$$

und erhalten

$$I = \left[\int \cos \pi \frac{(a + b) s^2}{ab\lambda} ds\right]^2 + \left[\int \sin \pi \frac{(a + b) s^2}{ab\lambda} ds\right]^2.$$

Wir wollen uns zunächst mit den in diesem Ausdrucke vorkommenden Integralen beschäftigen. Dieselben lassen sich nicht in endlicher Form berechnen. Sie besitzen jedoch die Eigenschaft, dass ihre zwischen o und s genommenen Werthe bei wachsender oberer Grenze sehr bald constant werden, so dass für nicht sehr kleine s näherungsweise:

$$\int_0^s = \int_0^\infty$$

gesetzt werden kann.

Um dies beispielsweise für das erste der beiden Integrale zu beweisen, bemerken wir, dass das Integral eine Fläche repräsentirt, welche zwischen der x-Axe und einer Curve enthalten ist, deren Gleichung

$$y = \cos \pi \frac{(a + b) x^2}{ab\lambda}$$

ist. Die Ordinaten dieser Curve schwanken zwischen -1 und $+1$, während die Entfernung zweier auf einander folgenden Durchschnitte der Curve mit der x-Axe bei wachsendem x abnimmt. Sind nämlich x und $x + h$ die Abscissen zweier auf einander folgenden Durchschnitte, so ist

$$\frac{\pi (a + b) x^2}{ab\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi (a + b) (x + h)^2}{ab\lambda} = (2n + 3) \frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{(a + b) (2hx + h^2)}{ab\lambda} = 1.$$

h nimmt also bei wachsendem x beständig an Grösse ab.

Die Gesammtfläche der Curve, welche das Integral, genommen zwischen den Grenzen 0 und ∞, repräsentirt, erscheint sonach als eine unendliche Reihe abwechselnd positiver und negativer Glieder von abnehmender absoluter Grösse. Vernachlässigt man die Glieder von einer bestimmten Stelle an, so wird das Resultat abwechselnd zu gross oder zu klein, je nachdem man bei einem ungeraden oder geraden Gliede stehen bleibt. Die vernachlässigte Summe ist immer kleiner als das

letzte, noch eingerechnete Glied. Der Rest der Reihe convergirt also gegen die Null.

Ist die obere Grenze des Integrals ein Werth von s, für welchen y nicht gleich Null ist, so liegt das Integral zwischen zwei Werthen, welche beide für das Gesammtintegral gesetzt werden können, so dass auch in diesem Falle der Rest vernachlässigt werden kann.

Kehren wir nun zu den Integralen selbst zurück. Setzen wir

$$\frac{\pi (a + b) s^2}{ab\lambda} = \frac{\pi}{2} v^2,$$

woraus folgt

$$s = v \sqrt{\frac{ab\lambda}{2 (a + b)}}$$

und

$$ds = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2 (a + b)}}\, dv,$$

so wird der Ausdruck für die Intensität

$$I = \frac{ab\lambda}{2 (a + b)} \left[\left(\int cos \frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2 + \left(\int sin \frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2\right].$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden zwei Integrale heissen die Fresnel'schen Integrale. Hat die obere Grenze dieser Integrale einen irgend beträchtlichen Werth, so kann man dieselben, wie wir gesehen haben, zwischen 0 und ∞ nehmen und erhält nach den bekannten Formeln

$$\int_0^\infty sin\, mx^2 dx = \int_0^\infty cos\, mx^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8m}}$$

das einfache Resultat

$$\int_0^\infty cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_0^\infty sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2}.$$

Ist die obere Grenze eine kleine Grösse, so lassen sich die Integrale nicht in endlicher Form geben und können nach Methoden bestimmt werden, welche in den nächsten Paragraphen aus einander gesetzt sind.

102. Berechnung der Integrale. Methode von Fresnel.

Der absolute Werth der Fresnel'schen Integrale bleibt, wenn die untere Grenze Null ist und die obere Grenze das Zeichen wechselt, ungeändert. Es genügt also, die Integration zwischen den Grenzen 0 und $+ v$ vorzunehmen. Nehmen wir an, der Werth eines der Integrale sei bekannt für die Grenzen 0 und i und suchen wir den Werth des Inte-

grals für die Grenzen i und $i + t$, wo t ein kleiner Bruchtheil der Einheit, z. B. 0,1, ist. Setzen wir zu diesem Zwecke

$$v = i + \frac{t}{2} + u,$$

wo u eine Variable ist, welche von $-\frac{t}{2}$ bis $+\frac{t}{2}$ wächst, so ist

$$\int_i^{i+t} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \cos\frac{\pi}{2}\left(i + \frac{t}{2} + u\right)^2 du.$$

Der absolute Werth von u ist stets kleiner als $\frac{t}{2}$, sein Quadrat kleiner als $\frac{t^2}{4}$. Wir vernachlässigen dieses Quadrat und erhalten

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \cos\frac{\pi}{2}\left[i^2 + it + \frac{t^2}{4} + 2\left(i + \frac{t}{2}\right)u\right] du$$

$$= \frac{1}{\pi\left(i + \frac{t}{2}\right)}\left\{\sin\frac{\pi}{2}\left[i^2 + it + \frac{t^2}{4} + 2\left(i + \frac{t}{2}\right)u\right]\right\}_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(i + \frac{t}{2}\right)}\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(i^2 + 2it + \frac{3t^2}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{2}\left(i^2 - \frac{t^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\left(i + \frac{t}{2}\right)}\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(i + \frac{t}{2}\right)\left(i + \frac{3t}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2}\left(i + \frac{t}{2}\right)\left(i - \frac{t}{2}\right)\right].$$

Eine analoge Rechnung giebt:

$$\int_i^{i+t} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv =$$

$$= \frac{1}{\pi\left(i + \frac{t}{2}\right)}\left[-\cos\frac{\pi}{2}\left(i + \frac{t}{2}\right)\left(i + \frac{3t}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}\left(i + \frac{t}{2}\right)\left(i - \frac{t}{2}\right)\right].$$

Nach diesen Formeln berechnete Fresnel seine Tafeln für $t = 0{,}1$. Setzt man $t = 0{,}1$ und i der Reihe nach $= 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3, \ldots$, so erhält man nach den obigen Formeln die Integrale

$$\int_0^{0,1},\ \int_{0,1}^{0,2},\ \int_{0,2}^{0,3}, \ldots\ldots$$

und durch Addition derselben die Integrale

$$\int_0^{0,1},\ \int_0^{0,2},\ \int_0^{0,3}, \ldots\ldots$$

Die so entworfenen Tafeln zeigen, wie jedes der beiden Integrale sich bei wachsender oberer Grenze rasch dem Werthe $\frac{1}{2}$ nähert, indem es um diesen Werth innerhalb zunehmend enger Grenzen oscillirt[1]).

Noch ausgedehntere Tafeln, nämlich für $t = 0{,}01$, rühren von Abria[2]) her. Für ein so kleines t kann nicht nur $\frac{t^2}{4}$, sondern auch t^2 selbst vernachlässigt werden, wodurch sich die Formeln vereinfachen.

Setzen wir

$$v = i + u,$$

so wird

$$\int_i^{i+t} \cos\frac{\pi}{2} v^2\, dv = \int_0^t \cos\frac{\pi}{2}(i+u)^2\, du$$

$$= \int_0^t \cos\frac{\pi}{2}(i^2 + 2iu)\, du,$$

also

$$\int_i^{i+t} \cos\frac{\pi}{2} v^2\, dv = \frac{1}{\pi i}\left[\sin\frac{\pi}{2} i(i+2t) - \sin\frac{\pi}{2} i^2\right].$$

Ebenso findet man

$$\int_t^{i+t} \sin\frac{\pi}{2} v^2\, dv = \frac{1}{\pi i}\left[-\cos\frac{\pi}{2} i(i+2t) + \cos\frac{\pi}{2} i^2\right].$$

Die in diesem Capitel auseinander gesetzte Methode der Berechnung der Integrale leidet an dem Uebelstande, dass die den Partialberechnungen anhaftenden Fehler sich addiren und das schliessliche Resultat ungenau machen.

Die folgende Tafel enthält die numerischen Werthe der Fresnel'schen Integrale, während die darauffolgende Figur (Fig. 76, S. 241) den Verlauf der Integrale durch Curven versinnlicht.

---

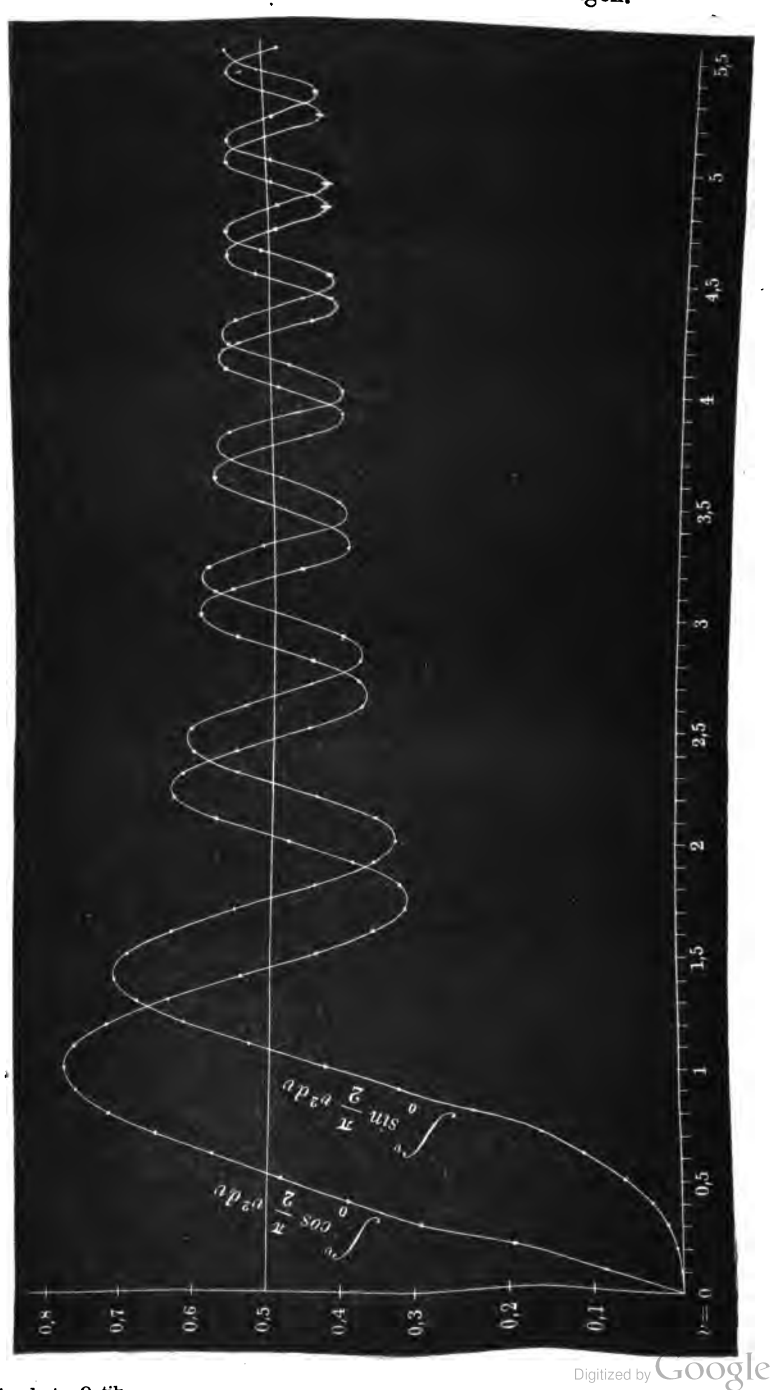
1) *OEuvres complètes*, I. — 2) *Journ. de Liouville*, IV, 248.

Tafel der numerischen Werthe der Integrale

$$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv \text{ und } \int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv.$$

Integrations-Grenze	$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2dv$	$\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2dv$	Integrations-Grenze	$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2dv$	$\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2dv$
Von $v =$ 0			Von $v =$ 0		
bis $v =$ 0,1	0,0999	0,0006	bis $v =$ 2,9	0,5627	0,4098
0,2	0,1999	0,0042	3,0	0,6061	0,4959
0,3	0,2993	0,0140	3,1	0,5621	0,5815
0,4	0,3974	0,0332	3,2	0,4668	0,5931
0,5	0,4923	0,0644	3,3	0,4061	0,5191
0,6	0,5811	0,1101	3,4	0,4388	0,4294
0,7	0,6597	0,1716	3,5	0,5328	0,4149
0,8	0,7230	0,2487	3,6	0,5883	0,4919
0,9	0,7651	0,3391	3,7	0,5424	0,5746
1,0	0,7803	0,4376	3,8	0,4485	0,5654
1,1	0,7643	0,5359	3,9	0,4226	0,4750
1,2	0,7161	0,6229	4,0	0,4986	0,4202
1,3	0,6393	0,6859	4,1	0,5739	0,4754
1,4	0,5439	0,7132	4,2	0,5420	0,5628
1,5	0,4461	0,6973	4,3	0,4497	0,5537
1,6	0,3662	0,6388	4,4	0,4385	0,4620
1,7	0,3245	0,5492	4,5	0,5261	0,4339
1,8	0,3342	0,4509	4,6	0,5674	0,5158
1,9	3,3949	0,3732	4,7	0,4917	0,5668
2,0	0,4886	0,3432	4,8	0,4340	0,4965
2,1	0,5819	0,3739	4,9	0,5003	0,4347
2,2	0,6367	0,4553	5,0	0,5638	0,4987
2,3	0,6271	0,5528	5,1	0,5000	0,5620
2,4	0,5556	0,6194	5,2	0,4390	0,4966
2,5	0,4581	0,6190	5,3	0,5078	0,4401
2,6	0,3895	0,5499	5,4	0,5573	0,5136
2,7	0,3929	0,4528	5,5	0,4785	0,5533
2,8	0,4678	0,3913.	bis $v = \infty$	0,5	0,5

Fig. 76.


0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
v = 0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
$\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$
$\int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$

103. Methode von Knochenhauer.

Knochenhauer[1]) entwickelte die Fresnel'schen Integrale in Reihen, welche wenig convergent und nur bei geringen Werthen der oberen Grenzen der Integrale anwendbar sind. Eine partielle Integration giebt

$$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = v\cos\frac{\pi}{2}v^2 + \pi\int_0^v v^2 \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv,$$

$$\int_0^v v^2 \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{v^3}{3}\sin\frac{\pi}{2}v^2 - \frac{\pi}{3}\int_0^v v^4\cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv,$$

$$\int_0^v v^4 \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{v^5}{5}\cos\frac{\pi}{2}v^2 + \frac{\pi}{5}\int_0^v v^6\sin\frac{\pi}{2}v^2 dv,$$

$$\int_0^v v^6 \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{v^7}{7}\sin\frac{\pi}{2}v^2 - \frac{\pi}{7}\int_0^v v^8\cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und eine successive Substitution:

$$\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = \cos\frac{\pi}{2}v^2\left(\frac{v}{1} - \frac{\pi^2 v^5}{1.3.5} + \frac{\pi^4 v^9}{1.3.5.7.9} - \cdots\right)$$

$$+ \sin\frac{\pi}{2}v^2\left(\frac{\pi v^3}{1.3} - \frac{\pi^3 v^7}{1.3.5.7} + \frac{\pi^5 v^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \cdots\right) + R.$$

Der Rest R ist gleich

$$\frac{\pi^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^v v^{2n}\cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$$

oder gleich

$$\frac{\pi^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^v v^{2n}\sin\frac{\pi}{2}v^2 dv,$$

je nachdem die Ordnungszahl n des Gliedes, bei welchem man stehen bleibt, gerade oder ungerade ist. Es ist leicht, zu zeigen, dass der Rest R

[1]) Die Undulationstheorie des Lichtes, Berlin 1839, S. 36.

sich bei wachsendem n der Null nähert. Setzt man nämlich in den Integralen

$$\int_0^v v^{2n} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

und

$$\int_0^v v^{2n} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

für

$$\sin \frac{\pi}{2} v^2 \text{ und } \cos \frac{\pi}{2} v^2$$

die Einheit, wodurch dieselben vergrössert werden und den Werth $\frac{v^{2n+1}}{2n+1}$ annehmen, so hat man

$$R < \frac{\pi^n}{1.3.5\ldots.(2n-1)} \cdot \frac{v^{2n+1}}{2n+1}$$

und die Grösse rechts nähert sich bei wachsendem n der Null.

Das Integral $\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$ kann also durch die Summe zweier convergenter Reihen dargestellt werden. Bezeichnen wir diese durch M und N, d. i.

$$M = \frac{v}{1} - \frac{\pi^2 v^5}{1.3.5} + \frac{\pi^4 v^9}{1.3.5.7.9} - \cdots$$

$$N = \frac{\pi v^3}{1.3} - \frac{\pi^3 v^7}{1.3.5.7} + \frac{\pi^5 v^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \cdots$$

und setzen wir der Kürze wegen

$$\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = C,$$

$$\int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = S,$$

so haben wir schliesslich:

$$\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2\, dv = C = M \cos \frac{\pi}{2} v^2 + N \sin \frac{\pi}{2} v^2$$

$$\int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2\, dv = S = M \sin \frac{\pi}{2} v^2 - N \cos \frac{\pi}{2} v^2.$$

Die Reihen M und N sind zwar für jedes v convergent; die Convergenz ist aber nur für kleine v eine hinreichende.

Man erhält schliesslich durch Differentiation die folgenden nützlichen Relationen

$$\frac{dM}{dv} = 1 - \pi v N$$

$$\frac{dN}{dv} = \pi v M.$$

104. Methode von Cauchy.

Es ist

$$\int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_v^\infty \pi v \cos\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi v} = \left(\frac{1}{\pi v} \sin\frac{\pi}{2} v^2\right)_v^\infty + \\ + \int_v^\infty \sin\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi v^2},$$

$$\int_v^\infty \sin\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi v^2} = -\left(\frac{1}{\pi^2 v^3} \cos\frac{\pi}{2} v^2\right)_v^\infty - 3\int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi^2 v^4},$$

$$\int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2} \frac{dv}{\pi^2 v^4} = \left(\frac{1}{\pi^3 v^5} \sin\frac{\pi}{2} v^2\right)_v^\infty + 5\int_v^\infty \sin\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi^3 v^6},$$

. . . .

und man erhält durch Substitution:

$$\int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv = \cos\frac{\pi}{2} v^2 \left(\frac{1}{\pi^2 v^3} - \frac{1.3.5}{\pi^4 v^7} + \frac{1.3.5.7.9}{\pi^6 v^{11}} - \cdots\right) + \\ + \sin\frac{\pi}{2} v^2 \left(-\frac{1}{\pi v} + \frac{1.3}{\pi^3 v^5} - \frac{1.3.5.7}{\pi^5 v^9} + \cdots\right) + R.$$

Der Rest R ist gleich

$$+ 1.3.5\ldots(2n-1)\int_v^\infty \sin\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi^n v^{2n}}$$

oder gleich

$$- 1.3.5\ldots(2n-1)\int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2} v^2 \frac{dv}{\pi^n v^{2n}},$$

je nachdem die Ordnungszahl des Gliedes, bei welchem man stehen bleibt, gerade oder ungerade ist. Ersetzt man in den beiden letzten Integralen den Sinus und den Cosinus durch die Einheit, so vergrössert man die Integrale; die absolute Grösse des Restes ist daher kleiner, als

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{\pi^n v^{2n-1}}.$$

Dieser Bruch wird sehr klein, wenn v sehr gross und zugleich n eine

kleine Zahl ist. In diesem Falle sind also die Reihen Cauchy's brauchbar, d. h. während die Reihen Knochenhauer's für kleine Werthe von v brauchbar sind, sind es die von Cauchy für grosse Werth von v[1]).

Wir setzen

$$P = \frac{1}{\pi v} - \frac{1.3}{\pi^3 v^5} + \frac{1.3.5.7}{\pi^5 v^9} \cdots$$

$$Q = \frac{1}{\pi^2 v^3} - \frac{1.3.5}{\pi^4 v^7} + \frac{1.3.5.7.9}{\pi^6 v^{11}} \cdots$$

und erhalten

$$\int_v^\infty \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = - P \sin \frac{\pi}{2} v^2 + Q \cos \frac{\pi}{2} v^2 + R$$

$$\int_v^\infty \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = P \cos \frac{\pi}{2} v^2 + Q \sin \frac{\pi}{2} v^2 + R'.$$

Da ferner

$$\int_v^\infty \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv - \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} - C$$

$$\int_v^\infty \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_0^\infty \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv - \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} - S,$$

so haben wir schliesslich

$$C = \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} + P \sin \frac{\pi}{2} v^2 - Q \cos \frac{\pi}{2} v^2 - R$$

$$S = \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} - P \cos \frac{\pi}{2} v^2 - Q \sin \frac{\pi}{2} v^2 - R'.$$

Auch ergeben sich leicht die folgenden Relationen:

$$\frac{dP}{dv} = - \pi v Q$$

$$\frac{dQ}{dv} = \pi v P - 1.$$

105. Methode von Gilbert.

Gilbert[2]) führte die Fresnel'schen Integrale auf jene Euler'schen Integrale zurück, welche durch Γ bezeichnet werden.

Betrachten wir zunächst das Integral C oder $\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$ und setzen

---

[1]) C. R. XV, 573. — [2]) Preisschriften der Brüsseler Akademie, XXXI, 1.

$$\frac{\pi}{2} v^2 = u,$$

so wird

$$v = \sqrt{\frac{2u}{\pi}}$$

$$dv = \frac{\delta u}{\sqrt{2\pi u}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Es ist ferner

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

und wenn

$$z^2 = ux$$

gesetzt und u als constant betrachtet wird,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ux} dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ux} dx}{\sqrt{x}}.$$

Dies in den für C gefundenen Ausdruck gesetzt giebt:

$$C = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{\cos u}{\sqrt{\pi}}\, du \int_0^\infty \frac{e^{-ux} dx}{\sqrt{x}},$$

oder, wenn die Folge der Integrale geändert wird,

$$C = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^u e^{-ux} \cos u\, du.$$

Es ist weiter

$$\int_0^u e^{-ux} \cos u\, du = e^{-ux} \sin u + x \int_0^u e^{-ux} \sin u\, du,$$

$$\int_0^u e^{-ux} \sin u\, du = 1 - e^{-ux} \cos u - x \int_0^u e^{-ux} \cos u\, du,$$

also

$$\int_0^u e^{-ux} \cos u\, du = \frac{x}{1+x^2} - \frac{e^{-ux}(x \cos u - \sin u)}{1+x^2},$$

und das Integral C nimmt sonach die Form an

$$C = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} - \cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux}\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} + \sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux}\,dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\right].$$

Um das erste Integral in der Klammer zu berechnen, setzen wir

$$x = z^2$$

und erhalten

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2z^2\,dz}{1+z^4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left(\frac{z}{z^2-\sqrt{2}z+1} - \frac{z}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right)dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\left(L\,\frac{z^2-\sqrt{2}z+1}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right)_0^\infty + \Big[\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}z-1\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}z+1\right)\Big]_0^\infty\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Setzen wir schliesslich

$$G = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-ux}\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$$

$$H = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-ux}\,dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

so wird

$$C = \int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{1}{2} - G\cos u + H\sin u,$$

und man findet durch eine analoge Rechnung

$$S = \int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{1}{2} - G\sin u - H\cos u.$$

Vergleichen wir diese Formeln mit den von Cauchy aufgestellten, so sehen wir, dass in dem Falle, wo die Reste R und R' der Cauchy'schen Reihen zu vernachlässigen sind,

$$P = H,\; Q = G.$$

Die Cauchy'schen Reihen können also dazu dienen, die Integrale G und H zu berechnen, wenn u gross ist.

Ist u klein, so können die Knochenhauer'schen Reihen zur Berechnung der Integrale G und H benutzt werden. Gilbert's Formeln geben nämlich:

$$G = \frac{1}{2}(\cos u + \sin u) - C \cos u - S \sin u$$

$$H = \frac{1}{2}(\cos u - \sin u) + C \sin u - S \cos u,$$

und Knochenhauer's Formeln:

$$C = M \cos u + N \sin u$$
$$S = - N \cos u + M \sin u,$$

woraus folgt:

$$G = \frac{1}{2}(\cos u + \sin u) - M$$

$$H = \frac{1}{2}(\cos u - \sin u) + N.$$

Die Integrale G und H können also mit Hülfe der Reihen M und N berechnet werden, wenn diese Reihen hinreichend convergent sind, d. i. für kleine u.

Die Integrale G und H besitzen eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Ist u gleich Null, so wird

$$G = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}, \quad H = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)},$$

daher ist nach den bekannten Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

für u gleich Null:

$$G = H = \frac{1}{2}.$$

Die Grösse u ist stets positiv; lässt man dieselbe von der Null an wachsen, so nimmt die Grösse e^{-ux} rasch ab und ebenso die einzelnen Elemente der Integrale G und H. Es folgt, dass diese Integrale rasch und continuirlich abnehmen, wenn man der Grösse u wachsende positive Werthe ertheilt und dass sie sich bei unbeschränkt wachsendem u der Null nähern. Diese Eigenschaft der Integrale G und H erweist sich bei der Discussion der Probleme der Beugung als sehr nützlich und bedingt einen Vorzug der Gilbert'schen Methode.

106. Beugung an dem geradlinigen Rande eines Schirmes.

Wir wollen die eben entwickelten Theorien auf einige besondere Fälle anwenden. Setzen wir fürs erste einen Schirm voraus, welcher einerseits unendlich ausgedehnt, andererseits von einer unendlich langen geraden Linie begrenzt ist. Sei O (Fig. 73) die punktförmige Lichtquelle, $XCAG$ eine von O kommende, den Rand des Schirmes berührende Wellenfläche. Wir legen durch O eine Ebene, welche den Rand des Schirmes senkrecht durchschneidet. Dieselbe geht durch den Berührungspunkt A der Welle und des Schirmes und schneidet die Welle längs eines grössten Kreises AX. Nach den Betrachtungen, welche wir in (101) angestellt haben, genügt es, die Variationen der Intensität längs einer Geraden BD zu bestimmen, welche in jener Ebene liegt und auf OA senkrecht steht. Die Resultate, zu welchen wir gelangen werden, haben auch für den Fall Gültigkeit, wo die Lichtquelle eine zum Rande des Schirmes parallele Lichtlinie ist.

Projicirt man das Phänomen auf einen wenig entfernten Schirm oder betrachtet man dasselbe vermittelst einer Lupe, so zeigt sich:

1. Der optische Schatten des Schirmes ist auf der Geraden BD nicht durch den Punkt B begrenzt, wie der geometrische Schatten, vielmehr erstreckt sich der erhellte Theil von PD merklich weit in das Innere des geometrischen Schattens und zwar nimmt die Intensität vom Punkte B an rasch und continuirlich ab, ohne Maxima und Minima zu zeigen.

2. Ausserhalb des geometrischen Schattens zeigen sich Maxima und Minima der Intensität, und zwar bei homogenem Lichte eine Reihe abwechselnd heller und dunkler Streifen, bei weissem Lichte farbige Streifen. Die Minima sind nicht völlig dunkel und der Intensitätsunterschied zwischen einem Maximum und dem auf dasselbe folgende Minimum nimmt mit der Entfernung von der Schattengrenze rasch ab, so dass schon in geringer Entfernung von B eine gleichmässige Helligkeit wahrgenommen wird.

Wir wollen zunächst eine elementare, von Fresnel herrührende Theorie dieser Erscheinungen geben.

Nach (101) genügt es, die Wirkung der Kreiswelle AX auf die verschiedenen Punkte der Geraden PD in Betracht zu ziehen. Auf den Punkt B wirkt die Halbwelle AX; die Vibrationsgeschwindigkeit in diesem Punkte beträgt also die Hälfte der vollen Vibrationsgeschwindigkeit und folglich die Intensität in B den vierten Theil der Intensität, welche in diesem Punkte bei Hinweglassung des Schirmes wahrgenommen würde.

Betrachten wir nun einen Punkt M im Innern des geometrischen Schattens. Der wirksame Theil AX der Kreiswelle, von welcher wir die Elementarstrahlen ausgehen lassen, beginnt bei dem Punkte A, welcher um so weiter von dem Pole G des Punktes M entfernt ist, je weiter dieser Punkt selbst von der Schattengrenze absteht. Wenn wir AX von A aus in Elementarbogen theilen, so ist die von AX auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit ein Bruchtheil der von dem ersten, bei A anfangenden Elementarbogen auf M übertragenen Vibrationsgeschwindigkeit (60). In dem Maasse nun, als sich M von B entfernt, wächst die Distanz zwischen A und G und nimmt die Länge des ersten Elementarbogens rasch ab (60); zudem wird der echte Bruch, mit welchem die diesem Bogen entsprechende Vibrationsgeschwindigkeit zu multipliciren ist, ebenfalls immer kleiner und nähert sich der Grenze $\frac{1}{2}$. Aus diesen beiden Gründen muss die Intensität in M rasch und continuirlich abnehmen, wenn sich dieser Punkt von der Schattengrenze aus nach dem Innern des geometrischen Schattens bewegt, und in geringer Distanz unmerklich werden.

Betrachten wir nun einen Punkt P ausserhalb des geometrischen Schattens und sei C der Pol dieses Punktes. Auf P wirkt die Halbwelle CX und überdies der Theil CA der anderen Halbwelle. Die von CX auf P übertragene Vibrationsgeschwindigkeit kann als constant angesehen werden, die von CA herrührende ist variabel und hängt von der Zahl der Elementarbogen ab, welche AC enthält. Bezeichnen wir durch α, α', α'' ... vom Pole an gerechnet die von den einzelnen Elementarbogen herrührenden Vibrationsgeschwindigkeiten, und nehmen wir die von CX herrührende Vibrationsgeschwindigkeit als Einheit an, so ist

$$\alpha - \alpha' + \alpha'' - \alpha''' + \cdots = 1$$

und, da

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \cdots,$$

auch

$$\alpha > 1 \qquad \alpha - \alpha' < 1$$
$$\alpha - \alpha' + \alpha'' > 1 \qquad \alpha - \alpha' + \alpha'' - \alpha''' < 1$$

. . . .

Die Summe der Reihe ist also grösser oder kleiner als Eins, je nachdem die Zahl der Glieder ungerade oder gerade ist. Dies vorausgesetzt, nehmen wir auf BD ausserhalb des geometrischen Schattens eine Reihe Punkte P, P', P'' ... in solcher Lage an, dass

$$PA - PC = \frac{\lambda}{2}$$

$$P'A - P'C' = \frac{2\lambda}{2}$$

$$P''A - P''C'' = \frac{3\lambda}{2}$$

. . . .

Die auf diese Punkte übertragenen Vibrationsgeschwindigkeiten werden sein

$$v = 1 + \alpha$$
$$v' = 1 + \alpha - \alpha'$$
$$v'' = 1 + \alpha - \alpha' + \alpha''$$

. . . .

Dieselben sind abwechselnd grösser und kleiner als die der ganzen Welle entsprechende Vibrationsgeschwindigkeit, welche gleich 2 ist. Es existirt also auf BD ausserhalb des geometrischen Schattens eine Reihe von Punkten, deren Intensität abwechselnd grösser und kleiner ist, als die der Abwesenheit des Schirmes entsprechende Intensität, also eine Reihe Maxima und Minima der Intensität. Man sieht auch, dass die Differenz zwischen einem Maximum und dem folgenden Minimum rasch an Grösse abnimmt, wenn man sich von der Grenze des geometrischen Schattens entfernt.

107. Berechnung nach der Methode Fresnel's.

Wir bezeichnen den Radius OA (Fig. 73) der Welle durch a, die Entfernung AB durch b. Die Entfernung MG eines Punktes M im Inneren des geometrischen Schattens von seinem Pole G ist eine Function der Lage des Punktes M. Da jedoch das Phänomen ganz in der Nähe der Schattengrenze liegt, können wir MG der constanten Grösse b gleichsetzen. Dies vorausgesetzt erhalten wir für die Intensität eines Punktes M im Innern des geometrischen Schattens (101)

$$I = \left[\int_S^\infty \cos \frac{\pi\,(a+b)\,s^2}{ab\lambda}\,ds\right]^2 + \left[\int_S^\infty \sin \frac{\pi\,(a+b)\,s^2}{ab\lambda}\,ds\right]^2.$$

Hier bedeutet S die Länge des Bogens AG. Wir setzen

$$\frac{\pi}{2}\,v^2 = \frac{\pi\,(a+b)\,s^2}{ab\lambda}.$$

Hierdurch wird

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int_V^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv\right)^2 + \left(\int_V^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv\right)^2\right],$$

wenn

$$V = \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}\cdot S.$$

Ehe wir den für die Intensität gefundenen Ausdruck weiter betrachten, setzen wir $BM = x$, identificiren den Bogen AG mit seiner Tangente und haben:

$$\frac{x}{S} = \frac{a+b}{a}$$

$$x = \frac{a+b}{a}S = \sqrt{\frac{(a+b)\,b\lambda}{2a}}\cdot V.$$

Nun setzen wir

$$\int_0^V \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = C_V$$

$$\int_0^V \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = S_V$$

und bemerken, dass (102)

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{1}{2}.$$

Hierdurch wird

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\frac{1}{2}-C_V\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-S_V\right)^2\right].$$

Es handelt sich nun um die Abhängigkeit der Grösse

$$\left(\frac{1}{2}-C_V\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-S_V\right)^2$$

von V, respective S oder x. Fresnel berechnete die Werthe dieser Function für

$$V = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,$$

nach der in (102) angegebenen Methode und fand, dass die Werthe der in Rede stehenden Function rasch abnehmen und für irgend beträchtliche V verschwinden. Das Abhandensein von Maximis und Minimis im Inneren des geometrischen Schattens kann jedoch auf diesem Wege nicht mit aller Strenge nachgewiesen werden.

Für einen ausserhalb des geometrischen Schattens liegenden Punkt ist die Intensität

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int_{-\infty}^V \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^V \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv\right)^2\right]$$

$$= \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\frac{1}{2}+C_V\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+S_V\right)^2\right].$$

Die Function, um welche es sich hier handelt, ist

$$\left(\frac{1}{2} + C_V\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S_V\right)^2.$$

Die Werthe dieser Function ergeben sich aus Fresnel's Tafeln für

$$V = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ \ldots$$

Es zeigt sich, dass die Intensität durch eine Reihe Maxima und Minima geht und es ist immer möglich, zwei um 0,1 differirende Zahlen anzugeben, zwischen welchen ein Werth von V liegt, welcher einem Maximum oder Minimum von bestimmter Ordnungszahl entspricht. Doch lassen sich diese Werthe auch leicht genauer berechnen.

Seien i und $i + 0{,}1$ die beiden Zahlen, zwischen welchen der gesuchte Werth von V liegt, $i + t$ dieser Werth selbst. Um t zu finden, muss man das Maximum oder Minimum des folgenden Ausdruckes suchen

$$\left(\frac{1}{2} + C_i + \int_i^{i+t} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S_i + \int_i^{i+t} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv\right).$$

Indem wir die Integrationen nach (102) ausführen, erhalten wir für den letzten Ausdruck

$$\left\{\frac{1}{2} + C_i + \frac{1}{\pi i}\left[\sin\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) - \sin\frac{\pi}{2} i^2\right]\right\}^2 + $$
$$+ \left\{\frac{1}{2} + S_i + \frac{1}{\pi i}\left[-\cos\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) + \cos\frac{\pi}{2} i^2\right]\right\}^2.$$

Um das Maximum oder Minimum desselben zu finden, setzen wir den nach t genommenen Differentialquotienten der Null gleich:

$$\left\{\frac{1}{2} + C_i + \frac{1}{\pi i}\left[\sin\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) - \sin\frac{\pi}{2} i^2\right]\right\} \cos\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it)$$
$$+ \left\{\frac{1}{2} + S_i + \frac{1}{\pi i}\left[-\cos\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos\frac{\pi}{2} i^2\right]\right\} \sin\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) = 0,$$

und erhalten weiter

$$\left(\frac{1}{2} + C_i - \frac{1}{\pi i}\sin\frac{\pi}{2} i^2\right)\cos\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} + S_i + \frac{1}{\pi i}\cos\frac{\pi}{2} i^2\right)\sin\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) = 0,$$

oder

$$\tang\frac{\pi}{2}(i^2 + 2\,it) = -\frac{\frac{1}{2} + C_i - \frac{1}{\pi i}\sin\frac{\pi}{2} i^2}{\frac{1}{2} + S_i + \frac{1}{\pi i}\cos\frac{\pi}{2} i^2}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die den Maximis und Minimis der Intensität entsprechenden Werthe von V genauer berechnen und, wenn a, b und λ gegeben sind, auch die entsprechenden Werthe von x.

Um die Ergebnisse der Rechnung mit jenen des Experimentes vergleichen zu können, muss man die Entfernungen der Streifen von der Grenze des geometrischen Schattens messen. Da diese Grenze jedoch keine physikalisch gegebene Linie ist, so ergiebt sich hieraus eine kleine experimentelle Schwierigkeit, welche Fresnel zu der folgenden Versuchsanordnung veranlasste. Er benutzte zwei Schirme mit geradlinigen und parallel gestellten Rändern, welche eine Spaltöffnung bildeten, deren Breite so gross war, dass die durch die beiden Schirme hervorgebrachten Streifensysteme sich gegenseitig nicht störten. Er maass die gegenseitige Distanz zweier homologer Streifen der beiden Systeme, und indem er diese Distanz von derjenigen der beiden geometrischen Schattengrenzen abzog, hatte er das Doppelte der Entfernung eines Streifens von der entsprechenden geometrischen Schattengrenze. Die gegenseitige Entfernung der beiden geometrischen Schattengrenzen erhielt er durch Abmessung der Breite der durch die beiden Schirme gebildeten Spalte.

Die Formeln, welche wir abgeleitet haben, gestatten nicht nur die Lage, sondern auch die Grösse der Maxima und Minima der Intensität zu berechnen. Man findet, dass die Differenz zwischen einem Maximum und einem folgenden Minimum rasch abnimmt, wenn man sich von der Schattengrenze entfernt. Hieraus erklärt sich, warum die Streifen nur innerhalb eines beschränkten Raumes wahrgenommen werden.

Wir wollen schliesslich das Phänomen in verschiedenen Entfernungen vom beugenden Schirme betrachten. Ist x die Entfernung irgend eines Streifens von der Schattengrenze, so haben wir, wie oben gezeigt wurde,

$$x = \sqrt{\frac{(a + b)\, b\lambda}{2a}} \cdot V.$$

Aendert sich nun b und hält man einen bestimmten Streifen fest, so ändert sich offenbar x, während V constant bleibt. Nimmt man also A zum Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystems und AB zur y-Axe, so ist die Gleichung der Curve, welche von dem Durchschnitte eines bestimmten Streifens mit der Ebene xy gebildet wird, während sich b verändert:

$$x = \sqrt{\frac{(a + y)\, y\lambda}{2a}} \cdot V$$

oder

$$2ax^2 - V^2\lambda y^2 - aV^2\lambda y = 0.$$

Diese Gleichung gehört einer Hyperbel an, deren Scheitelpunkte O und A sind.

108. Berechnung nach der Methode Cauchy's.

Die Anwendung der Methode Cauchy's auf unseren Fall führt zu präciseren Resultaten. Wir betrachten zunächst einen Punkt im Innern des geometrischen Schattens.

Wir haben (107)

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\frac{1}{2} - C_V\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S_V\right)^2\right].$$

Um die Maxima und Minima dieses Ausdruckes zu finden, differenziren wir denselben und erhalten

$$\left(\frac{1}{2} - C_V\right)\frac{dC}{dV} + \left(\frac{1}{2} - S_V\right)\frac{\delta S}{\delta V} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - C_V\right)\cos\frac{\pi}{2}V^2 + \left(\frac{1}{2} - S_V\right)\sin\frac{\pi}{2}V^2 = 0$$

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}V^2 = \frac{C_V - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - S_V}.$$

Ist V beträchtlich, z. B. grösser als 3, so können die Reste der Cauchy'schen Reihen vernachlässigt werden (104) und wir haben

$$C_V = \frac{1}{2} + P\sin\frac{\pi}{2}V^2 - Q\cos\frac{\pi}{2}V^2$$

$$S_V = \frac{1}{2} - P\cos\frac{\pi}{2}V^2 - Q\sin\frac{\pi}{2}V^2.$$

Unter dieser Voraussetzung also wird die obige Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}V^2 = \frac{P\sin\frac{\pi}{2}V^2 - Q\cos\frac{\pi}{2}V^2}{P\cos\frac{\pi}{2}V^2 + Q\sin\frac{\pi}{2}V^2}$$

oder

$$Q = 0.$$

Setzen wir für Q seinen Werth, so erhalten wir als Bedingungsgleichung für die Maxima und Minima der Intensität:

$$Q = \frac{1}{\pi^2 V^3} - \frac{1.3.5}{\pi^4 V^7} + \frac{1.3.5.7.9}{\pi^6 V^{11}} \cdots = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung $V > 3$ liegt dieser Ausdruck zwischen

$$\frac{1}{\pi^2 V^3} \text{ und } \frac{1}{\pi^2 V^3} - \frac{1.3.5}{\pi^4 V^7},$$

d. i. zwischen zwei positiven Grössen und die Gleichung

$$Q = 0$$

hat keine Auflösung. Es ist also bewiesen, dass innerhalb des geometrischen Schattens in Entfernungen von der Schattengrenze, für welche $V > 3$, keine Maxima und Minima existiren. Für Punkte, welche der Schattengrenze näher liegen, ist eine numerische Discussion nothwendig, welche, wie diejenige Fresnel's, nicht vollkommen strenge sein kann.

Ist V etwas beträchtlich, so wird der Ausdruck für die Intensität sehr einfach.

Wir haben in diesem Falle für einen Punkt innerhalb des geometrischen Schattens

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(P \sin\frac{\pi}{2}V^2 - Q\cos\frac{\pi}{2}V^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left(P\cos\frac{\pi}{2}V^2 + Q\sin\frac{\pi}{2}V^2\right)^2\right]$$

oder

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}(P^2 + Q^2),$$

und wenn die Glieder, in welchen V im Nenner in einer höheren als der zweiten Potenz vorkommt, vernachlässigt werden,

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)} \cdot \frac{1}{\pi^2 V^2}.$$

Da V der Entfernung des erleuchteten Punktes von der Schattengrenze proportional ist (107), so folgt, dass im Innern des Schattens und in einiger Entfernung von der Schattengrenze die Intensität merklich mit dem Quadrate der Entfernung von der Schattengrenze abnimmt.

Wir betrachten nun einen Punkt ausserhalb des geometrischen Schattens. Wir haben in diesem Falle für die Maxima und Minima der Intensität:

$$tang\,\frac{\pi}{2}V^2 = \frac{\frac{1}{2} + C_V}{\frac{1}{2} + S_V} = \frac{1 + P\sin\frac{\pi}{2}V^2 - Q\cos\frac{\pi}{2}V^2}{P\cos\frac{\pi}{2}V^2 + Q\sin\frac{\pi}{2}V^2 - 1},$$

oder

$$\sin\frac{\pi}{2}V^2 + \cos\frac{\pi}{2}V^2 = Q.$$

Wir nehmen wie früher an, dass V einen etwas beträchtlichen Werth habe. Dann ist Q sehr klein, da stets

$$Q < \frac{1}{\pi^2 V^3},$$

und wir haben angenähert

$$sin \frac{\pi}{2} V^2 + cos \frac{\pi}{2} V^2 = 0$$

oder

$$tang \frac{\pi}{2} V^2 = -1.$$

Durch diese Gleichung ist die Lage der Maxima und Minima ausserhalb des geometrischen Schattens für beträchtlichere Werthe von V gegeben. Für die entsprechenden Intensitäten haben wir

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(1 + P\, sin \frac{\pi}{2} V^2 - Q\, cos \frac{\pi}{2} V^2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - P\, cos \frac{\pi}{2} V^2 - Q\, sin \frac{\pi}{2} V^2\right)^2\right]$$
$$= \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[2 + P^2 + Q^2 + 2P\left(sin \frac{\pi}{2} V^2 - cos \frac{\pi}{2} V^2\right) - \right.$$
$$\left. - 2Q\left(sin \frac{\pi}{2} V^2 + cos \frac{\pi}{2} V^2\right)\right]$$

oder, da unter der gemachten Voraussetzung Q als sehr klein gegen P angesehen werden und die Reihe P selbst auf das erste Glied reducirt werden kann,

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[2 + \frac{1}{\pi^2 V^2} + \frac{2}{\pi V}\left(sin \frac{\pi}{2} V^2 - cos \frac{\pi}{2} V^2\right)\right].$$

Wir kehren zu der für die Lage der Maxima und Minima gefundenen Gleichung

$$tang \frac{\pi}{2} V^2 = -1$$

zurück. Dieselbe giebt zwei Reihen von Auflösungen, entsprechend den Gleichungen

$$\frac{\pi}{2} V^2 = 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

und

$$\frac{\pi}{2} V^2 = 2n\pi + \frac{7\pi}{4}.$$

Wir sehen auch leicht, dass die erste Reihe den Maximis, die zweite den Minimis entspricht und bemerken noch, dass aus der ersten Gleichung folgt:

$$sin \frac{\pi}{2} V^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad cos \frac{\pi}{2} V^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

und aus der zweiten:

$$\sin \frac{\pi}{2} V^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{2} V^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir bezeichnen durch V_1 und V_2 die Werthe von V, welche einem Maximum und einem darauffolgenden Minimum entsprechen, durch I_1 und I_2 die entsprechenden Intensitäten. Es ist dann:

$$I_1 = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left(2 + \frac{1}{\pi^2 V_1^2} + \frac{4}{\pi V_1 \sqrt{2}}\right)$$

und

$$I_2 = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left(2 + \frac{1}{\pi^2 V_2^2} - \frac{4}{\pi V_2 \sqrt{2}}\right).$$

Indem wir die Glieder, welche V in der zweiten Potenz im Nenner enthalten, vernachlässigen, erhalten wir:

$$I_1 - I_2 = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left(\frac{4}{\pi V_1 \sqrt{2}} + \frac{4}{\pi V_2 \sqrt{2}}\right).$$

Da V_1 und V_2 sehr wenig von einander verschieden sind, so sehen wir, dass diese Differenz nahe in demselben Verhältnisse abnimmt, in welchem die Entfernung von der Schattengrenze zunimmt.

109. Berechnung nach der Methode Gilbert's.

Die Reihen Cauchy's sind nicht anwendbar, wenn V nicht beträchtlich grösser ist als die Einheit. Gilbert's Methode führt einfacher und präciser zu den schon als approximativ richtig erkannten Gesetzen und zeigt, dass die Annäherung derselben schon in einer sehr geringen Entfernung von der Schattengrenze eine sehr befriedigende ist.

Gilbert's Integrale G und H sind strenge und für alle Werthe von V mit den Integralen Fresnel's durch dieselben Gleichungen verbunden (105), welche in angenäherter Weise zwischen Couchy's Reihen P und Q und Fresnel's Integralen bestehen (104). Die Gleichungen, zu welchen wir nach der Methode Couchy's gelangt sind (108), haben also strenge Gültigkeit für alle Werthe von V, sobald in denselben P durch H und Q durch G ersetzt wird.

Es folgt (108), dass im Innern des geometrischen Schattens die Werthe von V, welche Maximis oder Minimis entsprechen, durch die Gleichung

$$G = 0$$

und dass die Intensität für alle Punkte des Schattens durch

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}(G^2 + H^2)$$

gegeben ist.

Die Gleichung

$$G = 0$$

hat keine Auflösung, da alle Elemente des Integrals G positiv sind. Andererseits nehmen G und H rasch und continuirlich ab, wenn V, und folglich u, wächst. Es ist also die stetige Abnahme der Intensität und das Abhandensein von Maximis und Minimis im Innern des geometrischen Schattens nunmehr strenge bewiesen.

Ausserhalb des Schattens sind die Positionen der Maxima und Minima durch die Gleichung

$$sin\,\frac{\pi}{2}\,V^2 + cos\,\frac{\pi}{2}\,V^2 = G \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

für alle Werthe von V gegeben. Das Integral G nimmt sehr rasch an Grösse ab, wenn V von der Null an wächst. Ist also V nicht sehr klein, so kann man für die Gleichung (1) in erster Annäherung setzen

$$sin\,\frac{\pi}{2}\,V^2 + cos\,\frac{\pi}{2}\,V^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Löst man die Gleichung (2) nach V auf und substituirt den so erhaltenen Näherungswerth in die rechte Seite der Gleichung (1), so erhält man eine weit genauere Auflösung. Es erweisen sich jedoch die Werthe, welche man aus der Gleichung (2) erhält, schon als sehr genau. Nehmen wir z. B. das erste Maximum. Wir erhalten für die Differenz der Entfernungen desselben vom Pole und vom Rande des Schirmes aus der Gleichung (2)

$$\delta = \frac{3}{8}\,\lambda.$$

Führen wir diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir den genaueren Werth

$$\delta = \frac{3}{8}\,\lambda - 0{,}0046\,\lambda.$$

Der Fehler, welcher bei Benutzung der Gleichung (2) begangen wird, ist also so klein, dass er auch sehr genauen Messungen entgehen müsste.

Für das erste Minimum erhalten wir aus der Gleichung (2)

$$\delta = \frac{7}{8}\,\lambda$$

und mit Hülfe der Gleichung (1)

$$\delta = \frac{7}{8}\,\lambda + 0{,}0016\,\lambda.$$

Wir bemerken, dass der aus der Gleichung (2) hervorgehende Werth für das Maximum etwas zu gross, der für das Minimum etwas zu klein ist,

und es lässt sich leicht zeigen, dass dies bezüglich aller Maxima und aller Minima der Fall ist. Es genügt zu diesem Zwecke, zu bemerken, dass das Integral G, welches für $V = 0$ den Werth $\frac{1}{2}$ annimmt, für ein von der Null an wachsendes V stetig abnimmt und positiv bleibt, während die Grösse $\sin\frac{\pi}{2}V^2 + \cos\frac{\pi}{2}V^2$ zwischen positiven und negativen Werthen schwankt. Es folgt hieraus, dass diese letztere Grösse gleich G wird abwechselnd ehe sie durch die Null geht und nachdem sie durch die Null gegangen ist und dass folglich die Wurzeln der Gleichung (1) abwechselnd grösser und kleiner als die der Gleichung (2) sind. Da also der sich für das erste Maximum aus (2) ergebende Werth von V zu gross ist, so müssen es auch die sich aus dieser Gleichung für die übrigen Maxima ergebenden Werthe sein. Gleicherweise müssen sämmtliche sich aus (2) für die Minima ergebenden Werthe zu klein sein.

Ersetzen wir in dem Ausdrucke für die Intensität des Lichtes ausserhalb des geometrischen Schattens, welchen wir nach Cauchy's Methode erhalten haben, P durch H und Q durch G, so gilt dieser Ausdruck für alle Punkte ausserhalb des geometrischen Schattens, welche Entfernung immer von der Schattengrenze sie haben mögen. Wir erhalten

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[2 + G^2 + H^2 + 2H\left(\sin\frac{\pi}{2}V^2 - \cos\frac{\pi}{2}V^2\right) - 2G\left(\sin\frac{\pi}{2}V^2 + \cos\frac{\pi}{2}V^2\right)\right],$$

oder, da

$$\sin\frac{\pi}{2}V^2 + \cos\frac{\pi}{2}V^2 = \sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$\sin\frac{\pi}{2}V^2 - \cos\frac{\pi}{2}V^2 = -\sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right),$$

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[2 + G^2 + H^2 - 2\sqrt{2}\,H\cos\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right) - 2\sqrt{2}\,G\sin\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Ersetzen wir 2 durch

$$2\left[\sin^2\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right) + \cos^2\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right)\right],$$

so wird

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left\{\left[G - \sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[H - \sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{2}\left(V^2 + \frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt also für alle Punkte ausserhalb des geometrischen Schattens. Er vereinfacht sich wesentlich für jene Punkte, in welchen die Intensität ein Maximum oder Minimnm ist. In diesem Falle ist

$$\sin \frac{\pi}{2} V^2 + \cos \frac{\pi}{2} V^2 = G,$$

folglich

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} \left(V^2 + \frac{1}{2}\right) = G$$

und

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)} \left[H - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} \left(V^2 + \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Aus den von Gilbert entworfenen Tafeln geht hervor, dass für die Punkte, in welchen die Intensität ein Maximum oder Minimum ist,

$$\cos \frac{\pi}{2} \left(V^2 + \frac{1}{2}\right)$$

sich sehr wenig von — 1 oder + 1 unterscheidet. Mit Rücksicht hierauf vereinfacht sich die Formel für die Intensität der Maxima und Minima noch weiter. Es wird

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)} (H \pm \sqrt{2})^2.$$

Das Zeichen + bezieht sich auf die Maxima, das Zeichen — auf die Minima.

Was das Gesetz der Abnahme der Intensität im Innern des geometrischen Schattens betrifft, so eignet sich zur Behandlung dieses Gegenstandes Gilbert's Methode weniger, als die Cauchy's.

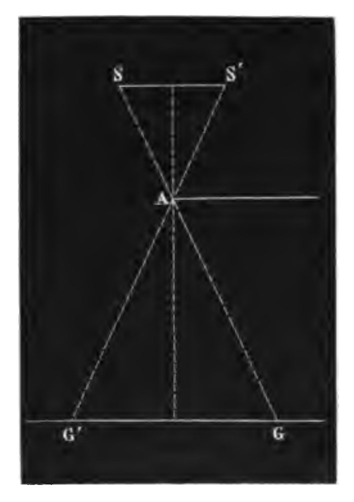
110. Einfluss der Ausdehnung der Lichtquelle.

Es ist einleuchtend, dass die Lichtquelle in der Richtung parallel zum beugenden Rande beliebig ausgedehnt sein darf, nicht aber in der Richtung senkrecht zum beugenden Rande. Im letzteren Falle coincidiren die durch die einzelnen Theile der Lichtquelle hervorgebrachten Streifensysteme nicht mehr und bringen, sich übereinanderlegend, nur eine allgemeine Helligkeit hervor.

Wir nehmen an, dass jede Beugungsfigur vollständig verschwunden sei, wenn das erste Maximum des durch das eine Ende der Lichtquelle hervorgebrachten Streifensystems mit dem auf den zweiten Endpunkt der Lichtquelle bezogenen Rande des geometrischen Schattens zusammenfällt. Schon vor Erreichung dieser Grenze wird eine merkliche Verundeutlichung des Phänomens eintreten. Es sei (Fig. 77 a. f. S.) $SS' = l$ die Lichtquelle, G und G' die den Punkten S und S' entsprechenden

geometrischen Schattengrenzen, A der Rand des Schirmes. Die Streifen werden nach der gemachten Annahme verschwinden, wenn G' mit dem ersten Maximum des durch S' hervorgebrachten Fransensystems zusammenfällt, also wenn (107)

Fig. 77.



$$G\,G' = V_1 \frac{\sqrt{b\,(a+b)\,\lambda}}{2\,a},$$

wo V_1 den dem ersten Maximum entsprechenden Werth von V bedeutet. Andererseits ist

$$G\,G' = \frac{b\,l}{a}.$$

Es folgt

$$\frac{l}{a} = V_1 \frac{\sqrt{(a+b)\,\lambda}}{2\,a\,b}.$$

$\frac{l}{a}$ ist der scheinbare Durchmesser der Lichtquelle bezogen auf A. Dieser scheinbare Durchmesser muss also kleiner sein als V_1 multiplicirt mit einer Grösse von der Ordnung der Grösse $\sqrt{\lambda}$, wenn b nicht sehr klein ist. Berechnet man dieses Product numerisch, so findet man, dass, sollen die Fransen deutlich erscheinen, für nicht sehr kleine b der scheinbare Durchmesser der Lichtquelle beträchtlich kleiner sein muss, als der Durchmesser der Sonne. Die Sonne wäre also als Lichtquelle nur zu gebrauchen, wenn b sehr klein ist. In diesem Falle jedoch werden die Streifen so schmal, dass sie der Beobachtung entgehen. Hingegen lässt der Planet Jupiter als Lichtquelle benutzt noch in grosser Entfernung vom Schirme Streifen wahrnehmen.

111. Der streifenförmige Beugungsschirm.

Wir setzen voraus, der beugende Schirm sei durch zwei unendlich lange, parallele, beispielsweise 2 mm von einander entfernte, gerade Linien begrenzt und die Verbindungslinie der Lichtquelle mit der Mitte des Schirmes stehe auf diesem senkrecht.

Man beobachtet auf dem in geringer Entfernung angebrachten Projectionsschirme oder besser mit Hülfe einer Fresnel'schen Lupe drei Streifensysteme. Eines befindet sich im Innern des geometrischen Schattens, die beiden anderen zu beiden Seiten ausserhalb desselben. Die inneren Streifen haben das Ansehen von Interferenzstreifen. Der Centralstreifen, in der Mitte des geometrischen Schattens, ist intensiv und bei Anwendung weissen Lichtes weiss, die übrigen gefärbt; die

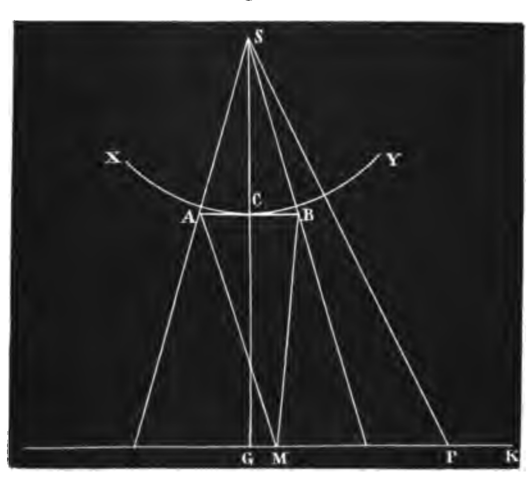
dunklen Streifen erscheinen in der Nähe des Centralstreifens vollkommen dunkel. Die äusseren Fransen gleichen den durch den einfachen Rand hervorgebrachten, die Differenz zwischen einem Maximum und dem folgenden Minimum nimmt mit der Entfernung vom Schattenrande rasch ab, und in geringer Entfernung von dieser Grenze wird die Erleuchtung gleichförmig.

Das Experiment zeigt ferner, dass die Streifen breiter werden, wenn der beugende Schirm schmäler wird und wenn man die Lupe vom beugenden Schirm entfernt. Bei der Entfernung der Lupe vom Beugungsschirme ändert das Phänomen auch in der Weise sein Ansehen, dass die drei Streifensysteme immer mehr ein einziges System zu bilden scheinen.

Die elementare Theorie dieses Falles ist sehr einfach. Wir können auch hier unsere Betrachtung auf eine Ebene beschränken, welche durch die Lichtquelle geht und auf dem beugenden Schirme senkrecht steht (101).

Sei (Fig. 78) $AB = 2l$ der beugende Schirm, S die Lichtquelle, GK der Durchschnitt jener Ebene mit dem Projectionsschirm. Um die

Fig. 78.



Erhellung der einzelnen Punkte der Geraden GK zu erhalten, genügt es (101), statt der Wirkung der Kugelwelle die Wirkung einer Kreiswelle XY zu betrachten.

Auf einen Punkt M im Innern des Schattens wirken die beiden Theile AX und BY der Kreiswelle. Die Wirkung eines jeden Theiles reducirt sich auf diejenige eines Bruchtheiles des ersten Elementarbogens, von A, bezüglich B, an gerechnet. Der Punkt M wird also in der Nähe eines Maximums oder Minimums liegen, je nachdem die Differenz $AM - BM$ einer geraden oder ungeraden Zahl halber Wellen gleichkommt.

Liegt M in der Nähe des Punktes G, so sind die wirksamen Theile der ersten Elementarbogen von AX und BY merklich gleich lang. Die von den beiden Seiten des beugenden Schirmes kommenden Bewegungen sind in diesem Falle merklich gleich intensiv und folglich werden die in der Nähe des Centralstreifens liegenden Minima vollkommen dunkel erscheinen. Für die Mitte des geometrischen Schattens ist die Wegdifferenz gleich Null, folglich daselbst immer Helligkeit.

Die Helligkeit des Centralstreifens muss um so beträchtlicher sein, durch eine je kleinere Zahl von Elementarbogen die Punkte A und B von C getrennt sind. Hieraus folgt, dass der Centralstreifen um so heller erscheinen muss, je schmaler der beugende Schirm ist.

Die Lage der Maxima und Minima im Innern des geometrischen Schattens bestimmt sich leicht näherungsweise wie folgt. Setzen wir

$$SA = a \qquad CG = b \qquad GM = x,$$

so ergiebt sich (19)

$$AM - BM = \frac{2lx}{b}$$

Die Maxima sind gegeben durch

$$x = \frac{b}{2l} 2n \frac{\lambda}{2},$$

die Minima durch

$$x = \frac{b}{2l}(2n + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass in Uebereinstimmung mit dem Experimente die Breite der Streifen mit der Schmalheit des Schirmes und mit der Entfernung von demselben zunimmt. Aus den obigen Formeln ergiebt sich für die Streifenbreite

$$\frac{b\lambda}{2l}$$

und hieraus für die Streifen im geometrischen Schatten

$$2l : \frac{b\lambda}{2l} = \frac{(2l)^2}{b\lambda}.$$

Betrachtet man also mittelst einer Lupe den Schatten eines 1 mm breiten Schirmes in einer Entfernung gleich 100 mm, so wird man ungefähr

$$\frac{1}{100 . 0{,}0006} = 17$$

Streifen im Innern des Schattens zählen müssen.

Die Lage der äusseren Streifen kann in elementarer Weise nicht berechnet werden. Doch ist einzusehen, dass für Punkte P in grösserer Entfernung von der Schattengrenze die Wirkung des auf der abgewendeten Seite des Schirmes liegenden Theiles, AX, der Welle unmerklich wird

und dass folglich die Erscheinung in diejenige des einfachen Randes übergehen muss. Für Punkte, welche der Schattengrenze näher liegen, müssen die Wirkungen beider Wellentheile in Rechnung gezogen werden.

112. Berechnung nach der Methode Fresnel's.

Fresnel's Methode führt, auf unseren Fall angewendet, zu keinerlei allgemeinen Gesetzen, doch lässt sich nach derselben, wenn a, b, λ gegeben sind, für jede einzelne Stelle des Phänomens die Intensität berechnen.

Sei M ein Punkt innerhalb des geometrischen Schattens, h der Bogen zwischen dem Pole H des Punktes M und der Mitte C des beugenden Schirmes. Dann ist (101)

$$I = \left[\int_{-\infty}^{-(l+h)} \cos\pi \frac{(a+b)s^2}{ab\lambda} ds + \int_{l-h}^{\infty} \cos\pi \frac{(a+b)s^2}{ab\lambda} ds\right]^2$$
$$+ \left[\int_{-\infty}^{-(l+h)} \sin\pi \frac{(a+b)s^2}{ab\lambda} ds + \int_{l-h}^{\infty} \sin\pi \frac{(a+b)s^2}{ab\lambda} ds\right]^2$$

und wenn (101) s durch v ausgedrückt wird und

$$V_1 = (l+h)\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}},\ V_2 = (l-h)\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}$$

gesetzt wird:

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int_{-\infty}^{-V_1} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{V_2}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{-V_1} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{V_2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2\right].$$

Ebenso erhält man für einen Punkt ausserhalb des geometrischen Schattens

$$I = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int_{-\infty}^{-V_2} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{V_1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{-V_2} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_{V_1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv\right)^2\right].$$

Um die Lage der Maxima und Minima der Intensität zu bestimmen, kann man unter Hinweglassung des constanten Factors $\frac{ab\lambda}{2(a+b)}$ die Werthe des zweiten Factors für äquidistante Werthe von h mit Hülfe der Fresnel'schen Tafeln berechnen, oder man kann das in (107) angegebene Interpolationsverfahren anwenden.

113. Berechnung nach der Methode Gilbert's.

Wir setzen

$$\frac{ab\lambda}{2(a+b)} = K$$

$$l\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}} = \varepsilon, \quad h\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}} = \mu,$$

und haben sonach für einen Punkt im Innern des Schattens

$$V_1 = \varepsilon + \mu, \qquad V_2 = \varepsilon - \mu,$$

und

$$I = K\left\{\left[\int_{-\infty}^{-(\varepsilon+\mu)} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv + \int_{\varepsilon-\mu}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv\right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{-(\varepsilon+\mu)} \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv + \int_{\varepsilon-\mu}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv\right]^2\right\}.$$

Es ist nun

$$\int_{-\infty}^{-(\varepsilon+\mu)} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = \int_{+\infty}^{\varepsilon+\mu} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = \int_{\varepsilon+\mu}^{+\infty} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$$

$$= \int_0^{\infty} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv - \int_0^{\varepsilon+\mu} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv,$$

und setzen wir

$$\int_0^{\varepsilon+\mu} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = C_{\varepsilon+\mu},$$

so kommt:

$$\int_{-\infty}^{-(\varepsilon+\mu)} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = \frac{1}{2} - C_{\varepsilon+\mu}.$$

Nach analogen Substitutionen und Transformationen wird

$$\int_0^{\varepsilon-\mu} \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv = C_{\varepsilon-\mu},$$

$$\int_0^{\varepsilon+\mu} \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv = S_{\varepsilon+\mu}, \quad \int_0^{\varepsilon-\mu} \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv = S_{\varepsilon-\mu},$$

und

$$I = K\left[(1 - C_{\varepsilon+\mu} - C_{\varepsilon-\mu})^2 + (1 - S_{\varepsilon+\mu} - S_{\varepsilon-\mu})^2\right].$$

Um die Maxima und Minima dieses Ausdruckes in Bezug auf μ zu finden, differenziren wir und erhalten

$$(1 - C_{\epsilon+\mu} - S_{\epsilon-\mu}) \left[\cos\frac{\pi}{2}(\varepsilon-\mu)^2 - \cos\frac{\pi}{2}(\varepsilon+\mu)^2\right]$$

$$+ (1 - S_{\epsilon+\mu} - S_{\epsilon-\mu}) \left[\sin\frac{\pi}{2}(\varepsilon-\mu)^2 - \sin\frac{\pi}{2}(\varepsilon+\mu)^2\right] = 0.$$

Wir setzen

$$\frac{\pi}{2}(\varepsilon-\mu)^2 = \alpha$$

$$\frac{\pi}{2}(\varepsilon+\mu)^2 = \beta,$$

und erhalten statt der letzten Gleichung

$$(1 - C_{\epsilon+\mu} - C_{\epsilon-\mu})(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$+ (1 - S_{\epsilon+\mu} - C_{\epsilon-\mu})(\sin\alpha - \sin\beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Fresnel'schen Integrale sind mit den Gilbert'schen durch die Gleichungen verbunden:

$$C = \frac{1}{2} - G\cos u + H\sin u$$

$$S = \frac{1}{2} - G\sin u - H\cos u,$$

wo u für $\frac{\pi}{2}V^2$ gesetzt ist. Bezeichnen wir also durch G_α, G_β, H_α, H_β die Werthe, welche die Integrale G und H annehmen, wenn u die Werthe α und β annimmt, so wird der Ausdruck für die Intensität im Innern des Schattens

$$I = K[(G_\alpha\cos\alpha - H_\alpha\sin\alpha + G_\beta\cos\beta - H_\beta\sin\beta)^2$$
$$+ (G_\alpha\sin\alpha + H_\alpha\cos\alpha + G_\beta\sin\beta + H_\beta\cos\beta)^2],$$

oder

$$I = K[(G_\alpha^2 + G_\beta^2 + H_\alpha^2 + H_\beta^2 + 2G_\alpha G_\beta\cos(\beta-\alpha) +$$
$$+ 2H_\alpha H_\beta\cos(\beta-\alpha) - 2G_\alpha H_\beta\sin(\beta-\alpha) +$$
$$+ 2G_\beta H_\alpha\sin(\beta-\alpha)].$$

Wir transformiren diesen Ausdruck weiter, indem wir $\beta - \alpha = 2\pi\varepsilon\mu$ setzen, und bemerken, dass:

$$G_\alpha^2 + G_\beta^2 + 2G_\alpha G_\beta\cos 2\pi\varepsilon\mu = (G_\alpha + G_\beta)^2\cos^2\pi\varepsilon\mu$$
$$+ (G_\alpha - G_\beta)^2\sin^2\pi\varepsilon\mu,$$

$$H_\alpha^2 + H_\beta^2 + 2H_\alpha H_\beta\cos 2\pi\varepsilon\mu = (H_\alpha + H_\beta)^2\cos^2\pi\varepsilon\mu$$
$$+ (H_\alpha - H_\beta)^2\sin^2\pi\varepsilon\mu,$$

$$2(G_\beta H_\alpha - G_\alpha H_\beta)\sin 2\pi\varepsilon\mu = 4(G_\beta H_\alpha - G_\alpha H_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu\cos\pi\varepsilon\mu$$
$$= 2[(G_\alpha + G_\beta)(H_\alpha - H_\beta)$$
$$- (G_\alpha - G_\beta)(H_\alpha + H_\beta)]\sin\pi\varepsilon\mu\cos\pi\varepsilon\mu.$$

um zu erhalten:

$$I = K \{[(G_\alpha + G_\beta) \cos \pi \varepsilon \mu + (H_\alpha - H_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu]^2$$
$$+ [(G_\alpha - G_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu - (H_\alpha + H_\beta) \cos \pi \varepsilon \mu]^2\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Ersetzen wir auch in der Gleichung (1), welche die Lage der Maxima und Minima bestimmt, die Integrale C und S durch G und H, so wird dieselbe

$$(G_\alpha \cos \alpha - H_\alpha \sin \alpha + G_\beta \cos \beta - H_\beta \sin \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)$$
$$+ (G_\alpha \sin \alpha + H_\alpha \cos \alpha + G_\beta \sin \beta + H_\beta \cos \beta)(\sin \alpha - \sin \beta) = 0,$$

und vereinfacht sich, da

$$(G_\alpha \cos \alpha + G_\beta \cos \beta)(\cos \alpha - \cos \beta) + (G_\alpha \sin \alpha + G_\beta \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta)$$
$$= G_\alpha - G_\beta - G_\alpha \cos(\beta - \alpha) + G_\beta \cos(\beta - \alpha)$$
$$= (G_\alpha - G_\beta)[1 - \cos(\beta - \alpha)]$$
$$= 2(G_\alpha - G_\beta) \sin^2 \pi \varepsilon \mu$$

und

$$-(H_\alpha \sin \alpha + H_\beta \sin \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)$$
$$+ (H_\alpha \cos \alpha + H_\beta \cos \beta)(\sin \alpha - \sin \beta)$$
$$= - H_\alpha \sin(\beta - \alpha) - H_\beta \sin(\beta - \alpha)$$
$$= -2(H_\alpha + H_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu \cos \pi \varepsilon \mu$$

zu

$$(G_\alpha - G_\beta) \sin^2 \pi \varepsilon \mu - (H_\alpha + H_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu \cos \pi \varepsilon \mu = 0, \quad (3)$$

welche weiter in die beiden Gleichungen zerfällt

$$\sin \pi \varepsilon \mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und

$$(G_\alpha - G_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu - (H_\alpha + H_\beta) \cos \pi \varepsilon \mu = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

Wir wollen beweisen, dass die Wurzeln der Gleichung (4) den Maximis entsprechen. Sei μ_1 eine der Wurzeln. Da die linke Seite der Gleichung (3) dasselbe Vorzeichen hat, wie die nach μ genommene Derivirte der Intensität, so wird die Wurzel μ_1 einem Maximum entsprechen, wenn die linke Seite der Gleichung (3) für einen Werth von μ, welcher etwas kleiner ist, als μ_1, positiv und für einen Werth von μ, welcher etwas grösser ist, als μ_1, negativ wird. Dies trifft in der That zu. Die Wurzeln der Gleichung (4) sind nämlich gegeben durch

$$\varepsilon \mu_1 = n,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und folglich nimmt die linke Seite der Gleichung (3) für einen, μ_1 benachbarten, Werth von μ das Vorzeichen ihres zweiten Gliedes an, welches, da $H_\alpha + H_\beta$ wesentlich positiv ist, selbst positiv oder negativ wird, je nachdem der Werth von μ kleiner oder grösser als μ_1 ist.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grössen ε und μ erhalten wir sonach für die Lage der Maxima im Innern des geometrischen Schattens des Beugungsschirmes aus (4)

$$l h \frac{2(a+b)}{a b \lambda} = n.$$

Bezeichnen wir ferner durch x die Entfernung einer Stelle der Beugungsfigur von der Mitte des geometrischen Schattens und bemerken wir, dass

$$\frac{h}{x} = \frac{a}{a+b},$$

so nimmt die Gleichung für die Lage der Maxima im Innern des geometrischen Schattens schliesslich die Form an

$$x = \frac{b}{2l} 2n \frac{\lambda}{2}.$$

Die Resultate der exacten Theorie stimmen also in Bezug auf die Lage der Maxima im Innern des geometrischen Schattens des Beugungsschirmes mit den Resultaten der elementaren Theorie vollkommen überein.

Suchen wir nun die Wurzeln der Gleichung (5), welche den Minimis der Intensität entsprechen. Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$tang\, \pi \varepsilon \mu = \frac{H_\alpha + H_\beta}{G_\alpha - G_\beta}.$$

Construiren wir, um die Wurzeln der letzten Gleichung zu finden zwei Curven, deren Gleichungen sind

$$y = tang\, \pi \varepsilon \mu$$

und

$$y = \frac{H_\alpha + H_\beta}{G_\alpha - G_\beta},$$

indem wir als Abscissen die Werthe von μ auftragen. Die gesuchten Wurzeln sind die Abscissen der Durchschnittspunkte der beiden Curven. Die erste der beiden Curven zerfällt (Fig. 79) in eine Reihe getrennter Theile, welche eine Reihe von der Ordinatenaxe parallelen äquidistanten geraden Linien zu Asymptoten haben. Die Abscissen dieser Asymptoten sind bezüglich

$$\frac{1}{2\varepsilon}, \quad \frac{3}{2\varepsilon}, \quad \frac{5}{2\varepsilon} \ldots$$

Die zweite der beiden Curven verläuft asymptotisch zur y-Axe, da für

$$\mu = 0, \alpha = \beta \text{ und } y = \infty$$

ist. Die Ordinaten dieser Curve sind sämmtlich positiv. Da nämlich α kleiner als β bleibt, ist G_α stets grösser als G_β. Wenn μ von der Null bis zu jenem Werthe wächst, welcher dem an der Schattengrenze liegenden Punkte entspricht, wird μ gleich ε und

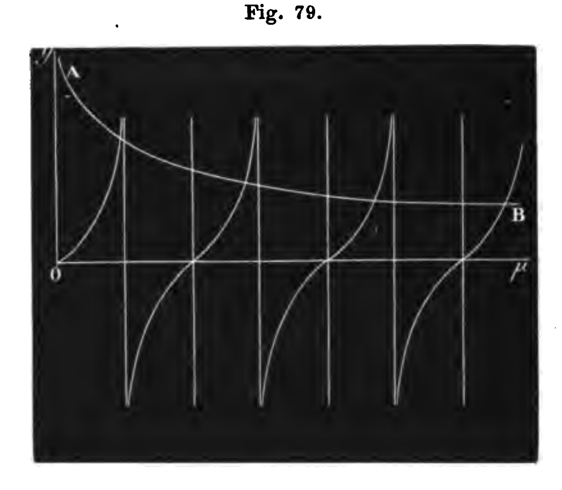
$$\alpha = 0 \quad \beta = 2\pi\varepsilon^2,$$

also

$$H_\alpha = G_\alpha = \frac{1}{2}\cdot$$

G_β und H_β werden verschwindend klein neben G_α und H_α und es folgt, dass die Ordinate der zweiten Curve sich in dieser Grenze merklich

Fig. 79.



der Einheit nähert. Die Ordinate dieser Curve nimmt also von Unendlich bis zur Einheit continuirlich ab. Es folgt, dass diese zweite Curve jeden der positiven Theile der ersten Curve in je einem Punkte durchschneidet.

Es giebt also, unter n eine ganze Zahl verstanden, zwischen $\frac{2n}{2}\frac{1}{\varepsilon}$ und $\frac{2n+1}{2}\frac{1}{\varepsilon}$ stets eine und nur eine Wurzel der Gleichung (5). Da die Wurzeln der Gleichung (4) durch

$$\mu = n\frac{1}{\varepsilon}$$

gegeben sind, so ist ersichtlich, dass zwischen je zwei Wurzeln der Gleichung (4) eine und nur eine Wurzel der Gleichnug (5) liegt, woraus folgt, dass, da die Wurzeln der Gleichung (4) den Maximis entsprechen, die Wurzeln der Gleichung (5) den Minimis entsprechen müssen.

Die Lage der Minima im Innern des geometrischen Schattens unterliegt also keinem einfachen Gesetze. Alles, was sich sagen lässt, ist, dass für die ersten Minima die Durchschnittspunkte der Curven nahezu auf die Durchschnitte der zweiten Curve mit den Asymptoten der ersten fallen, und dass folglich für die erste Minima näherungsweise

$$\mu = (2n+1)\frac{1}{\varepsilon}$$

oder
$$x = \frac{b}{2l}(2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$
Dies heisst, dass nur in der Nähe der Mitte des geometrischen Schattens die von der exacten Theorie für die Lage der Minima gegebenen Werthe mit den von der elementaren Theorie gegebenen genau zusammentreffen.

Die Berechnung der Intensität der Maxima und Minima im Innern des Schattens unterliegt keinerlei Schwierigkeit. Die Gleichung (2), welche die Intensität im Innern des Schattens überhaupt giebt, geht für die Maxima über in
$$I = K\,[(G_\alpha + G_\beta)^2 + (H_\alpha + H_\beta)^2],$$
da
$$\sin\pi\varepsilon\mu = 0 \quad \cos\pi\varepsilon\mu = \pm 1.$$

Für die Mitte des Schattens wird
$$\mu = 0, \qquad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}\varepsilon^2,$$
also
$$I = 4K\,(G_\alpha^2 + H_\alpha^2).$$
Wäre der Beugungsschirm auf der einen Seite unendlich ausgedehnt, so wäre die Intensität an derselben Stelle (109)
$$I = K\,(G_\alpha^2 + H_\alpha^2).$$
Es beträgt also die Intensität in der Mitte des geometrischen Schattens das Vierfache der Intensität, welche an derselben Stelle bei einseitiger unendlicher Ausdehnung des Schirmes wahrgenommen würde. Wenn μ wächst, d. i. wenn man sich von der Mitte des Schattens entfernt und dessen Grenze nähert, nimmt α von $\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ bis Null ab, während β von $\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ bis $4\,\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ wächst. Es wachsen also G_α und H_α, während G_β und H_β abnehmen. Da ferner G_α und H_α im Verhältnisse zu G_β und H_β immer sehr gross sind, so wächst die Intensität der Maxima von der Mitte des Schattens gegen die Grenze desselben. Die Intensität des Centralstreifens ist gegeben durch $4K\,(G_\alpha^2 + H_\alpha^2)$. Da K von der Breite des Beugungsschirmes unabhängig ist, so verlangt diese Formel, a und b als constant vorausgesetzt, für den Centralstreifen eine um so grössere Intensität, je kleiner α ist, d. i. je schmaler der Beugungsschirm ist, was durch das Experiment bestätigt wird.

Für die Intensitäten der Minima im Innern des Schattens hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (5), welche die Lage der Minima bestimmt,
$$I = K\,[(G_\alpha + G_\beta)\cos\pi\varepsilon\mu + (H_\alpha + H_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu]^2.$$
Andererseits erhält man aus Gleichung (5)

$$\sin \pi \varepsilon \mu = \frac{H_\alpha + H_\beta}{\sqrt{(H_\alpha + H_\beta)^2 + (G_\alpha - G_\beta)^2}}$$

$$\cos \pi \varepsilon \mu = \frac{G_\alpha - G_\beta}{\sqrt{(H_\alpha + H_\beta)^2 + (G_\alpha - G_\beta)^2}}.$$

Der Ausdruck für die Intensität der Minima wird also

$$I = K \frac{(G_\alpha^2 - G_\beta^2 + H_\alpha^2 - H_\beta^2)^2}{(G_\alpha - G_\beta)^2 + (H_\alpha + H_\beta)^2}.$$

Für die Minima, welche in der Nähe der Mitte des geometrischen Schattens liegen, sind α und β nahe einander gleich. Es wird also der Zähler des Bruches, welcher in dem Ausdrucke für die Intensität vorkommt, nahe gleich Null, während der Nenner merklich gleich $4 H_\alpha^2$ oder gleich Eins wird. Die Minima müssen also in der Nähe der Mitte des geometrischen Schattens nahe gleich Null sein. In der That erscheinen die dunklen Streifen zu beiden Seiten des Centralstreifens nahezu vollständig dunkel.

Die Vertheilung des Lichtes ausserhalb des geometrischen Schattens ist minder einfachen Gesetzen unterworfen. Wir wollen sehen, welche Aufschlüsse uns die Theorie giebt. Fur einen äusseren Punkt sind die Grenzen der Integrale C und S, wenn die mit dem Beugungsschirme auf derselben Seite des Poles liegenden Bogen positiv gerechnet werden, $-\infty$ und $h - l$, $h + l$ und $+\infty$, oder, wenn μ und ε ihre Bedeutung beibehalten, $-\infty$ und $\mu - \varepsilon$, $\mu + \varepsilon$ und $+\infty$. Es wird dann der Ausdruck für die Intensität:

$$I = K\left[(1 + C_{\mu - \varepsilon} - C_{\mu + \varepsilon})^2 + (1 + S_{\mu - \varepsilon} - S_{\mu + \varepsilon})^2\right],$$

und die Gleichung für die Lage der Maxima und Minima:

$$(1 + C_{\mu - \varepsilon} - C_{\mu + \varepsilon}) \left[\cos \frac{\pi}{2} (\mu - \varepsilon)^2 - \cos \frac{\pi}{2} (\mu + \varepsilon)^2\right] +$$
$$+ (1 + S_{\mu - \varepsilon} - S_{\mu + \varepsilon}) \left[\sin \frac{\pi}{2} (\mu - \varepsilon)^2 - \sin \frac{\pi}{2} (\mu + \varepsilon)^2\right] = 0.$$

Werden für C und S die Integrale G und H eingeführt, und wie früher

$$\frac{\pi}{2} (\mu - \varepsilon)^2 = \alpha,$$

$$\frac{\pi}{2} (\mu + \varepsilon)^2 = \beta$$

gesetzt, so wird

$$I = K\left[(1 - G_\alpha \cos \alpha + H_\alpha \sin \alpha + G_\beta \cos \beta - H_\beta \sin \beta)^2 \right.$$
$$\left. + (1 - G_\alpha \sin \alpha - H_\alpha \cos \alpha + G_\beta \sin \beta + H_\beta \cos \beta)^2\right],$$

und es wird die Gleichung für die Lage der Maxima und Minima:

$$(1 + G_\beta \cos\beta - H_\beta \sin\beta - G_\alpha \cos\alpha + H_\alpha \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$+ (1 + G_\beta \sin\beta + H_\beta \cos\beta - G_\alpha \sin\alpha - H_\alpha \cos\alpha)(\sin\alpha - \sin\beta) = 0,$$

oder

$$-(G_\alpha + G_\beta)[1 - \cos(\beta - \alpha)] + (H_\alpha - H_\beta)\sin(\beta - \alpha)$$
$$+ \cos\alpha - \cos\beta + \sin\alpha - \sin\beta = 0.$$

Diese letzte Gleichung kann mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \pi\varepsilon\mu$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\pi}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2),$$

auch geschrieben werden:

$$-(G_\alpha + G_\beta)\sin^2\pi\varepsilon\mu + (H_\alpha - H_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu\cos\pi\varepsilon\mu$$
$$+ \sin\pi\varepsilon\mu\left[\sin\frac{\pi}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2) - \cos\frac{\pi}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2)\right] = 0,$$

und zerfällt in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sin\pi\varepsilon\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und

$$-(G_\alpha + G_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu + (H_\alpha - H_\beta)\cos\pi\varepsilon\mu + \sin\frac{\pi}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2)$$
$$- \cos\frac{\pi}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Die Wurzeln der Gleichung (6) sind, wie wir schon bemerkt haben, gegeben durch

$$\varepsilon\mu = n,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet; doch können diese Wurzeln ausserhalb des Schattens sowohl Maximis als Minimis entsprechen.

Was die Wurzeln der Gleichung (7) betrifft, so kann man sich annähernd eine Vorstellung von ihrer Vertheilung machen mit Hülfe von geometrischen Betrachtungen, wie wir sie schon öfter benutzt haben. Die Gleichung (7) lässt sich, da

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

auf die Form bringen:

$$(H_\alpha - H_\beta)\cos\pi\varepsilon\mu - (G_\alpha + G_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu =$$
$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Construiren wir sonach zwei Curven, deren Gleichungen, μ als Abscisse genommen, sind:

$$y = (H_\alpha - H_\beta)\cos\pi\varepsilon\mu - (G_\alpha + G_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu$$

und

$$y = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\right),$$

so werden die gesuchten Wurzeln die Abscissen der Durchschnitte der beiden Curven sein. Da es sich nur um Punkte ausserhalb des Schattens handelt, haben wir nur Werthe von μ zu berücksichtigen, welche grösser als ε sind. Die erste der beiden Curven verläuft in complicirter Weise; sie schneidet die Abscissenaxe in Punkten, welche der Gleichung

$$tang\, \pi \varepsilon \mu = \frac{H_\alpha - H_\beta}{G_\alpha - G_\beta}$$

entsprechen, und ihre Ordinaten werden für $\mu > \varepsilon$ so klein, dass die Durchschnittspunkte der beiden Curven merklich mit den Durchschnittspunkten der zweiten Curve und der Abscissenaxe zusammenfallen. Es ist leicht zu sehen, dass diese letzteren Punkte bei wachsendem μ immer näher an einander rücken. Sind nämlich μ und $\mu + \Delta\mu$ die Abscissen zweier aufeinanderfolgender Durchschnittspunkte der zweiten Curve mit der Axe der x, so ist

$$\frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\right) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{\pi}{2}\left[\varepsilon^2 + (\mu + \Delta\mu)^2 + \frac{1}{2}\right] = (2n + 3)\frac{\pi}{2},$$

woraus folgt

$$2\mu\Delta\mu + \Delta\mu^2 = 2$$

und näherungsweise

$$\Delta\mu = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gleichung (7) lehrt uns also ausserhalb des geometrischen Schattens eine Reihe heller und dunkler Streifen kennen, welche um so schmaler werden, je mehr sie sich von der Schattengrenze entfernen.

Um zu erfahren, welche von den durch die Gleichungen (6) und (7) gegebenen Werthen von μ Maximis und welche Minimis der Intensität entsprechen, genügt es, dieselben nach ihrer Grösse zu ordnen und zu sehen, ob der letzte Werth von μ, welcher im Innern des Schattens die Derivirte der Intensität gleich Null macht, einem Maximum oder Minimum entspricht. Ist beispielsweise der letzte innere Streifen ein heller, so wird der erste äussere Streifen ein dunkler sein, der zweite ein heller u. s. w.

Wenn der Werth von μ eiu wenig beträchtlich wird, so werden die Werthe der Integrale G_α, G_β, H_α, H_β sehr klein und es weicht der Ausdruck für die Intensität sehr wenig von dem Werthe $2K$ ab. Es nimmt also die Differenz zwischen einem Maximum und einem folgenden Minimum mit wachsender Entfernung von der Mitte des geometrischen Schattens ab. Schon in geringer Entfernung wird die Erleuchtung merklich gleichmässig.

Wenn der beugende Körper sehr schmal ist, und wenn man das Phänomen in beträchtlicher Entfernung vom beugenden Körper betrachtet, so vereinfacht sich das Ansehen der Erscheinung wesentlich. Der erste dunkle Streifen liegt in diesem Falle schon jenseits des geometrischen Schattens und man hat dann ein einziges System von Streifen. In diesem Falle nimmt im Innern des Schattens die Intensität von der Mitte gegen den Rand des Schattens continuirlich ab.

Die Breite der Streifen im Innern des geometrischen Schattens ist der Breite des beugenden Körpers verkehrt proportional. Diese Consequenz der Theorie kann leicht experimentell geprüft werden durch Vermessung der Beugungsfigur, welche durch einen Schirm hervorgebracht wird, welcher von zwei unter einem sehr spitzen Winkel zusammenlaufenden Geraden begrenzt wird. Die Streifen müssen in diesem Falle die Gestalt von Hyperbeln annehmen, deren Asymptoten der Centralstreifen und eine durch die Projection der Spitze des Schirmes gehende, auf dem Centralstreifen senkrechte Gerade sind. Nehmen wir, um dies zu beweisen, die beiden Asymptoten zu Axen der x und y, so haben wir für den ersten hellen Streifen

$$x = \frac{b\lambda}{2l}.$$

Da die Breite $2l$ des beugenden Schirmes proportional mit der Entfernung von seiner Spitze wächst, ist die Gleichung der vom ersten hellen Streifen gebildeten Curve

$$xy = \frac{b\lambda}{k},$$

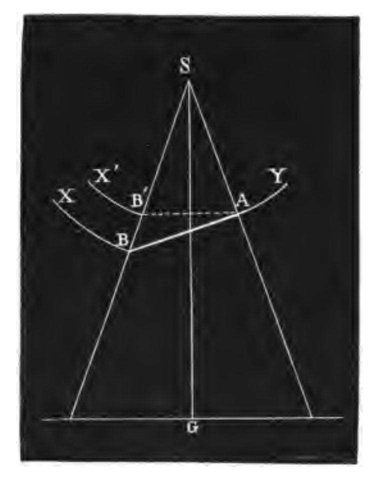
welche Gleichung einer Hyperbel angehört, deren Asymptoten die Axen des Coordinatensystems sind.

114. Einfluss des scheinbaren Durchmessers der Lichtquelle und der Neigung des beugenden Schirmes.

Analog wie in (110) ergiebt sich, dass, soll das Phänomen deutlich erscheinen, die Ausdehnung der Lichtquelle in einer zu den Rändern des beugenden Schirmes senkrechten Ebene nicht mehr als ungefähr $\frac{\lambda}{4l}$ betragen darf, da dann die Mitte des geometrischen Schattens, bezogen auf einen Endpunkt der Lichtquelle, mit dem ersten Minimum, bezogen auf den anderen Endpunkt, zusammenfällt. Die Lichtquelle darf also desto ausgedehnter sein, je schmaler der beugende Schirm ist. Hieraus erklärt es sich, dass Haare im directen Sonnenlichte deutliche Beugungsstreifen zeigen.

Wenn der beugende Schirm gegen die einfallenden Strahlen geneigt ist (Fig. 80), so ändert sich die Beugungsfigur um so beträchtlicher, je näher am beugenden Schirme dieselbe betrachtet wird. Die inneren Streifen hören auf bezüglich der winkelhalbirenden Ebene SG symmetrisch zu sein und die äusseren Streifen haben zu beiden Seiten des geometrischen Schattens nicht mehr die gleiche Breite. Man sieht die Ursache dieser Veränderung leicht ein, wenn man für die Welle $B'X'$ die Welle BX substituirt.

Fig. 80.



Der Çentralstreifen muss eine solche Lage G' haben, dass

$$SBG' = SAG',$$

d. h. er muss nach der Seite des Punktes B verschoben erscheinen.

Die äusseren Streifen unterscheiden sich in einiger Entfernung von der Mitte des geometrischen Schattens wenig von jenen Streifen, welche durch die beiden Ränder des Schirmes für sich hervorgebracht werden (106). Sie müssen also auf der Seite des Punktes B schmaler erscheinen.

115. Das durch eine Spaltöffnung hervorgebrachte Phänomen.

Wir nehmen an, dass die beugende Oeffnung von zwei parallelen Geraden begrenzt sei, dass die Lichtquelle ein leuchtender Punkt oder eine der Spaltöffnung parallele leuchtende Linie sei und dass die Oeffnung eine zur Lichtquelle symmetrische Lage habe. Stellen wir die Lupe auf eine Ebene ein, welche von der Spaltöffnung nicht zu weit entfernt ist, so nehmen wir drei Fransensysteme wahr, von welchen zwei ausserhalb des Lichtbildes liegen, welches die Spaltöffnung nach der geometrischen Theorie des Schattens auf dem Projectionsschirme geben würde, während das dritte Fransensystem sich innerhalb dieses Lichtbildes zeigt. Die äusseren Streifen zeigen Maxima und Minima, deren Helligkeitsdifferenz wie die absolute Helligkeit der Maxima selbst mit wachsender Entfernung vom Schattenrande rasch abnimmt, so dass in geringer Entfernung von der Grenze des geometrischen Schattens die Erhellung unmerklich wird. Die inneren Streifen zeigen die Eigenthümlichkeit, dass bei wachsender Entfernung des Schirmes, auf welchen sich die Erscheinung projicirt, vom beugenden Schirme der Centralstreifen abwecheld einem

Maximum oder Minimum der Intensität entspricht und dass folglich bei Anwendung weissen Lichtes der Centralstreifen gefärbt erscheint und dass seine Farbe von der Entfernung abhängt, in welcher die Erscheinung betrachtet wird.

In grosser Entfernung vom beugenden Schirme vereinfacht sich die Erscheinung wesentlich. Die drei Streifensysteme bilden nunmehr ein einziges System und der Centralstreifen erscheint stets weiss. Befindet sich die Lichtquelle in grösserer Entfernung, so hat man das Fraunhofer'sche Phänomen einer Spaltöffnung (78).

Die elementare Theorie reicht in diesem Falle nicht weit. Betrachten wir das Phänomen in einer Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt geht und auf den Rändern der Spaltöffnung senkrecht steht (Fig. 81). Diese Ebene schneidet die sphärische Wellenfläche, welche die Ränder der Spalte berührt, längs dem grössten Kreise ACB und wir haben die Wirkung des Theiles AB dieser Kreiswelle auf die verschiedenen Punkte der Geraden GH in Betracht zu ziehen. Setzen wir zu diesem Zwecke

Fig. 81.



$$SC = a,\ CM = b,\ AC = CB = l$$

und betrachten wir den Punkt M der Geraden GH, welcher der Mitte der Spaltöffnung gegenüberliegt. Es folgt zunächst aus der Symmetrie der Figur bezüglich des Punktes M, dass die Intensität in diesem Punkte stets ein Maximum oder Minimum ist. Sodann ist klar, dass die von den Bogen AC und CB auf M übertragenen Geschwindigkeiten stets in Uebereinstimmung der Phase stehen und dass sie geringer sind, wenn jene Bogen eine gerade, grösser, wenn sie eine ungerade Zahl Elementarbogen enthalten. Die Intensität in M ist also ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Differenz der Wege AM und CM eine ungerade oder gerade Zahl halber Wellen bertägt. Nach früher entwickelten Formeln ist

$$AM - CM = l^2 \frac{(a + b)}{2ab} = l^2 \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right),$$

folglich ist M ein Maximum, wenn

$$l^2 \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right) = (2n + 1)\frac{\lambda}{2},$$

und ein Minimum, wenn

$$l^2\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)=2n\frac{\lambda}{2}.$$

Die Lage der übrigen Maxima und Minima soll auf dem Wege der strengeren Rechnung abgeleitet werden.

116. Berechnung nach der Methode Gilbert's.

Fresnel's Methode führt in dem vorliegenden Falle zu keinen allgemeinen Resultaten, bessere Dienste leistet Gilbert's Methode.

Sei P ein Punkt des inneren Streifensystems, D sein Pol (Fig. 81), werde der Bogen CD durch h bezeichnet und rechts von D positiv gerechnet. Dann sind die Grenzen der Fresnel'schen Integrale bezüglich s: $-(l-h)$ und $+(l+h)$ und bezüglich v: $-(\varepsilon-\mu)$ und $+(\varepsilon+\mu)$, wo

$$\varepsilon=l\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}},\qquad \mu=h\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}.$$

Dies vorausgesetzt, ist die Intensität in P:

$$I=K\left[(C_{\varepsilon-\mu}+C_{\varepsilon+\mu})^2+(S_{\varepsilon-\mu}+S_{\varepsilon+\mu})^2\right].$$

Setzt man, wie in dem früher behandelten Falle,

$$\frac{\pi}{2}(\mu-\varepsilon)^2=\alpha,\qquad \frac{\pi}{2}(\mu+\varepsilon)^2=\beta,$$

so erhält man wie dort

$$\begin{aligned}I=K\,[&(1-G_\alpha\cos\alpha+H_\alpha\sin\alpha-G_\beta\cos\beta+H_\beta\sin\beta)^2\\&+(1-G_\alpha\sin\alpha-H_\alpha\cos\alpha-G_\beta\sin\beta-H_\beta\cos\beta)^2].\end{aligned}$$

Für die Maxima und Minima ergiebt sich durch Differentiation in Bezug auf μ:

$$\begin{aligned}&(1-G_\alpha\cos\alpha+H_\alpha\sin\alpha-G_\beta\cos\beta+H_\beta\sin\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)\\&+(1-G_\alpha\sin\alpha-H_\alpha\cos\alpha-G_\beta\sin\beta-H_\beta\cos\beta)(\sin\beta-\sin\alpha)=0,\end{aligned}$$

oder durch Vereinfachung:

$$\sin\pi\varepsilon\mu\left[\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2+\mu^2+\frac{1}{2}\right)+(G_\alpha-G_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu\right.\\\left.-(H_\alpha+H_\beta)\cos\pi\varepsilon\mu\right]=0.$$

Die letzte Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\sin\pi\varepsilon\mu=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$(H_\alpha + H_\beta) \cos \pi \varepsilon \mu - (G_\alpha - G_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu =$$
$$= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2), durch welche die Lage der inneren Maxima und Minima einer Spaltöffnung gegeben ist, stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den Gleichungen für die Lage der äusseren Maxima und Minima eines streifenförmigen Beugungsschirmes. Die letzteren Gleichungen sind (113):

$$\sin \pi \varepsilon \mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$(H_\alpha - H_\beta) \cos \pi \varepsilon \mu - (G_\alpha + G_\beta) \sin \pi \varepsilon \mu =$$
$$= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Man sieht, dass die Gleichungen (1) und (a) identisch sind und dass die Gleichungen (2) und (b) sich wenig unterscheiden, indem die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens identisch, die Ausdrücke auf der linken Seite beide sehr klein sind.

Man gelangt also zu dem Resultate, dass die Lage der inneren Streifen einer Spaltöffnung und die der äusseren eines gleich breiten streifenförmigen Schirmes annähernd durch dieselben Gleichungen gegeben sind; die ersteren Streifen entsprechen den zwischen 0 und ε liegenden, die letzteren den zwischen ε und ∞ liegenden Werthen von μ.

Der Centralstreifen erfährt charakteristische Veränderungen, während der Projectionsschirm von der Spaltöffnung entfernt wird. Diese Veränderungen ergeben sich aus der Rechnung in der folgenden Weise.

Für M sind stets μ und der nach μ genommene Differentialquotient der Intensität gleich Null. Es folgt, dass die Intensität des Centralstreifens stets ein Maximum oder ein Minimum ist. In welchen Entfernungen vom Beugungsschirm der Centralstreifen einem Maximum der Intensität entspricht und sonach als ein heller Streifen erscheint, und in welchen Entfernungen er einem Minimum entspricht und als dunkler Streifen erscheint, ergiebt sich in der folgenden Weise. Die Intensität in M ist ein Maximum, wenn der Differentialquotient der Intensität in Bezug auf μ aus dem Positiven in das Negative übergeht, während μ aus dem Negativen in das Positive übergeht, ein Minimum, wenn jener Differentialquotient sich umgekehrt verhält. Nun erscheint jener Differentialquotient als ein Product zweier Factoren. Der eine ist $\sin \pi \varepsilon \mu$, und wechselt mit μ das Zeichen. Der andere ist:

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\right) - 2 H \frac{\pi}{2} \varepsilon^2.$$

Wenn dieser Factor für den Punkt M nicht der Null gleich ist, so hat man also in M ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem der

zweite Factor negativ oder positiv ist. Ist die Spaltöffnung nicht sehr schmal und die Entfernung, in welcher das Phänomen betrachtet wird, nicht sehr gross, so ist $\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ nicht sehr klein und das Glied $-2H\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ kann vernachlässigt werden. Die Bedingung für ein Minimum ist dann:

$$\cos\frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2+\frac{1}{2}\right) > 0$$

oder

$$2n\pi+\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2+\frac{1}{2}\right) > 2n\pi-\frac{\pi}{2}$$

oder

$$2n+\frac{1}{2} > \frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{4} > 2n-\frac{1}{2},$$

und da

$$BM-CM=\delta=\frac{1}{2}\frac{l^2(a+b)}{ab}$$

und andererseits

$$\varepsilon^2=\frac{2l^2(a+b)}{ab\lambda},$$

also

$$\varepsilon^2=\frac{4\delta}{\lambda},$$

ist die Bedingungsgleichung für ein Minimum:

$$2n\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{8}\lambda > \delta > (2n-1)\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{8}\lambda.$$

Die Intensität im Punkte M ist also unter der gemachten Voraussetzung ein Minimum, wenn die Wegdifferenz $BM - CM$ zwischen zwei um eine halbe Wellenlänge verschiedenen Werthen liegt, deren Mittel

$$2n\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{8}$$

ist.

In gleicher Weise findet man, dass die Intensität im Punkte M ein Maximum ist, wenn

$$(2n+1)\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{8}\lambda > \delta > 2n\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{8}\lambda,$$

d. i. wenn die Wegdifferenz $BM - CM$ zwischen zwei um eine halbe Wellenlänge verschiedenen Werthen liegt, deren Mittel

$$(2n+1)\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{8}$$

ist.

Entfernt man also den Projectionsschirm allmälig vom Beugungsschirme, so entspricht die Centralfranse abwechselnd einem Maximum oder

Minimum, d. h. sie erscheint bei Anwendung homogenen Lichtes abwechselnd hell und dunkel, bei Anwendung weissen Lichtes successive verschieden gefärbt. Ueberschreitet die Entfernung eine gewisse Grösse, so hört der Wechsel auf und die Centalfranse entspricht stets einem Maximum der Intensität.

Es soll nun die Erscheinung ausserhalb des geometrischen Bildes der beugenden Spalte oder innerhalb des geometrischen Schattens berechnet werden. Man erhält auf bekanntem Wege

$$I = K\,[(G_\alpha \cos\alpha - H_\alpha \sin\alpha - G_\beta \cos\beta + H_\beta \sin\beta)^2 + (G_\alpha \sin\alpha + H_\alpha \cos\alpha - G_\beta \sin\beta - H_\beta \cos\beta)^2],$$

und für die Lage der Maxima und Minima

$$-(G_\alpha + G_\beta)\sin^2\pi\varepsilon\mu + (H_\alpha - H_\beta)\sin\pi\varepsilon\mu\cos\pi\varepsilon\mu = 0\,. \quad (3)$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\sin\pi\varepsilon\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$\operatorname{tang}\pi\varepsilon\mu = \frac{H_\alpha - H_\beta}{G_\alpha + G_\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

von welchen die erstere den Minimis, die letztere den Maximis entspricht. Der Beweis wird in ähnlicher Weise geführt, wie in (113).

Im Innern des geometrischen Schattens eines streifenförmigen Beugungsschirmes sind die Maxima gegeben durch

$$\sin\pi\varepsilon\mu = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

die Minima durch

$$\operatorname{tang}\pi\varepsilon\mu = \frac{H_\alpha + H_\beta}{G_\alpha - G_\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Die Gleichung (c) ist identisch mit (4), die Gleichung (d) unterscheidet sich wenig von (5). Man sieht also: Die äusseren Streifen einer Spaltöffnung und die inneren eines gleichbreiten streifenförmigen Schirmes sind annähernd durch dieselben Gleichungen gegeben; nur entsprechen den letzteren die zwischen 0 und ε liegenden, den ersteren die zwischen ε und ∞ liegenden Werthe von μ.

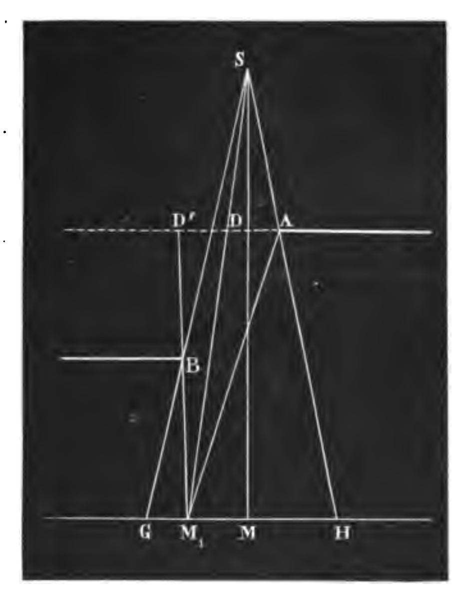
Die Streifen, welche eine schmale Winkelöffnung hervorbringen, wie man sie durch zwei übereinandergelegte, geradlinig begrenzte Stanniolblätter erhält, stehen ebenfalls in bemerkenswerther Beziehung zu den Streifen, welche im Schatten eines einer solchen Beugungsöffnung an Gestalt gleichen opaken Beugungsschirmes entstehen (113). Wie dort, zeigen sich auch hier hyperbolische Streifen, deren Asymptoten sich in der Spitze der Winkelöffnung schneiden und aufeinander senkrecht stehen. Der Centralstreifen erscheint in diesem Falle der Länge nach abwechselnd hell und dunkel bei Anwendung homogenen Lichtes, verschieden gefärbt bei weissem Lichte entsprechend der variabeln Breite der Oeffnung.

117. Einfluss der Grösse der Lichtquelle und der Neigung der Spaltöffnung.

Auch das Zustandekommen dieser Erscheinung ist von der Grösse des scheinbaren Durchmessers der Lichtquelle abhängig. Ist die Spaltöffnung sehr schmal, so können die Streifen noch im directen Sonnenlichte wahrgenommen werden (114).

Ist die Ebene der Spaltöffnung gegen die Richtung der einfallenden Strahlen geneigt (Fig. 82), so hört die Erscheinung auf zur Linie SM, welche den Winkel ASB (Fig. 82) halbirt, symmetrisch zu sein. Der Centralstreifen M_1 ist so weit gegen den Rand B der Spaltöffnung verschoben, dass die wirksamen Bogen DA, DD', welche zu beiden Seiten des Poles D des Punktes M_1 liegen, gleich gross sind.

Fig. 82.



Die Erscheinungen, welche entstehen, wenn die beiden Schirme nicht eine Spaltöffnung bilden, sondern auf derselben Seite von SM (Fig. 82) in verschiedenen Abständen von der Lichtquelle angebracht sind, müssen auf die gegenseitige Interferenz der an den beiden Schirmrändern gebeugten Lichtstrahlen zurückgeführt werden (97) und bestehen keineswegs in einer einfachen Uebereinanderlagerung der durch die beiden Schirmränder hervorgebrachten Beugungsphänomene. Aehnliche Erscheinungen kann man überhaupt beobachten, wenn verschiedene Interferenzapparate hintereinander angebracht werden [1]).

[1]) G. Quincke, Pogg. CXLII.

118. Zwei parallele Spaltöffnungen.

Fresnel hat in seiner grossen Arbeit über die Diffraction eine Zahl minder einfacher Fälle behandelt, so den Fall zweier paralleler Spaltöffnungen von gleicher Breite. Betrachtet man das Phänomen in nicht zu grosser Entfernung, so nimmt man im Bilde jeder der beiden Spalten ein Streifensystem wahr, wie es eine einzige Spalte zeigt, so dass jeder der beiden Centralstreifen bei weissem Lichte seine Farbe mit der Entfernung der Lupe vom beugenden Schirme ändert. Im Schatten des opaken Zwischenraumes der beiden Spaltöffnungen findet sich ebenfalls ein Streifensystem. Der Centralstreifen ist stets hell, die Minima fast vollkommen dunkel.

Die Entstehung dieser letzteren Streifen ist leicht zu verstehen: sind die Spaltöffnungen hinreichend schmal und betrachtet man die Erscheinung in einer hinreichend grossen Entfernung vom beugenden Schirme, so ist die von einer der Spaltöffnungen allein auf einen Punkt des Schattens des undurchsichtigen Zwischenraumes der Spaltöffnungen übertragene Vibrationsgeschwindigkeit längs der ganzen Ausdehnung dieses Schattens merklich constant, denn die durch eine einzige Spaltöffnung hervorgebrachten Streifen sind um so breiter, je enger die Spaltöffnungen sind und in je grösserer Entfernung die Erscheinung betrachtet wird (115). Unter diesen Bedingungen entsteht innerhalb des Schattens des undurchsichtigen Zwischenraumes ein Maximum oder Minimum der Intensität, je nachdem in einer durch den betrachteten Punkt und die Lichtquelle gehenden, zu den Rändern der Spaltöffnungen senkrechten Ebene die Differenz der Entfernungen dieses Punktes von homologen Punkten der Spaltöffnungen ein gerades oder ungerades Vielfache einer halben Wellenlänge beträgt. Es folgt, dass die Mitte des Schattens des undurchsichtigen Zwischenraumes stets einem Maximum entspricht und dass die den Minimis entsprechenden Punkte von den beiden Spaltöffnungen Vibrationsgeschwindigkeiten empfangen, welche merklich gleich und dem Vorzeichen nach entgegen gesetzt sind, dass also die Minima fast vollständig dunkel sind.

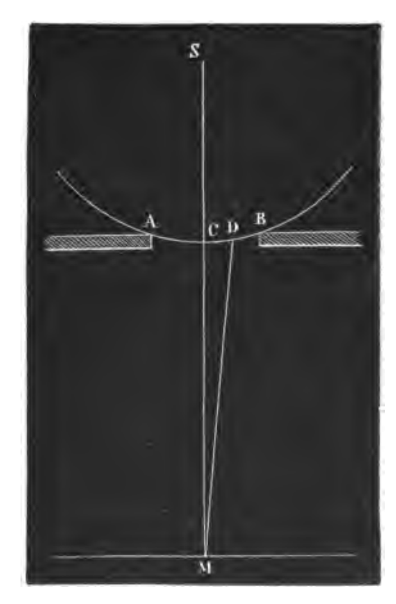
In Wirklichkeit erscheinen die Interferenzstreifen im Schatten des undurchsichtigen Zwischenraumes niemals vollkommen rein, da die interferirenden Strahlen durch Beugung modificirt sind. Bei Anwendung homogenen Lichtes bleibt zwar der Centralstreifen stets hell, zeigt jedoch eine grössere oder geringere Intensität, je nachdem für einen Punkt dieses Streifens jede der Spaltöffnungen eine ungerade oder gerade Zahl Elementarbogen enthält. Im weissen Lichte erscheint der Centralstreifen daher stets etwas gefärbt.

An der durch zwei parallele Spaltöffnungen hervorgebrachten Erscheinung demonstrirte Young zum ersten Male das Princip der Interferenz. Diese Erscheinung eignet sich auch zur Demonstration der Verschiebung der Streifen, welche durch Interposition eines dünnen Blättchens in den Gang eines der beiden Lichtbündel hervorgebracht wird (23).

119. Die kreisförmige Oeffnung.

Fresnel behandelte in seiner grossen Arbeit über die Diffraction ausschliesslich Erscheinungen, welche durch Beugungsschirme hervorgebracht werden, deren Begrenzungslinien unendlich lange, gerade Linien sind. Poisson, welcher der Commission angehörte, welche die Arbeit Fresnel's zu prüfen hatte, bemerkte, dass die vom Autor für die Intensität des gebeugten Lichtes aufgestellten Integrale sich für das Centrum der Beugungserscheinungen eines kreisrunden Schirmes und einer kreisrunden Oeffnung vollständig berechnen lassen und dass im ersten Falle eine Intensität erhalten wird, welche der völligen Abwesenheit des beugenden Schirmes entspricht, im zweiten Falle eine mit der Entfernung vom beugenden Schirme variable Intensität, merklich Null für gewisse durch ein einfaches Gesetz gegebene Entfernungen. Fresnel wurde eingeladen, diese unvermutheten und paradoxen Consequenzen seiner Theorie experimentell zu prüfen, und das Experiment bestätigte diese Consequenzen vollständig [1]).

Fig. 83.



Betrachten wir zunächst den Fall einer kreisförmigen Oeffnung und setzen wir voraus, dass der durch das Centrum der Oeffnung gehende Strahl auf der Ebene der Oeffnung senkrecht stehe. Es ist klar, dass die Erscheinung aus Ringen constanter Intensität bestehen muss.

[1]) *Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un écran et d'une ouverture circulaires éclairés par un point radieux, OEuvres complètes de* Fresnel, *t.* I, *p.* 365.

Wir wollen uns im Folgenden darauf beschränken, einen Ausdruck für die Intensität im Centrum der conischen Projection der Oeffnung aufzustellen. Sei (Fig. 83) S der leuchtende Punkt, M die Mitte des Bildes der Oeffnung, AB die einfallende Welle, D ein beliebiger Punkt auf derselben. Setzen wir

$$SC = a, \; CM = b, \; AC = r$$

und bezeichnen wir die variable Distanz DC durch ϱ und das Element der Kreiswelle AB, dessen Mitte D ist, durch $d\varrho$. Wird die Figur um SC als Axe gedreht, so beschreibt das Element $d\varrho$ eine Zone, deren Fläche $2\pi\varrho\, d\varrho$ ist.

Drücken wir die von einem dem Pole C entsprechenden Elemente der Welle auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit durch

$$d^2\sigma \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

aus, so ist die von jener Zone auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit

$$2\pi\varrho\, d\varrho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

wo

$$DM - CM = \delta.$$

Nach einer früheren Formel (60) haben wir

$$\delta = \varrho^2 \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right).$$

Die gesammte auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit ist sonach

$$\int_0^r 2\pi\varrho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varrho^2 \frac{a+b}{2ab\lambda}\right) d\varrho$$

und folglich ist die Intensität in M

$$I = \left[\int_0^r 2\pi\varrho \cos \pi \frac{(a+b)\,\varrho^2}{ab\lambda} d\varrho\right]^2 + \\ + \left[\int_0^r 2\pi\varrho \sin \pi \frac{(a+b)\,\varrho^2}{ab\lambda} d\varrho\right]^2 \\ = \frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2}\left[\sin^2 \pi \frac{(a+b)\,r^2}{ab\lambda} + \left(1 - \cos \pi \frac{(a+b)\,r^2}{ab\lambda}\right)^2\right]$$

oder schliesslich

$$I = 4\,\frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2} \sin^2 \pi \frac{(a+b)\,r^2}{2ab\lambda}.$$

Die Intensität im Punkte M ist also variabel mit der Entfernung dieses Punktes von der beugenden Oeffnung. Die Minima im Punkte M sind sämmtlich der Null gleich und entsprechen der Gleichung

$$\frac{(a+b)\,r^2}{2\,ab\lambda} = n$$

oder

$$MA - MC = 2n\,\frac{\lambda}{2},$$

liegen also an Stellen, für welche die Wegdifferenz des Centralstrahles MC und des Randstrahles MA eine gerade Zahl halber Wellen beträgt.

Die Maxima der Intensität sind gleich

$$4\,\frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2},$$

d. i. gleich der Intensität, welche von der dem Pole C zunächst liegenden Elementarzone allein auf M übertragen wird, d. i. einer Calotte, deren Mitte C dem Punkte M um eine halbe Wellenlänge näher liegt, als ein Punkt ihrer Peripherie. Da die von dieser Calotte allein herrührende Vibrationsgeschwindigkeit doppelt so gross ist, als die der ganzen Kugelwelle entsprechende, so betragen die Maxima der Intensität in M das Vierfache der Intensität, welche durch die ungestörte Welle hervorgebracht wird.

Die Intensität in M ist näherungsweise ein Maximum, wenn

$$\frac{(a+b)\,r^2}{2\,ab\lambda} = \frac{2n+1}{2}$$

oder

$$MA - MC = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2},$$

d. i., wenn die Wegdifferenz des Centralstrahles und eines Randstrahles eine ungerade Zahl halber Wellen beträgt.

Diese Resultate lassen sich leicht auch auf elementarem Wege ableiten. Wir zerlegen den wirksamen Theil der sphärischen Welle in Elementarzonen (61); die Flächen derselben sind merklich gleich gross. Enthält nun die wirksame Calotte eine gerade Zahl Elementarzonen, was der Fall ist, wenn die Wegdifferenz zwischen dem Centralstrahle und einem Randstrahle eine gerade Zahl halber Wellen beträgt, so heben sich die von den einzelnen Zonen herrührenden Vibrationsgeschwindigkeiten gegenseitig auf und die Intensität in M ist Null; enthält die wirksame Calotte eine ungerade Zahl Elementarzonen, so reducirt sich ihre Wirkung merklich auf die der ersten Elementarzone und folglich beträgt die Intensität in M das Vierfache der Intensität, welche durch die ganze Welle hervorgebracht würde.

Bei den Versuchen, welche Fresnel anstellte, um die Consequenzen seiner Theorie bezüglich der Erleuchtung des Centrums der conischen Projection einer kreisförmigen Oeffnung zu prüfen, benutzte er theils homogenes rothes, theils weisses Licht. Bei Benutzung homogenen

Lichtes ist es schwer, die Orte der Maxima und Minima mit Genauigkeit zu bestimmen. Besser eignet sich das weisse Licht. Man kann für eine gegebene Distanz vom beugenden Schirme die Intensität der einzelnen Hauptfarben berechnen, mit Hülfe der Newton'schen Formel für Farbenmischung die resultirende Farbe berechnen und sehen, ob an der betreffenden Stelle die erhaltene Farbe wahrgenommen wird. In dieser Art wurde die Theorie zuerst von Fresnel und später von Abria geprüft, und es ergab sich eine vollständige Uebereinstimmung.

Betrachtet man das Phänomen in immer grösseren Entfernungen von der beugenden Oeffnung, so gelangt man zu einer Grenze, jenseits welcher kein Wechsel der Maxima und Minima mehr stattfindet. Die Wegdifferenz zwischen dem Randstrahle und dem Centralstrahle ist

$$r^2\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right).$$

Wird b grösser als $\frac{r^2}{\lambda}$, so wird der variable Theil dieser Wegdifferenz, $\frac{r^2}{2b}$, kleiner als $\frac{\lambda}{2}$, kann also nicht mehr um $\frac{\lambda}{2}$ abnehmen. Die Grenze, jenseits welcher kein Wechsel der Maxima und Minima mehr eintritt, ist also

$$b = \frac{r^2}{\lambda}.$$

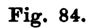
120. Der kreisförmige Schirm.

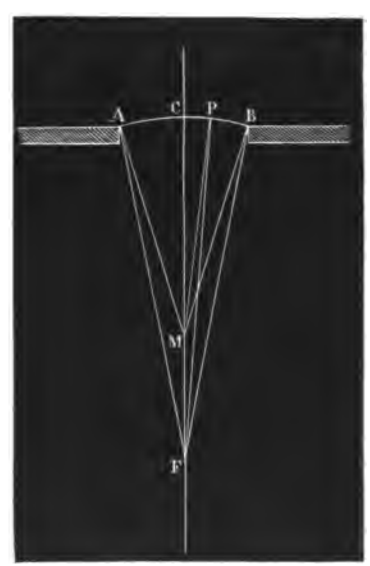
Es mögen die von einem Lichtpunkte ausgehenden Strahlen so auf einen kreisförmigen Beugungsschirm auffallen, dass der das Centrum des Schirmes treffende Strahl auf der Ebene desselben senkrecht steht. Wir wissen (61), dass die auf einen Punkt der Axe des geometrischen Schattens des Schirmes übertragene Vibrationsgeschwindigkeit die Hälfte der Vibrationsgeschwindigkeit beträgt, welche durch die erste Elementarzone des wirksamen Theiles der durch die Peripherie des Schirmes gehenden Kugelwelle allein auf jenen Punkt übertragen würde. Da wir die Ausdehnung des beugenden Schirmes als gering voraussetzen, und da die Elementarzonen in der Nähe des Poles merklich gleichen Flächeninhalt haben, so beträgt die auf einen Punkt der Axe des geometrischen Schattens übertragene Vibrationsgeschwindigkeit nahezu die Hälfte jener Vibrationsgeschwindigkeit, welche die den Pol zunächst umgebende Elementarzone allein auf jenen Punkt übertragen würde. Da ferner die von einer Kugelwelle auf einen äusseren Punkt übertragene Vibrationsgeschwindigkeit ebenfalls die Hälfte der von der ersten Elementarzone allein übertragenen Vibrationsgeschwindigkeit beträgt, so folgt, dass die Intensität in einem Punkte der Axe des geometrischen Schattens des

beugenden Schirmes merklich so gross ist, als wäre der beugende Schirm nicht vorhanden. Diese merkwürdige, von Poisson gezogene Consequenz der Theorie Fresnel's fand ihre experimentelle Bestätigung durch Versuche, welche Arago vermittelst eines Schirmchens von 2 mm Durchmesser anstellte.

121. Beugungserscheinungen im Fernrohr bei nicht eingestelltem Oculare.

Wenn das Ocular eines stark vergrössernden Fernrohres genau eingestellt ist, so erscheint das Bild eines Sternes als eine helle, von Ringen umgebene Scheibe (89). Arago hat bemerkt, dass, wenn man das Ocular allmälig einschiebt, die helle Scheibe sich vergrössert, in ihrer Mitte ein dunkler Punkt sichtbar wird, welcher sich zu einer dunklen Scheibe ausdehnt, und dass bei fortgesetzter Einschiebung des Oculars im Centrum dieser dunklen Scheibe wieder ein heller Punkt auftaucht, welcher sich zu einer hellen Scheibe vergrössert, u. s. w.[1]). Diese Erscheinungen sind Beugungserscheinungen und werden vergrössert durch ein Diaphragma mit kreisförmiger Oeffnung, welches vor oder hinter der Objectivlinse angebracht wird. Die sphärische convexe Welle, welche beim Durchgange des Lichtes durch das Objectiv entsteht und den Brennpunkt der Objectivlinse zum Mittelpunkte hat, kann in irgend einer Lage, z. B. ACB (Fig. 84), als Ausgangspunkt der Elementarwellen angesehen werden. Wenn das Ocular eingestellt ist, so entsteht auf der Retina ein genaues Bild der Ebene, welche durch den Brennpunkt F geht und auf der Axe des Fernrohres senkrecht steht. Wenn man das Ocular einschiebt, so entsteht auf der Retina das Bild einer Ebene, welche auf der Axe des Fernrohres senkrecht steht und sich zwischen Brennpunkt und Objectiv befindet, also etwa durch den Punkt M geht. Die Erleuchtung der verschiedenen Punkte der Retina ist dann proportional der Erleuchtung der verschie-


Fig. 84.



1) *Notice sur la scintillation; OEuvres complètes, t.* VII, *p.* 1.

denen Punkte der durch M gehenden Ebene. Um die Erleuchtung im Punkte M zu berechnen, setzen wir

$$CF = a, \ CM = b, \ CA = r,$$

nehmen auf der Welle ACB einen beliebigen Punkt P an, bezeichnen durch ϱ die Entfernung CP, durch δ die Wegdifferenz $MP - MC$ und durch $d^2\sigma \sin 2\pi \frac{t}{T}$ die durch das Element C der Wellenfläche auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit. Lassen wir die Figur um die Axe CF rotiren, so beschreibt das dem Punkte P entsprechende Element der Kreiswelle ACB eine Zone, welche auf M die Vibrationsgeschwindigkeit

$$2\pi\varrho\, d\varrho \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

überträgt.

Im Dreiecke MPF ist

$$(b + \delta)^2 > (a - b)^2 + a^2 - 2a(a - b)\cos\frac{\varrho}{a}.$$

Setzen wir

$$\cos\frac{\varrho}{a} = 1 - \frac{\varrho^2}{2a^2},$$

so folgt

$$\delta = \frac{\varrho^2(a - b)}{2ab}.$$

Die Gesammtvibrationsgeschwindigkeit in M ist sonach:

$$\int_0^r 2\pi\varrho \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho^2(a - b)}{2ab\lambda}\right) d\varrho,$$

woraus folgt

$$I = 4\,\frac{a^2b^2\lambda^2}{(a - b)^2}\sin^2\pi\,\frac{(a - b)\,r^2}{2ab\lambda}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich, dass die Intensität in M ein Maximum oder Minimum ist, je nachdem die Wegdifferenz zwischen dem Randstrahle MA und dem Centralstrahle MC einer ungeraden oder geraden Zahl halber Wellenlängen gleich ist, und dass die Minima Null sind.

Von derselben Art sind offenbar auch die von A. Poppe[1]) beschriebenen Interferenzfiguren, welche man wahrnimmt, wenn man durch eine kleine Oeffnung von beliebiger Gestalt, in welcher sich ein Wasser- oder Oeltropfen befindet, nach einem Lichtpunkte blickt. Das Phänomen ist in anderer Weise wohl jedem, der Augengläser zu tragen pflegt, bekannt. Befinden sich auf dem Glase einzelne kleine Wassertröpfchen, so erzeugen

---

1) Pogg. XCV, 481.

die etwa von einer Strassenlaterne kommenden und durch den Tropfen gebrochenen Lichtstrahlen auf der Retina eine erhellte Fläche, auf welcher, parallel ihrer Peripherie, Interferenzstreifen auftreten.

Ist die gebrochene Wellenfläche nicht sphärisch, so können die sich ergebenden Erscheinungen auch aus (49) hergeleitet werden.

122. Scintillation.

Das Bild eines Fixsternes erscheint nicht immer als eine ruhende leuchtende Scheibe von constanter Helligkeit, Grösse und Farbe. Es zeigen sich unter Umständen rasche oscillatorische Bewegungen von sehr geringer Elongation, sowie ein rascher Wechsel der Intensität, scheinbaren Grösse und Farbe, mag der Stern mit freiem Auge oder mit Hülfe eines Fernrohres betrachtet werden. In diesen Veränderungen besteht das von atmosphärischen Zuständen abhängige Scintilliren oder Funkeln der Sterne [1]).

Die Scintillation zeigt sich an den Fixsternen und zwar bei solchen von der ersten bis zur siebenten Grösse mit Farbenwechsel, bei den übrigen ohne denselben. Die Planeten scintilliren in geringem Grade, die grösseren weniger als die kleineren. Ueberdies soll es eine terrestrische Scintillation geben, wenn die Lichtquelle intensiv und punktförmig ist und sich zwischen derselben und dem Beobachter eine längere Luftstrecke befindet.

Die Lebhaftigkeit der Scintillation hängt von den Zuständen der Atmosphäre ab: sie ist im Allgemeinen wenig bemerkbar in Nächten, welche sich zu astronomischen Beobachtungen eignen, woraus hervorgeht, dass eine wenig homogene und stark bewegte Atmosphäre die Entstehung des Phänomens begünstigt. Die Lebhaftigkeit des Scintillirens hängt ferner ab von der Höhe des Sternes und nimmt bei zunehmender Höhe ab. Montigny beobachtete am Sirius bei 14° Höhe 60 bis 70 Farbenwechsel in der Secunde und Arago bemerkte eine nachweisbare Scintillation noch bei einer Höhe von 81 Graden. Simon Marius, im 17. Jahrhundert, beobachtete das Funkeln der Sterne mittelst eines vom Oculare befreiten Fernrohres; das Bild des Sternes dehnt sich zu einer Scheibe von beträchtlichem Durchmesser aus und lässt die Scintillation in eigenthümlicher Weise erkennen. Die Scheibe erscheint an verschiedenen Stellen verschieden gefärbt und verschieden hell, wobei die Vertheilung der Farben und Intensitäten beständig wechselt. Dieselben Beobachtungen macht man bei eingeschobenem Oculare. Nicholson versetzte das Fernrohr in kleine schwingende Bewegungen: das Bild des Sternes verwandelt sich in eine Lichtlinie, welche an verschiedenen Stellen verschieden gefärbt erscheint. Diese Methode der Beobachtung wurde in neuerer

---

[1]) Arago, *OEuvres complètes, t.* VII, 1.

Zeit von Montigny und anderen verbessert und Nicholson's unregelmässige Bewegung des Sternbildes durch eine regelmässige und regulirbare ersetzt.

Arago machte die folgende bemerkenswerthe Beobachtung.

Bringt man vor das Objectiv eines Fernrohres von ungefähr 1,7 m Brennweite einen Schirm mit einer kreisförmigen Oeffnung von ungefähr 47 mm Durchmesser, so erscheint das Bild eines Sternes bei eingestelltem Oculare als eine von Ringen umgebene Scheibe (88); schiebt man das Ocular ein, so erweitert sich das Bild des Sternes und es entsteht in der Mitte ein dunkler Flecken. Bei weiterem Einschieben des Oculars bildet sich in der Mitte des dunklen Fleckens eine helle Scheibe, so dass der dunkle Flecken zu einem dunklen Ringe wird, worauf in der Mitte wieder ein dunkler Punkt erscheint u. s. w. Diese Erscheinungen entstehen durch Lichtbeugung und wurden in (121) berechnet. Bringt man nun das Ocular in die Stellung, bei welcher die Mitte des Bildes zum ersten Male dunkel erscheint, und richtet man das Instrument auf einen scintillirenden Stern, so verursacht die Scintillation ohne Bewegung des Oculars ein plötzliches Auftauchen und Wiederverschwinden des leuchtenden Punktes in der Mitte des dunklen Fleckens. Die Zahl solcher Veränderungen in einer bestimmten Zeit dient Arago als Maass für die Lebhaftigkeit der Scintillation. Beispielsweise ergab eine Beobachtung vom 14. Januar 1851:

Name des Sternes	Zahl des Erscheinens des hellen Punktes während 5 Minuten
Sirius	40
Rigel	17
Aldebaran	13
Capella	8

Die Spectra scintillirender Sterne zeigen rasche Veränderungen. Diese sind lebhafter im brechbareren Theile des Spectrums. Nach Arago rührt die Scintillation daher, dass die Strahlen, welche sich in einem Punkte der Retina treffen, um daselbst ein Bild eines Sternes zu erzeugen, beim Durchlaufen der Atmosphäre kleine gegenseitige Gangunterschiede gewinnen, welche von kleinen Ungleichheiten der durchlaufenen Luftschichten herrühren und das Verschwinden gewisser Farben durch Interferenz und in Folge dessen die Färbung des Bildes verursachen. Indem der Zustand der Atmosphäre sich beständig ändert, ändern sich die Bedingungen der Interferenz und es entsteht der Wechsel der Intensität

und Farbe. Es ist indessen wohl zu bemerken, dass diese Erklärung der Scintillation gegen das Gergonne'sche Theorem (3) verstösst.

Später wurden andere Theorien aufgestellt, namentlich von Montigny [1]), welcher die Scintillation durch totale Reflexionen an Trennungsflächen von Luftschichten verschiedener Beschaffenheit zu erklären sucht.

Montigny berechnet, dass Strahlen, welche auf der Retina ein weisses Bild eines Sternes hervorbringen, in höheren Schichten der Atmosphäre in Folge der mit der astronomischen Strahlenbrechung verbundenen Dispersion keineswegs dieselbe Bahn zurücklegen, dass vielmehr die verschiedenfarbigen Strahlen daselbst beträchtlich auseinandergehen. Er findet z. B. bei einer Zenithdistanz von 80 Graden, dass der rothe und violette Strahl in Entfernungen von 100, 1000, 10000 Meter vom Beobachter eine gegenseitige Distanz von 0,03, 0,53, 5,3 m haben. Indem so die verschiedenfarbigen Strahlen durch verschiedene Theile der Atmosphäre gehen, ist es möglich, dass gewisse Farben durch totale Reflexion ausgeschieden werden.

123. Virtuelle Beugungsbilder.

Das durch irgend einen Beugungsschirm hervorgebrachte Phänomen wird durch die Fresnel'sche Lupe so wahrgenommen, wie es sich auf einen Schirm projiciren würde, dessen Ebene mit der Focalebene der Lupe zusammenfiele. Nähert man die Lupe dem beugenden Schirme, so nimmt die Breite der Streifen ab und sie verschwinden, wenn die Focalebene der Lupe mit der Ebene des beugenden Schirmes zusammenfällt, d. i., wenn letzterer deutlich wahrgenommen wird. Setzt man die Annäherung der Lupe an den beugenden Schirm fort, so zeigt der Versuch, dass die Beugungsstreifen neuerdings erscheinen und bei fortgesetzter Bewegung an Breite zunehmen [2]). In diesem Falle ist die Lupe auf eine Ebene eingestellt, welche sich zwischen dem beugenden Schirme und der Lichtquelle befindet, so dass auf der Retina Elementarstrahlen zur Interferenz kommen, welche vom beugenden Schirme divergirend ausgehen.

124. Lamellare Beugungserscheinungen.

Substituirt man für den durch eine gerade Linie begrenzten Beugungsschirm (106) eine dünne Lamelle eines durchsichtigen Körpers, so ändert sich das Phänomen wesentlich. Ist (Fig. 85) *abcd* die Lamelle, so vereinigen sich in einem Punkte *h* der Focalebene der Fresnel'-

[1]) *Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique,* XXVIII, 1. — [2]) Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichtes, S. 48.

schen Lupe nicht nur Elementarstrahlen, welche von den Punkten der Fläche *ae*, sondern auch solche, welche von den Punkten der Fläche *ab* ausgehen. Solcher Art sind nach Fresnel die Streifen, welche Arago[1]) an den Schlieren der Glimmerplatten bemerkte. Beim Durchgange durch die Lamelle erfahren die Strahlen eine Gangverzögerung.

Fig. 85.



Ist ε die Dicke des Blättchens, $\frac{v}{v'} = n$ der Brechungsexponent desselben, so braucht ein Strahl, um an dem Blättchen vorbeizukommen, die Zeit

$$\tau = \frac{\varepsilon}{v}$$

und um durch das Blättchen zu gelangen

$$\tau' = \frac{\varepsilon}{v'}.$$

Es ergiebt sich die Zeitdifferenz

$$\tau' - \tau = \frac{\varepsilon}{v'} - \frac{\varepsilon}{v}$$

und die Wegdifferenz

$$v\,(\tau' - \tau) = \sigma = (n - 1)\,\varepsilon.$$

Das Entstehen dieser Art von Interferenzstreifen ist an die Bedingung geknüpft, dass der Gangunterschied der Strahlen, welche durch die Lamelle und neben derselben vorbeigehen, nicht beträchtlich sei (23). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so nimmt man das Phänomen des einfachen Randes (106) wahr[2]), indem die gegenseitige Einwirkung der Strahlen, welche durch die Lamelle und neben derselben vorbeigehen, unmerklich wird und sich aus ihrer Mischung eine einfache Addition von gleichartigem Lichte ergiebt (22).

Später beschäftigte sich G. Quincke[3]) eingehender mit diesen Erscheinungen. Er gab verschiedene Methoden an, geeignete Lamellen herzustellen. So eignen sich dünne Collodiumhäutchen, die auf Spiegelglasplatten angetrocknet, mit dem Messer eingeschnitten und mit einer Pincette vom Glase abgezogen werden. Man kann die Blättchen auch

---

[1]) Arago's Werke, deutsch von Hankel, VII, 88. — [2]) Fresnel, *Mémoire sur la diffraction de la lumière; Mém. de l'acad. t.* V, 451, 1826. — [3]) Pogg. CXXXII.

auf einer geschliffenen Glasplatte mit planparallelen Flächen herstellen und mit dieser gleichzeitig in den Gang der Lichtstrahlen einschalten. Um verschiedene Verzögerungen des Strahles nach Belieben zu erhalten, sind keilförmige Collodiumschichten anzuwenden, die so erhalten werden, dass man auf eine gegen die Horizontale schwach geneigte und mit Rändern versehene Spiegelglasplatte Collodiumlösung giesst, und diese keilförmige Flüssigkeitsschicht langsam eintrocknen lässt. Mit einem Messer und Lineal wird ein Schnitt senkrecht gegen die Schneide des Keils gezogen und das Collodium auf der einen Seite der Schnittlinie entfernt. Ein anderes Verfahren besteht darin, einen cylinderförmigen Körper auf eine Spiegelglasplatte zu legen, zwischen beide Collodiumlösung zu bringen und eintrocknen zu lassen. Besser, als Collodiumlamellen eignen sich solche aus Jodsilber. Man erzeugt auf einer Spiegelglasplatte mit einer Cylinderfläche von 120 mm Radius eine keilförmige Silberschicht, entfernt das Silber auf der einen Seite einer senkrecht zur Cylinderaxe gezogenen Linie und verwandelt den übrigen Theil durch aufgelegtes Jod in Jodsilber. Quincke bestimmte die Dicke der keilförmigen Jodsilberschicht an den verschiedenen Stellen mit Hülfe der Newton'schen Farbenstreifen, welche die Lamellen im reflectirten Lichte zeigen.

Da die in Rede stehenden Beugungsstreifen in jedem einzelnen ihrer Punkte durch Strahlen hervorgebracht werden, welche fast genau an derselben Stelle durch die Glasplatte gegangen sind, so werden sie auch von Unregelmässigkeiten der Substanz und der Oberfläche des Glases fast gar nicht beeinflusst, so dass man gewöhnliches Spiegelglas benutzen, also dieselben durch geringe Hülfsmittel herstellen kann.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall einer geradlinig begrenzten Lamelle von überall gleicher Dicke. Es zeigen sich hier ausser den äusseren Fransen (106) auch innere. In der Nähe der Schattengrenze ist ein breiter dunkler Streifen wahrnehmbar, welchen Quincke das erste Minimum genannt hat. Es ist nun zunächst klar, dass der geometrische Schatten der Lamellengrenze dunkel oder hell sein muss, je nachdem die eine Hälfte der Strahlen, welche durch die Lamelle gehen, gegen die andere Hälfte eine Phasenverzögerung erleidet, welche ein ungerades oder ein gerades Vielfache von π beträgt. Die Phasenverzögerung der durch die Lamelle gegangenen Strahlen ergiebt sich aus der oben berechneten Wegdifferenz

$$\Delta : 2\pi = (n - 1)\,\varepsilon : \lambda$$

$$\Delta = 2\pi \cdot \frac{(n-1)\,\varepsilon}{\lambda}.$$

Wir haben also an der Grenze des geometrischen Schattens der Lamelle Dunkelheit oder Helligkeit, je nachdem die Phasendifferenz Δ:

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}(n-1)\,2\pi = \pm(2m+1)\,\pi$$

oder
$$\Delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}(n-1)\,2\pi = \pm\,2m\pi$$

ist, wo m jede ganze Zahl 0, 1, 2... und λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft bedeuten. Nennt man λ_1 die Wellenlänge des Lichtes in der Lamelle selbst, so ist $n\lambda_1 = \lambda$ und Dunkelheit für

$$\varepsilon = (2m+1)\frac{n}{n-1}\frac{\lambda_1}{2},$$

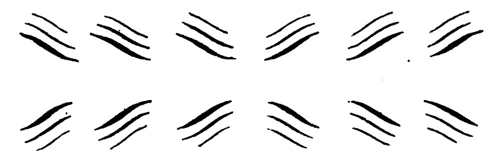
Helligkeit für

$$\varepsilon = 2m\frac{n}{n-1}\frac{\lambda_1}{2}.$$

Ist $\Delta = 2m\pi$, so ist nicht nur an der Grenze des geometrischen Schattens Helligkeit, sondern es treten überhaupt keine Interferenzstreifen auf. Es ist dies erklärlich, wenn man bedenkt, dass die durch die Lamelle gehenden Wellenflächen gegen die an derselben vorübergehenden eine ganze Zahl von Wellen gewinnen, sich also nach dem Durchgange ohne Phasensprung wieder an dieselben anschliessen. Es kann daher vorkommen, dass die Minima für eine bestimmte Farbe, etwa blau, sehr deutlich und intensiv sind, für eine andere Farbe dagegen, z. B. für Roth, kaum wahrnehmbar.

Am einfachsten lässt sich eine Uebersicht über diese Erscheinungen an keilförmigen Jodsilberschichten gewinnen, die mit einer Cylinderfläche auf Spiegelglasplatten erhalten werden. Die Jodsilberschicht wird durch gerade Linien senkrecht zur Schneide des Doppelkeiles begrenzt. Auf irgend einer geraden Linie parallel zur Schneide des Doppelkeiles herrscht dann jene Vertheilung des Lichtes, welche der Dicke des Doppelkeiles in der Nähe jener Geraden entspricht. Quincke verwendete nicht einen einfachen Rand, sondern brachte senkrecht zur Kante des Doppelkeiles einen Spalt an, welcher so breit war, dass die äusseren Streifen durch den anderen Rand des Spaltes nicht mehr beeinflusst wurden. Man sieht nun in der Nähe des geometrischen Schattens der Spaltränder eine

Fig. 86.



Reihe von Inteferenzstreifen, die symmetrisch gegen die Mitte des Spaltes und die Schneide des Doppelkeiles liegen und gegen einander convergiren nach der Seite hin, wo das Jodsilber am dünnsten ist. Fig. 86 stellt die Lage der Minima für eine horizontale Stellung der Spaltöffnung vor, doch sind die inneren Interferenzstreifen fortgelassen. Die verticale

Mittellinie der Figur entspricht der Linie, längs welcher die Dicke des Doppelkeiles der Null gleich ist.

Man ersieht aus der Figur, wie bei gewissen Lamellendicken keine Interferenz stattfindet. Nähert man das Mikroskop allmälig der Lamelle, so nimmt der gegenseitige Abstand der einzelnen Minima, welche derselben Lamellendicke entsprechen, ab und man sieht in dem Augenblicke die verschiedenen Minima mit dem Rande der Spaltöffnung zusammenfallen, wo das Mikroskop auf die Grenzlinie deutlich eingestellt ist. Bei weiterem Nähern erscheinen die Minima wieder, aber in umgekehrter Reihenfolge. Die äusseren Minima erscheinen auf der Seite des Lamellenrandes, auf der früher die inneren erschienen, und umgekehrt (123).

Statt einen Spalt in einer dünnen Jodsilberschicht anzubringen, kann man auch einen schmalen Streifen Jodsilber stehen lassen, so dass er auf beiden Seiten durch breite Streifen Luft begrenzt ist. Die Erscheinung ist der eben beschriebenen ähnlich, doch convergiren die Minima nicht nach der dünnsten Stelle der Lamelle, sondern divergiren.

Neigt man die Platte gegen die einfallenden Strahlen oder vergrössert man den Einfallswinkel, so verändern sich die Dimensionen der Beugungsfigur entsprechend dem grösseren Phasenunterschiede der durch die Lamelle und neben derselben vorbeigegangenen Strahlen.

Aehnliche Interferenzstreifen, wie sie durchgehendes Licht in der Nähe des geometrischen Schattens der Grenze einer dünnen Lamelle zeigt, lassen sich auch im reflectirten Lichte beobachten. Die interferirenden Lichtstrahlen kann man ansehen als herrührend von den virtuellen Bildern des leuchtenden Punktes in den oberen Flächen der Lamelle und des Planglases, auf welchem die Lamelle liegt. Der Phasenunterschied der interferirenden Strahlen oder die Lage der Interferenzstreifen gegen den geometrischen Schatten des Lamellenrandes hängt von dem Incidenzwinkel i, unter dem das Licht auf Lamelle und Planglas fällt, nicht aber vom Brechungsexponenten der Substanz der Lamelle ab. Kommen die Strahlen von einem unendlich weit entfernten Punkte, so ist der Wegunterschied

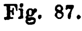


Fig. 87.



(Fig. 87) der Strahlen AO und BO gleich $AC + AB$ und der Phasenunterschied

$$\Delta = \frac{AC + AB}{\lambda} 2\pi = \frac{2\varepsilon \cos i}{\lambda} 2\pi = \frac{2\varepsilon \cos i}{n\lambda_1} 2\pi,$$

wo ε und n die Dicke und den Brechungsexponenten der Lamelle bezeichnen und sich λ und λ_1 auf Luft und die Substanz der Lamelle beziehen. In der Nähe des geometrischen Randschattens ist also

Helligkeit für . . . . $\varepsilon = 2m \cdot \frac{n}{\cos i} \frac{\lambda_1}{4}$,

Dunkelheit für . . . . $\varepsilon = (2m + 1) \frac{n}{\cos i} \frac{\lambda_1}{4}$.

Beobachtet man die Erscheinung an einem Spalt in einer doppeltkeilförmigen Jodsilberschicht oder an einem Streifen einer solchen, so nimmt man Systeme von Interferenzstreifen wahr, welche den bei durchgelassenem Lichte erhaltenen ähnlich sind. Gleichzeitig mit diesen Interferenzstreifen bemerkt man auch die breiten parallel der Kante des Keils verlaufenden Newton'schen Interferenzstreifen, welche den Newton'schen Ringen entsprechen. Angenommen, ein Maximum oder Minimum der Beugungsfigur fiele mit dem $p$ten Newton'schen Interferenzstreifen zusammen, so ist die Dicke ε_p der Lamelle nach dem Secantengesetze (34) durch die Relation bestimmt

$$\varepsilon_p = \frac{p}{\cos i_1} \frac{\lambda_1}{4},$$

wo i_1 der zu i gehörige Brechungswinkel im Innern der Lamelle ist. Setzt man diesen Werth in die letzte Gleichung ein, so hat man

Helligkeit für . . . . $p = 2m \frac{n \cos i_1}{\cos i}$,

Dunkelheit für . . . . $p = (2m + 1) \frac{n \cos i_1}{\cos i}$.

Die eben besprochenen Erscheinungen können auch mit zwei Fresnel'schen Interferenzspiegeln erhalten werden, die genau parallel stehen und so verschoben sind, dass beide Spiegelebenen nicht genau in derselben Ebene liegen, sondern dass die eine dem leuchtenden Punkte etwas näher steht, als die andere. Die Interferenzstreifen rücken um so näher an einander, je weiter sie von der Berührungslinie der Spiegel entfernt liegen und sind, da die eine Spiegelebene gewöhnlich an den verschiedenen Stellen verschieden weit über die andere hervorragt, meist nicht genau parallel der Berührungslinie der Spiegelebenen, sondern, wie bei einer keilförmigen Lamelle, schwach gegen dieselbe geneigt. Möglichst einfach und wohl am sichersten erhält man zwei parallele Spiegelflächen, die nahezu aber nicht genau in derselben Ebene liegen,

dadurch, dass man einen Glas- oder Silberspiegel (polirte Silberbelegung auf Glas) mit dem Diamanten in zwei Stücke schneidet und diese neben einander auf eine grössere Spiegelglasplatte legt. Haben beide Spiegel dieselbe Temperatur, so liegen ihre Flächen in derselben Ebene und man nimmt nichts Besonderes wahr. Ist aber der eine Spiegel ein wenig wärmer, als der andere, so treten in der Nähe des geometrischen Schattens der Berührungslinie die in Rede stehenden Interferenzstreifen auf, sobald man die von einem leuchtenden Punkte ausgegangenen Strahlen von den Spiegeln reflectiren lässt und mit einer Lupe untersucht. Die Methode ist so empfindlich, dass man aus der Lage der Interferenzstreifen gegen den geometrischen Schatten ersehen kann, ob und welche Punkte des einen Spiegels höhere Temperatur haben. Beim Abkühlen des künstlich erwärmten Spiegels sieht man, wie im Allgemeinen an verschiedenen Stellen die Abkühlung verschieden schnell verläuft; die Interferenzstreifen verschieben sich dann längs des geometrischen Schattens der Berührungslinie und erscheinen gegen dieselbe geneigt. Statt durch Erwärmen kann man auch durch einen schwachen Druck die Dicke des einen Spiegels kleiner als die des anderen machen und dadurch die Interferenzstreifen hervorrufen.

Innerhalb des geometrischen Schattenkegels, der durch einen leuchtenden Punkt und die Ränder eines schmalen Spaltes in einer durchsichtigen Lamelle bestimmt ist, treten ebenfalls Interferenzstreifen auf. Ansehen und Lage der inneren Minima hängen ausser von der Spaltbreite und den Entfernungen der Lichtquelle und der Lupe von der Lamelle auch noch von der Dicke und dem Brechungsexponenten der Lamelle ab.

Eine vollständige Theorie der lamellaren Beugungserscheinungen hat Jochmann[1]) gegeben.

125. Verwandte Erscheinungen[2]).

Belegt man die Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Prismas theilweise mit einer undurchsichtigen Metallschicht, und lässt das Licht eines leuchtenden Punktes unter einem Winkel, grösser als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, auffallen, so zeigt das reflectirte Licht in der Nähe des geometrischen Schattens der Grenze des belegten und unbelegten Theiles der Hypotenusenfläche schön gefärbte Interferenzstreifen in ganz ähnlicher Art, wie sie an der Grenze durchsichtiger Lamellen wahrgenommen werden.

Diese Erscheinungen führen sich auf die lamellaren Beugungserscheinungen durch die Annahme zurück, dass das Licht bei der totalen

[1]) Pogg. CXXXVI. — [2]) G. Quincke, Pogg. CXXXII.

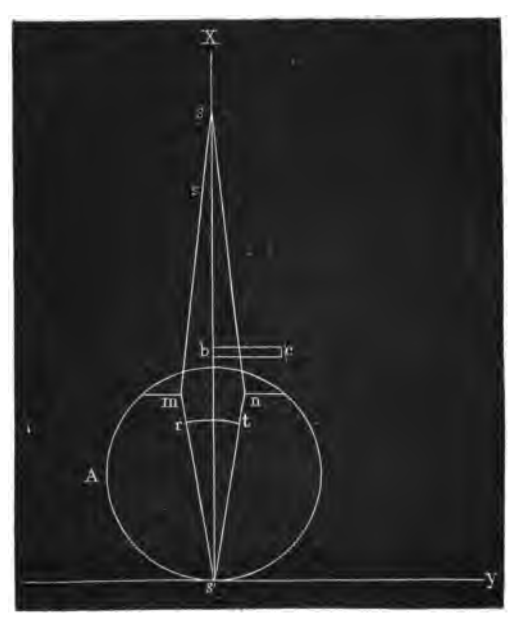
und der metallischen Reflexion ungleiche Phasenverzögerungen erleide. Es verhält sich dann alles so, als wäre das eine Strahlenbüschel durch eine Lamelle von bestimmter Dicke gegangen.

126. Die Talbot'schen Streifen.

Schiebt man, ein homogenes Spectrum betrachtend, ein dünnes, durchsichtiges Blättchen, z. B. ein Deckgläschen von 0,1 mm Dicke, von der Seite des Violett her, d. i. von der Seite, an welcher sich die Kante des Prismas befindet, vor die halbe Pupille, so erscheint das Spectrum parallel den Fraunhofer'schen Linien in helle und dunkle Streifen getheilt [1]).

Die Erscheinung erklärt sich aus der Interferenz der durch das Blättchen gehenden und der neben demselben vorbeigehenden Strahlen bei ihrer Vereinigung auf der Netzhaut.

Fig. 88.



Sei (Fig. 88) s ein homogener leuchtender Punkt, bc das Blättchen, mn die Pupille, smn der einfallende Lichtkegel, s' der Vereinigungspunkt der Strahlen auf der Netzhaut. Sind a die Dicke des Blättchens, λ und λ'

[1]) Talbot, Gilbert's Ann. 1837.

die Wellenlängen bezogen auf Luft und die Substanz des Blättchens, n' der Brechungsexponent des Blättchens, so ist

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n'}.$$

Die Zahl der Wellen, welche auf eine Strecke a in Luft und der Substanz des Blättchens kommen, ist

$$\frac{a}{\lambda} \text{ und } \frac{a}{\lambda'}.$$

Die Verzögerung R eines Strahles durch die Platte gegen einen Strahl, der diese Strecke durch die Luft zurückgelegt hat, ist sonach

$$R = \frac{a}{\lambda'} - \frac{a}{\lambda}$$

oder

$$R = \frac{a}{\lambda}(n' - 1).$$

Die Strahlen, welche von einem Punkte des Spectrums kommen, um sich in einem Punkte der Netzhaut zu vereinigen, werden also zur Hälfte um jenen Betrag R verzögert ankommen, so dass im Vereinigungspunkte s' je nach der Grösse von R Verstärkung oder Aufhebung durch Interferenz eintreten wird. Beachtet man nun, dass im Spectrum von Roth nach dem Violett die Wellenlänge abnimmt, der Brechungsindex aber zunimmt, so ersieht man aus dem für R gefundenen Ausdrucke, dass der Gangunterschied continuirlich durch gerade und ungerade Multipla der halben Wellenlänge geht und wie hierdurch das Phänomen der Talbot'schen Streifen entsteht.

Der Versuch kann auch in der Weise angestellt werden, dass das Blättchen irgendwo zwischen Spalte und Beobachtungsfernrohr eines Spectralapparates derart von der bezeichneten Seite her eingeschoben wird, dass die Hälfte der Strahlen durch dasselbe, die andere Hälfte durch Luft oder überhaupt ein Medium von geringerer Brechbarkeit gehen [1]).

Auch kann man mit Vortheil die Verzögerungen statt durch dünne Blättchen durch Einschaltung eines Jamin'schen Compensators (46) vor dem Objective des Fernrohres hervorbringen [2]).

Die vorstehende, auf das Princip der Interferenz gegründete Erklärung des Phänomens giebt zwar Aufschluss über die Existenz und über die Lage der Streifen, nicht aber über gewisse, sich auf die Abhängigkeit der grösseren oder geringeren Wahrnehmbarkeit der Streifen von gewissen experimentellen Bedingungen beziehende, Modificationen der Erscheinung, deren hervortretendste die ist, dass die Streifen im

[1]) J. Stefan, Pogg. CXXIII. — [2]) V. Dvořak, Pogg. CXLVII.

Spectrum nicht erscheinen, wenn das Blättchen die Hälfte der Pupille bedeckt, nach deren Seite das rothe Ende des Spectrums liegt. Dreht man das Blättchen aus seiner ursprünglichen Lage um die Axe des Auges, so werden die Streifen undeutlich, verschwinden nach einer Drehung um 90 Grade vollständig und erscheinen erst nach einer Drehung um 270 Grade wieder.

Um diese Modificationen der Erscheinung ebenfalls durch Rechnung zu erhalten, ist es nöthig, auf die Elementarstrahlen zurückzugehen oder, mit anderen Worten, das Phänomen als Beugungsphänomen zu berechnen. Dies hat Airy[1]) gethan.

Die von s kommenden Strahlen (Fig. 88) convergiren hinter der Linse und bilden kugelförmige, nach der Seite der Retina concave Wellenflächen. Sei rt eine solche unmittelbar an der Linse liegende Wellenfläche. Der Mittelpunkt derselben liegt auf der Retina, wenn das Auge auf den Punkt s eingestellt ist, doch beziehen sich die Rechnungen Airy's auf den allgemeineren Fall, wo das Centrum der Wellenfläche vor, auf oder hinter der Retina liegt.

Die Wellenfläche rt betrachtet Airy als den Ausgangspunkt der Elementarstrahlen und berechnet das Resultat ihrer Interferenz auf der Netzhaut, also das hervorgebrachte Beugungsphänomen.

Ist das Auge auf den Punkt s eingestellt, so entstehen in der Nähe des geometrischen Bildes von s einige Maxima und Minima der Intensität, welche bezüglich s' im Allgemeinen keine symmetrische Lage haben. Beträgt die Verzögerung $(2n + 1)\,x$, so ist das Bild nicht einfach ausgelöscht, wie die rohere Theorie angiebt, vielmehr das Licht statt im Orte des geometrischen Bildes seitlich um diesen und zwar im Allgemeinen unsymmetrisch vertheilt. Das Phänomen, um welches es sich handelt, entsteht aus der Uebereinanderlagerung der durch sämmtliche Punkte s des betrachteten Spectrums hervorgebrachten Elementarphänomene. Airy's genauere Berechnung des Phänomens führt bezüglich der Lage der Talbot'schen Streifen zu denselben Resultaten, wie die oben gegebene Berechnung, zeigt aber, dass die Minima nicht, wie es jene Theorie verlangt, sämmtlich Null sind, dass vielmehr der Helligkeitsunterschied der Maxima und Minima des Talbot'schen Streifensystems unter Umständen bis 0 erniedrigt werden kann und dass die Streifen insbesondere in jenem Falle verschwinden müssen, wo das Blättchen von der rothen Seite eingeführt wird. Verschiedene Darstellungen und Ausführungen der Theorie Airy's wurden gegeben von E. Esselbach[2]) und V. Dvořak[3]). Die Erscheinungen, welche sich bei Anwendung doppeltbrechender Platten, z. B. Gypsplatten, zeigen, wurden theoretisch und experimentell behandelt von L. Ditscheiner[4]).

---

[1]) Pogg. LIII. — LVIII. — [2]) Pogg. 1856. — [3]) Wien. Ber. 1873. — [4]) Carl, Rep. V.

127. Fortsetzung. Die vollständige Berechnung.

Wir wollen in Kürze die vollständige Berechnung der Talbot'schen Streifen geben für den Fall, wo das Auge auf das Spectrum eingestellt ist.

Sei (Fig. 88) $Xs'Y$ ein Coordinatensystem, dessen y-Axe in der Nähe von s' auf die Retina fällt und sei der Rand des Blättchens parallel der z-Axe. Wir betrachten, wie dies auch Airy gethan hat, das Phänomen nur längs der y-Axe.

Es sei R die durch das Blättchen hervorgebrachte Verzögerung, y die Ordinate eines Punktes der Geraden, auf welcher wir das Phänomen betrachten, h der Radius der Pupille, c der Radius der Welle rt (Fig. 88), und werde

$$\frac{\pi y h}{\lambda c} = w$$

gesetzt. Wir setzen voraus, das Auge sei auf eine bestimmte Stelle des Spectrums eingestellt und betrachten das Bild auf der Netzhaut nur in der Nähe des Punktes s'. Wir setzen ferner das Spectrum in hinreichender Entfernung voraus, um die von einem Punkte des Spectrums kommenden Strahlen als unter einander parallel ansehen zu können. R wird dann nur abhängen von der Blättchendicke, dem Brechungsexponenten und der Wellenlänge (126), während wir die Neigung der Strahlen gegen das Blättchen vernachlässigen können, auch wenn Punkte des Spectrums in Betracht kommen, welche dem fixirten Punkte benachbart sind. Wir denken uns ferner, die Pupille ersetzt durch eine Spaltöffnung von der Breite $2h$, die brechende Wirkung der Medien des Auges durch eine Linse von der Brennweite c und die Retina durch einen Projectionsschirm. Endlich möge das Spectrum als linear gedacht werden und sein Bild mit der y-Axe zusammenfallen.

Dies vorausgesetzt betrachten wir zunächst nur die Wirkung des Punktes s auf die Punkte der y-Axe. Nach der Interferenztheorie, welche wir in (126) abgehandelt haben, entsteht in s' ein Bild des Punktes s, nach der Beugungstheorie hingegen, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen, entsteht in der Nähe von s' ein noch zu bestimmendes Beugungsbild. Dasselbe wird aus einigen wenigen Maximis und Minimis bestehen, welche im Allgemeinen um s' keineswegs symmetrisch vertheilt sein werden. Wir können, um dieses Beugungsbild zu finden, nach (76) und (55) von der in (79) für das durch zwei Spaltöffnungen hervorgebrachte Phänomen gefundenen Formel

$$I = 4\,a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cos^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}$$

Gebrauch machen, wenn wir nur

$$a = h$$

$$\sin \delta = \frac{y}{c}$$

und

$$\frac{\pi d \sin \delta}{\lambda} = \pm \frac{R}{2}$$

setzen, je nachdem das Blättchen auf der negativen oder positiven Seite der y liegt.

Wir erhalten sonach für die von dem fixirten Punkte des Spectrums herrührende Intensität in der Nähe von s' bei Unterdrückung eines constanten Factors:

$$I = \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos^2 \left(w \pm \frac{R}{2}\right).$$

Wir haben einen einzigen Lichtpunkt von bestimmter Farbe vorausgesetzt. Betrachten wir nunmehr die Wirkung der diesem Punkte unmittelbar benachbarten Punkte des Spectrums. Die entfernteren Punkte des Spectrums lassen wir ausser Acht, da ihre Beugungsbilder keinen Einfluss mehr auf die Erleuchtung des Punktes s' haben werden. Ist das geometrische Bild eines der in Betracht gezogenen Punkte des Spectrums auf dem Projectionsschirm durch die kleine Ordinate η gegeben, so erhalten wir die von diesem Punkte des Spectrums auf den Punkt, dessen Ordinate y ist, übertragene Intensität, wenn wir in der obigen Formel $y - \eta$ für y setzen, so dass allgemein

$$w = \frac{\pi h}{\lambda c} (y - \eta)$$

wird. Es ist nun nicht nur w, sondern auch R eine Function von η, da die Verzögerung mit wachsender Brechbarkeit zunimmt. Wir können, da wir nur ein sehr kleines Stückchen des Spectrums in Betracht ziehen, diese Function als linear annehmen und haben, wenn das Spectrum auf der Retina mit dem violetten Ende nach der positiven Seite der y liegt,

$$R = \varphi \eta,$$

wo φ eine Constante bedeutet.

Wir erhalten also, wenn überdies der Einfachheit wegen

$$\frac{\varphi \lambda c}{\pi h} = C$$

gesetzt wird, für die auf den Punkt y von irgend einem Punkte des betrachteten Theiles des Spectrums übertragene Intensität:

$$I = \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos^2 \left[w\left(1 \mp \frac{C}{2}\right) \pm \frac{\varphi}{2}\, y\right].$$

C kann als constant angesehen werden, da in dem in Betracht kommenden Theile des Spectrums sich λ nicht merklich verändert. Wir erhalten sonach für die Gesammtintensität im Punkte y, welche der Uebereinanderlagerung der Beugungsbilder entspricht, welche durch die dem Punkte s benachbarten Punkte des Spectrums hervorgebracht werden:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos^2 \left[w\left(1 \mp \frac{C}{2}\right) \pm \frac{\varphi}{2}\, y\right] \delta w$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos(\varphi y) \times \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos \left[w\,(2 \mp C)\right] \delta w.$$

Das Integral wird zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen, da die Wirkung entfernterer Theile des Spectrums rasch unmerklich wird.

Bezeichnen wir nun durch R' das dem Punkte y entsprechende R und setzen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos\left[w\,(2 \mp C)\right] \delta w = const,$$

so erhalten wir für die Gesammtintensität im Punkte y:

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{const}{2} \cdot \cos R'.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Lage der Streifen nur von R', also der Verzögerung der einzelnen Farben im Blättchen abhängt, dass also die auf das Princip der Interferenz gegründete Theorie bezüglich der Lage der Streifen zu einem völlig richtigen Resultate führt; sie besagt jedoch ausserdem, dass die Intensität der Maxima und Minima von der in der Gleichung vorkommenden Constante abhängt, dass also die Minima nicht stets Null sind, wie es die Interferenztheorie verlangt. Was nun diese Abhängigkeit betrifft, so ist zunächst ersichtlich, dass es nicht einerlei ist, ob in dem Ausdrucke für *const* das Zeichen $-$ oder $+$ steht, d. i. ob das Blättchen von der violetten oder rothen Seite des als Lichtquelle dienenden Spectrums eingeschoben wird. Betrachten wir den letzteren Fall zuerst. Wir haben:

$$const = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \cos(2 + C)\, w\,\delta w = 0$$

und

$$I = \frac{\pi}{2},$$

d. h. die Intensität ist constant, es treten keine Streifen auf.

Wird hingegen das Blättchen von der violetten Seite eingeschoben, so haben wir

$$Const. = \frac{C}{2}\pi \qquad \text{für} \qquad C < 2$$
$$\text{„} \quad = \left(2 - \frac{C}{2}\right)\pi \qquad \text{„} \quad 2 < C < 4$$
$$\text{„} \quad = 0, \qquad \text{„} \quad 4 < C.$$

Man erhält also, wenn C zwischen 0 und 2 liegt:

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{2} \cos R,$$

wenn C zwischen 2 und 4 liegt:

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{C}{2}\right) \cos R,$$

und wenn C grösser als 4 ist:

$$I = \frac{\pi}{2},$$

d. h. auch in diesem letzteren Falle entstehen keine Streifen.

Die Bedingung des Entstehens der Streifen ist also, dass das Blättchen von der violetten Seite des als Lichtquelle dienenden Spectrums oder der Seite der Prismenkante eingeschoben werde und dass

$$C < 4.$$

Am deutlichsten erscheinen die Streifen, wie man aus den obigen Ausdrücken ersieht, wenn

$$C = 2.$$

Setzen wir für C seinen Werth, so erhalten wir für die grösste Deutlichkeit der Streifen:

$$\frac{\varphi \lambda c}{\pi h} = 2.$$

Bezeichnen wir durch Δy und $\Delta y'$ die Breite der Talbot'schen Streifen und der Beugungsstreifen, so haben wir

$$\Delta y = \frac{2\pi}{\varphi} \quad \Delta y' = \frac{c\lambda}{h}.$$

Dies oben eingesetzt, giebt

$$\Delta y = \Delta y'.$$

Die Streifen treten also am deutlichsten hervor, wenn die Abstände der Helligkeitsminima in beiden Interferenzsystemen gleich sind.

128. Cornu's geometrische Methode zur Discussion der Beugungsprobleme.

Cornu's Methode[1]) gestattet, die meisten classischen Probleme der Beugung fast anschaulich zu lösen mittelst einer ein- für allemal construirten Curve. Wir haben für die Vibrationsgeschwindigkeit in einem Punkte der Beugungsfigur (101):

$$\int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b+\delta}{\lambda}\right) ds,$$

wo

$$\delta = \frac{s^2(a+b)}{2ab}.$$

Die Integration kann geometrisch ausgeführt werden.

Sind (Fig. 75) Am_1, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, ... die unendlich kleinen Bogen ds der Kreiswelle (101), so functionirt jeder derselben als Lichtquelle und sendet zu dem Punkte P (Fig. 75), dessen Erleuchtung bestimmt werden soll, eine Schwingungsbewegung von unendlich kleiner Amplitude $d\sigma$. Tragen wir die Amplituden $d\sigma$ von einem festen Punkte μ aus auf und legen sie End an End, $\mu\mu_1$, $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu_3$ ..., so dass ihre Winkel mit einer festen Richtung die Phasen vorstellen. Wir erhalten so eine polygonale Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Gerade, welche zwei ihrer Punkte verbindet, durch ihre Grösse und Richtung die Amplitude und die Phase repräsentirt, welche aus den von den entsprechenden Bogen der Welle ausgesandten Schwingungsbewegungen hervorgehen. Es folgt dies aus dem Satze, dass harmonische Bewegungen nach der Regel des Kräftenparallelogramms zusammengesetzt werden können (55).

Um die Gleichung dieser repräsentativen Linie zu finden, hat man

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = k\,ds,$$

wenn k eine Constante bedeutet. Setzt man ferner den Phasenwinkel der vom Pole kommenden Bewegung der Null gleich, so wird

$$tg\, 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 = \frac{dy}{dx}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$x = k \int \cos 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 ds$$

$$y = k \int \sin 2\pi \frac{a+b}{2ab\lambda} s^2 ds.$$

Hierdurch ist die Gestalt der Curve bestimmt, welche, nebenbei bemerkt,

[1]) C. R. LXXVIII, 113.

die leicht zu erweisende Eigenschaft besitzt, dass der Krümmungsradius sich verkehrt wie der Bogen verhält.

Die transcendente Natur der Curve erlaubt keine vom Calcül unabhängige geometrische Construction, man muss die Tafel der numerischen Werthe der Fresnel'schen Integrale (102) zu Hülfe nehmen. Man kann (101) die beiden letzten Gleichungen durch die folgenden beiden Gleichungen ersetzen:

$$x = k\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2dv$$

$$y = k\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2dv.$$

Die beiden Integrale sind die Fresnel'schen Integrale (101). Wir wollen zunächst von der absoluten Grösse der Curve absehen und haben als Gleichung derselben:

$$x = \int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2dv$$

$$y = \int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2dv.$$

Um einen Punkt der Curve zu finden, nehme man für v eine beliebige Zahl an und entnehme der Tafel der Fresnel'schen Integrale die Werthe von x und y, welche zu einem Punkte der Curve führen. Die Curve (Fig. 89) wurde also construirt, indem man die Werthe der Fresnel'schen Integrale als Abscissen und Ordinaten auftrug und die Grenze v um je 0,1 variirte. Diese Curve hat die Gestalt einer doppelten Spirale, besitzt ein Centrum im Anfangspunkte μ und zwei Asymptotenpunkte, I, I'. Diese Asymptotenpunkte, die auf einer unter 45^0 gegen die x-Axe geneigten Geraden liegen, rühren von dem Werthe $\frac{1}{2}$ her, gegen welchen die beiden Integrale für einen unendlichen Werth der oberen Grenze convergiren (101).

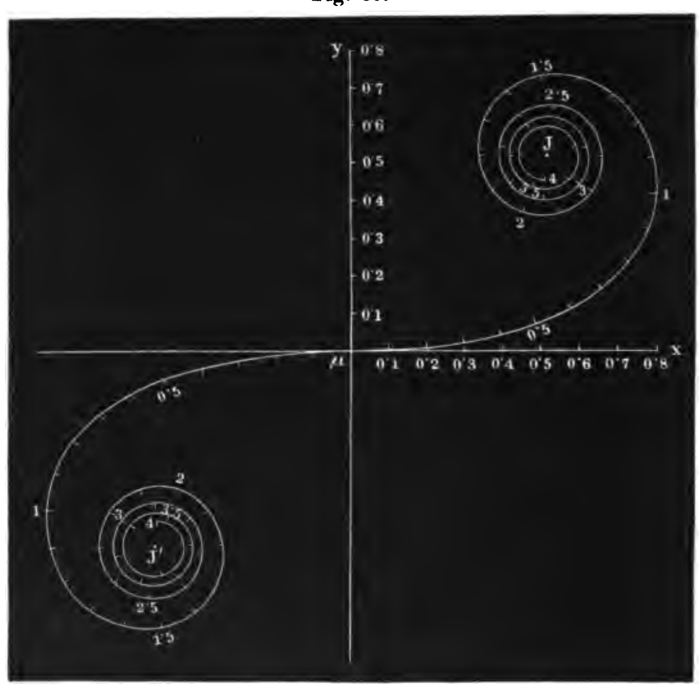
Schneidet man also (Fig. 89) von μ aus einen Bogen der Curve ab, dessen Länge gleich v ist, so sind die Coordinaten des Endpunktes des Bogens die Werthe der beiden Fresnel'schen Integrale für eine obere Grenze gleich v. Die Bogenlängen der Curve sind in der Figur angezeigt. Vermöge dieser Einrichtung kann diese Curve die Tafel der Integrale ersetzen. Man sieht auch, dass ein und dieselbe Curve für alle Fälle dienen kann. Man discutirt die Probleme, indem man die Bogenlänge v als Variable nimmt und durch die Formel (101)

$$s = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}$$

auf den Werth von s zurückgeht.

Auf die interessanten Anwendungen[1]) kann hier nicht weitläufiger eingegangen werden. Um indess den Geist dieser Methode begreiflich zu machen, möge der Fall der Beugung an dem geradlinigen Rande eines Schirmes (106) kurz auseinandergesetzt werden.

Fig. 89.



Betrachten wir einen Punkt N auf dem Projectionsschirme, sehr weit vom geometrischen Schatten entfernt. Dieser Punkt wird die Wirkung der Welle fast ganz auffangen. Die totale Intensität wird nun repräsentirt durch das Quadrat der Entfernung II'. In dem Maasse, als der Punkt N sich dem geometrischen Schatten nähert, wird die Welle von der einen Seite her immer mehr von dem Beugungsschirme verdeckt. Demgemäss ergiebt sich eine Begrenzung des einen Spiralbogens an einem Punkt p, der sich immer mehr von dem entsprechenden Asymptotenpunkt, z. B. I, entfernt. Der Radiusvector $I'p$, dessen Quadrat die Intensität misst, erleidet periodische Veränderungen. Die Differenz zwischen einem Maximum und darauffolgenden Minimum ist anfangs gering und vergrössert sich in dem Maasse, als N sich dem geometrischen Schatten nähert, denn die durch das bewegliche Ende des Radiusvector beschriebenen Spiralwindungen werden immer grösser. Nach einem

1) *Journ. de phys. theor. et appl.* 1874, III, 1.

letzten Maximum nimmt der Radiusvector fortwährend ab. An der Grenze des geometrischen Schattens, wenn der Radiusvector am Punkte μ anlangt, ist die Intensität auf $^1/_4$ ihres ursprünglichen Werthes reducirt und darüber hinaus geschieht die Abnahme ohne Maxima und Minima.

Man erkennt in dieser symbolischen Analyse des Phänomens die Erklärung der äusseren Fransen und die fortwährende Abnahme der Intensität in dem geometrischen Schatten (106).

Um den Gebrauch dieser Curve vollends darzuthun und sie auf die Bestimmung des numerischen Werthes der Lichtstärke in jedem Punkt des Schirmes anzuwenden, genügt es, durch z den Abstand dieses Punktes vom geometrischen Schatten zu bezeichnen, und zu bemerken, dass

$$\frac{z}{s} = \frac{a+b}{a} \quad \text{und} \quad v = s\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}.$$

Indem man das so gefundene v als Bogen auf der Curve abträgt, giebt der Abstand des Endpunktes des Bogens von einem der Asymptotenpunkte die Quadratwurzel der Lichtstärke.

IX.

Beugung nicht sphärischer Wellen.

---

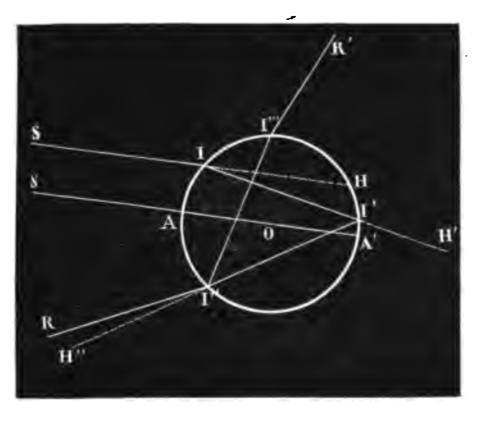
129. Die ältere Theorie des Regenbogens. (Descartes).

Wir setzen die Kenntniss der Erscheinung des Regenbogens voraus und bemerken nur, dass der Halbmesser des ersten Bogens 40^0 für Violett und 42^0 für Roth, der des zweiten Bogens 51^0 für Roth und 54^0 für Violett beträgt. Die Entstehung des Regenbogens wurde stets der Reflexion der Sonnenstrahlen in den Regentropfen zugeschrieben, die Theorie desselben zuerst von Descartes entwickelt, später von Airy in wesentlichen Punkten ergänzt. Wir beginnen mit der von Descartes gegebenen Theorie. Wir nehmen an, es falle auf einen sphärischen Wassertropfen ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen. Ein Theil derselben wird an der Vorderfläche durch Reflexion zerstreut und macht den Regenfall sichtbar; ein anderer Theil gelangt erst nach einer oder mehreren weiteren Reflexionen im Inneren des Tropfens in das Auge des Beobachters. Von diesen Strahlen betrachten wir zunächst jene, welche im Inneren des Tropfens eine einzige Reflexion erleiden. Trete ein unendlich dünnes Strahlenbündel in den Tropfen ein. Dasselbe wird bei seinem Eintritte gebrochen, hierauf an der Hinterfläche des Tropfens reflectirt und tritt nach einer zweiten Brechung an der Vorderfläche aus. Nach dem Austritte sind im Allgemeinen die Strahlen nicht mehr unter einander parallel, die Normalflächen des Strahlenbüschels (3) sind weder eben noch sphärisch. Es giebt jedoch stets eine gewisse Incidenz, bei welcher der Parallelismus der Strahlen eines einfallenden unendlich dünnen Strahlenbündels wenigstens theilweise erhalten bleibt. Ein solches Strahlenbündel erhält seine Intensität auf grössere Entfernungen und seine Strahlen heissen wirksame Strahlen.

Auf der Existenz der wirksamen Strahlen beruht die Theorie Descartes'.

Um die Richtung der wirksamen Strahlen zu finden, möge der Gang der Strahlen überhaupt betrachtet werden. Einer der Strahlen geht durch den Mittelpunkt des Tropfens und in Bezug auf diesen ist die Figur symmetrisch. Sei (Fig. 90) SA dieser Strahl und SI ein beliebiger einfallender Strahl; derselbe wird nach II' gebrochen, bei I' ein erstes Mal, sodann bei I'', I''', ... theils reflectirt, theils gebrochen. Ein austretender Strahl hat also zwei Brechungen und eine beliebige Zahl innerer Reflexionen erfahren.

Fig. 90.



Wir werden im Folgenden den Winkel, welcher die Richtungsänderung, in einem bestimmten Sinne genommen, angiebt, die Rotation und den Winkel der schliesslichen Richtung mit der der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung die Deviation des Strahles nennen. Demnach ist die Rotation des austretenden Strahles $I''R$ gleich $HII' + H'I'I'' + H''I''R$ und seine Deviation der spitze Winkel zwischen $I''R$ und IS. Wir bezeichnen ferner durch i und r den Incidenzwinkel und den Brechungswinkel des Strahles SI. Demnach erfährt dieser Strahl bei I durch Brechung eine Rotation gleich $i - r$, bei I' durch Reflexion eine Rotation gleich $\pi - 2r$, ebenso bei jeder folgenden Reflexion, und schliesslich beim Austritte durch Brechung abermals eine Rotation gleich $i - r$. Ist also ϱ die totale Rotation eines Strahles, welcher im Inneren des Tropfens k Reflexionen erfahren hat, so ist

$$\varrho = 2(i - r) + k(\pi - 2r).$$

Die wirksamen Strahlen sind offenbar jene, für welche die totale Rotation ein Maximum oder Minimum ist. Eine Differentiation der letzten Gleichung giebt:

$$1 - (k + 1)\frac{dr}{di} = 0.$$

Es ist ferner

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

und

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}.$$

Dies in die erste Gleichung eingesetzt, giebt

$$1 - (k + 1) \frac{\cos i}{n \cos r} = 0$$

oder

$$n^2 \cos^2 r = (k + 1)^2 \cos^2 i.$$

Andererseits ist

$$n^2 \sin^2 r = \sin^2 i$$

und man erhält durch Addition der beiden letzten Gleichungen

$$n^2 = 1 + (k^2 + 2k) \cos^2 i,$$

also schliesslich

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k^2 + 2k}}.$$

Für Wasser ist n ungefähr $\frac{4}{3}$, also $n^2 - 1$ gleich $\frac{7}{9}$. Der Nenner $k^2 + 2k$ ist mindestens gleich 3. Der für $\cos i$ gefundene Ausdruck ist also stets zulässig und es existirt für eine gegebene Zahl Reflexionen und eine bestimmte Farbe stets ein und nur ein Incidenzwinkel, für welchen die austretenden Strahlen wirksame Strahlen sind. Man sieht übrigens leicht, dass nur jene, dem Strahle SI benachbarten Strahlen mit SI parallel austreten, welche in der Ebene $SASI$ liegen.

Ist die Rotation der wirksamen Strahlen ein Maximum oder Minimum? Wir finden durch zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 \varrho}{d i} = - \frac{(1 - n^2) \sin i}{n^3 \cos^3 r} \cdot 2 (k + 1).$$

Diese Grösse ist stets positiv, also die Rotation der wirksamen Strahlen ein Minimum, welches immer die Zahl der Reflexionen sei.

Durch die Strahlen, welche eine einzige Reflexion erfahren, entsteht der innere oder erste Regenbogen.

Setzen wir in den erhaltenen Formeln $k = 1$, $n = \frac{4}{3}$, so wird für die wirksamen Strahlen

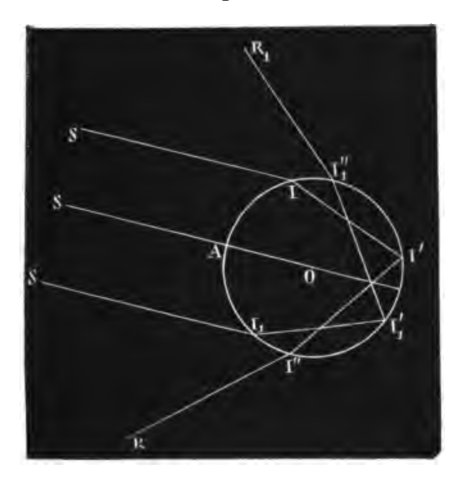
$$i = 59^0\ 23'$$
$$r = 40^0\ 12'$$
$$\varrho = \pi + 2i - 4r = 137^0\ 58'.$$

Die Deviation der wirksamen Strahlen ist in diesem Falle das Supplement der Rotation, also ungefähr 42 Grade. Denkt man sich eine Kegelfläche so gelegt, dass die Spitze derselben auf das Auge des Beobachters fällt, die Axe derselben durch die Sonne geht und ihr Oeffnungswinkel 42 Grade beträgt, so kann jede Seite dieser Kegelfläche, welche auf einen Tropfen trifft, als mit einem wirksamen Strahle zusammenfallend angesehen werden und folglich schneidet diese Kegel-

fläche den von den Regentropfen eingenommenen Raum in einem hellen Kreisbogen, welcher der innere Regenbogen ist.

Die Rotation der wirksamen Strahlen ist für die verschiedenen Farben verschieden; mit wachsendem Brechungexponenten nimmt der Incidenzwinkel ab, die Rotation zu, die Deviation ab; der innere Regenbogen ist also innen violett, aussen roth. Die genauen Werthe der Deviationen sind nach den gegebenen Formeln $40^0\ 17'$ für Violett und $42^0\ 1'\ 40''$ für Roth.

Fig. 91.



Die Rotation der wirksamen Strahlen ist stets ein Minimum, folglich die Deviation beim ersten Regenbogen ein Maximum. Es erklärt sich hieraus, warum der Raum innerhalb des ersten Regenbogens hell, ausserhalb desselben dunkel erscheint.

Es ist andererseits ersichtlich, dass in der Regel der sichtbare Theil des ersten Regenbogens von Strahlen herrührt, welche den Tropfen oberhalb des normal einfallenden Strahles treffen, da Strahlen, welche wie SI_1 (Fig. 91) den unteren Theil des Tropfens treffen, nach ihrem Austritte nach oben gerichtet sind. Der durch diese letzteren Strahlen hervorgebrachte Theil des Regenbogens wird beispielsweise von Bergspitzen aus wahrgenommen, wenn die Wolken sich unterhalb befinden.

Die Strahlen, welche zwei Reflexionen im Inneren des Tropfens erfahren, bringen den zweiten oder äusseren Regenbogen hervor, welcher in Folge der wiederholten Reflexion lichtschwächer erscheint, als der erste. Man erhält für den äusseren Regenbogen, wenn $k = 2$, $n = \frac{4}{3}$ gesetzt wird,

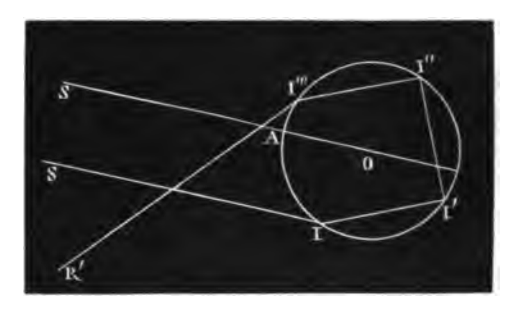
$$i = 72^0 \qquad r = 45^0\ 15'$$

$$\varrho = 2\pi + 2i - 6r = 232^0\ 30'.$$

Die Deviation der wirksamen Strahlen ist für den äusseren Regenbogen $\varrho - \pi$, also $52^0\ 30'$. Dieselbe wächst wie die Rotation mit der Brechbarkeit. Beim äusseren Regenbogen befindet sich also Roth innen, Violett aussen. Die genauen Werthe der Deviationen sind $50^0\,58'\,50''$ für Roth, $54^0\ 9'\ 20''$ für Violett. Der sichtbare Theil des äusseren Regenbogens entsteht durch Strahlen, welche in den unteren Theil des Tropfens eintreten und nach einer Rotation von $232^0\ 30'$ aus dem oberen Theil nach unten gerichtet austreten (Fig. 92).

Beim äusseren Regenbogen ist die Deviation der wirksamen Strahlen ein Minimum wie ihre Rotation. Tropfen, welche sich unterhalb des äusseren Bogens befinden, können also keine zweimal reflectirten Strahlen nach dem Auge des Beobachters senden. Halten wir dies mit dem früher Gesagten zusammen, so ergiebt sich, dass der Raum zwischen den beiden Bogen dunkel erscheinen muss, der Raum ausserhalb des äusseren Bogens aber durch zweimal reflectirte Strahlen erhellt wird. Nehmen wir also nur auf solche Strahlen Rücksicht, welche eine oder zwei Reflexionen erleiden, so ergiebt die Rechnung zunächst dem Centrum des Phänomens einen hellen Raum, auf welchen der innere Regenbogen, Roth nach aussen, ein dunkler Raum, der äussere Bogen, Roth nach innen, und wieder ein heller Raum folgen.

Fig. 92.



Es fragt sich, aus welchem Grunde unter den gewöhnlichen Bedingungen nicht mehr als zwei Bogen wahrgenommen werden, obgleich sich aus der Theorie eine unendliche Reihe von Bogen ergiebt? Zwar ist leicht begreiflich, dass die Bogen mit wachsender Ordnungszahl lichtschwächer werden und schliesslich verschwinden müssen; allein der Intensitätsunterschied zwischen dem ersten und zweiten Bogen ist nicht so beträchtlich, dass die Abwesenheit des dritten Bogens aus der Abnahme der Intensität erklärt werden könnte. Die Ursache ist vielmehr: der zweite und vierte Bogen bleiben unsichtbar, weil sie von dem vorausgesetzten Standpunkte des Beobachters aus nicht wahrgenommen werden können. Der nächste sichtbare Bogen nach dem zweiten wäre der fünfte, und dieser wird wegen seiner geringen Intensität nicht wahrgenommen. Man findet in der That für die Rotation der wirksamen Strahlen 318^0 bei drei und 404^0 bei vier Reflexionen; in beiden Fällen treten die wirksamen Strahlen an der Rückseite des Tropfens aus. Dem fünften Bogen entspricht eine Rotation von $486^0 = 360^0 + 126^0$, er müsste also bei hinreichender Lichtstärke sichtbar sein.

Das Spectrum des Regenbogens ist nicht homogen; da die Sonne einen scheinbaren Durchmesser von ungefähr $30'$ hat, so muss jede einfache Farbe ein Band von eben so grosser Breite bilden und es findet eine Uebereinanderlagerung der einfachen Farben statt.

Man kann den Regenbogen künstlich hervorbringen, wenn man das Sonnenlicht oder Strahlen, welche von einer künstlichen punktförmigen Lichtquelle kommen, auf ein mit Wasser gefülltes cylindrisches oder

kugelförmiges Glasgefäss, oder besser, auf einen cylindrischen Wasserstrahl fallen lässt. Man erhält so die Bogen, welche durch zurückkehrende, und jene, welche durch fortschreitende Strahlen hervorgebracht werden. Babinet[1]) hat in dieser Weise 14 Bogen gezählt und seine Messungen ergaben eine ziemlich gute Uebereinstimmung mit der Theorie.

Wir kehren zur Betrachtung des Ganges der Strahlen im Tropfen zurück, um dieselbe in einem Punkte zu vervollständigen. Es soll die Lage des Austrittspunktes eines beliebigen einfallenden Strahles SI (Fig. 90) bezüglich der Lage des Austrittspunktes des normal einfallenden Strahles SA bestimmt werden.

Der letztere Austrittspunkt ist A oder A', je nachdem die Zahl der Reflexionen eine ungerade oder gerade ist. Bei k Reflexionen ist also der Bogen zwischen dem Austrittspunkte des normal einfallenden Strahles und A, wenn der Radius des Tropfens gleich 1 gesetzt wird, $(k+1)\pi$. Man sieht auch leicht, dass für den Strahl SI der zwischen dem Eintritts- und dem Austrittspunkte enthaltene Bogen, wie $II'I''$, gleich $(k+1)(\pi - 2r)$ ist. Es folgt, dass der Bogen zwischen dem Austrittspunkte des Strahles SI und jenem des Strahles SA, welchen Bogen wir durch δ bezeichnen wollen, nach k Reflexionen ist:

$$\delta = 2(k+1)r - i.$$

Wir suchen die Maxima und Minima dieser Function durch Differentiation und erhalten:

$$2(k+1)\frac{dr}{di} - 1 = 0$$

$$4(k+1)^2 \cos^2 i = n^2 - 1 + \cos^2 i$$

$$\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{2(k+1)^2 - 1}.$$

Der für $\cos i$ gefundene Werth ist stets sehr klein, denn er ist für eine einzige Reflexion $\sqrt{\frac{7}{135}}$ und vermindert sich bei wachsender Zahl der Reflexionen. Da überdies

$$\frac{d^2\delta}{di^2} = (2k+1)\frac{d^2 r}{di^2},$$

und $\frac{d^2 r}{di^2}$ stets negativ ist, so folgt, dass der für den Incidenzwinkel erhaltene Werth stets einem Maximum von δ entspricht.

Die Winkeldistanz δ des Austrittspunktes des Strahles SI vom Austrittspunkte des Normalstrahles SA, ist also sehr klein, so lange SI

---

[1]) C. R. IV, 645.

sehr nahe an SA liegt, wächst mit dem Incidenzwinkel des Strahles SI und erreicht ein Maximum, wenn der Incidenzwinkel nahe 90 Grade beträgt, d. i. wenn der Strahl SI dem tangirenden Strahle nahe gekommen ist.

130. Die überzähligen Bogen (Young).

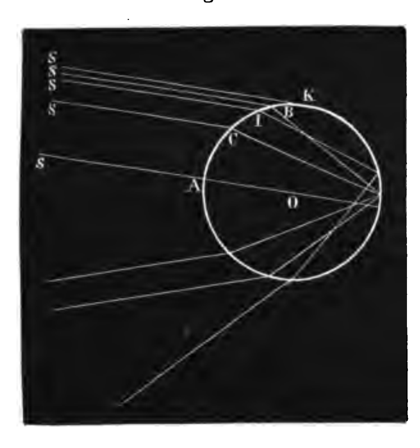
Die Theorie des Regenbogens, wie wir sie gegeben haben, ist insofern unvollständig, als auf die gegenseitige Interferenz der Strahlen, welche sich in einem Punkte der Netzhaut treffen, keine Rücksicht genommen ist; in der That lässt diese Theorie das Vorhandensein jener Farbenbogen unerklärt, welche man die überzähligen Bogen nennt. Diese zeigen sich oft innerhalb des ersten Regenbogens im unmittelbaren Anschlusse an denselben, seltener ausserhalb des zweiten; sie bestehen in einer Fortsetzung der Farbenfolge des Hauptregenbogens; im Anschlusse an das Violett des inneren sowie des äusseren Regenbogens folgen in öfterer Wiederholung die Farben Roth, Grün, Violett. Diese überzähligen Bogen sind am öftesten an den oberen Theilen des inneren Hauptregenbogens sichtbar.

Young[1]) gab zuerst die Erklärung der überzähligen Bogen. Er bemerkte, dass, da die Rotation der wirksamen Strahlen ein Minimum ist, Strahlen vorkommen müssen, welche zu beiden Seiten der wirksamen Strahlen in den Tropfen eintretend gleiche Rotationen erfahren und parallel austreten. Diese Strahlen durchlaufen im Tropfen ungleiche Wege und müssen daher zu Interferenzen Anlass geben, so lange die Wegdifferenz nicht zu gross ist, d. h. so lange sie nicht zu weit von den wirksamen Strahlen entfernt sind. Betrachten wir zunächst den inneren Regenbogen (Fig. 93). Sei SI der wirksame Strahl. Für diesen beträgt die Rotation 138 Grade. Für die einfallenden Strahlen zwischen SI und SA wächst die Rotation von 138 bis 180 Grade; für die einfallenden Strahlen zwischen SI und SK wächst sie ebenfalls mit der Annäherung an SK bis zu $2\pi - 4r$, wenn r der einem Einfallswinkel von 90 Graden entsprechende Brechungswinkel ist, d. i. für Wasser $48^0\ 35'$. Die Rotation des Strahles SK ist also $165^0\ 40'$. Es folgt, dass jedem Strahl, welcher wie SB den Tropfen oberhalb des wirksamen Strahles SI trifft, ein Strahl entspricht, welcher wie SC den Tropfen unterhalb SI trifft und in derselben Richtung austritt. Man sieht leicht, dass die beiden Strahlen SB und SC an derselben Stelle der Hinterfläche des Tropfens reflectirt werden. Da die Deviation der wirksamen Strahlen in unserem Falle ein Maximum ist, so ist die Deviation der eben betrachteten, parallel austretenden Strahlen kleiner als die der wirksamen Strahlen, und da diese parallel austretenden Strahlen ein Maximum oder Minimum der Intensität hervor-

[1]) *Phil. Trans.* 1804. 8.

bringen, je nachdem ihre Wegdifferenz eine gerade oder ungerade Zahl halber Wellenlängen beträgt, so muss an der Innenseite des ersten Regenbogens eine Folge Maxima und Minima für jede einfache Farbe und eine Farbenfolge für weisses Licht entstehen. Nur die den wirksamen Strahlen zunächst liegenden Strahlen treten unter einer hinreichend kleinen Wegdifferenz aus, um Interferenzen hervorzubringen, so dass die überzähligen Bogen nur in der Nähe des Hauptregenbogens wahrgenommen werden. Ein Farbenstreifen von bestimmter Ordnungszahl entspricht immer einer bestimmten Wegdifferenz. Diese wächst bei gleichbleibender Deviation mit der Grösse des Tropfens; je grösser also die Tropfen sind, desto schmaler müssen die überzähligen Bogen werden. Da die Tropfen während des Fallens an Grösse zunehmen, müssen die überzähligen Bogen an der höchsten Stelle des Hauptregenbogens am breitesten erscheinen, und sind deshalb oft nur an eben dieser Stelle wahrnehmbar.

Fig. 93.



Die mit den äusseren Regenbogen in Verbindung stehenden überzähligen Bogen erklären sich in analoger Weise.

Die überzähligen Bogen werden in grosser Zahl an künstlich hervorgebrachten Regenbogen wahrgenommen. Babinet[1]) konnte am inneren durch einen Wasserstrahl hervorgebrachten Regenbogen 16 überzählige Bogen wahrnehmen und am äusseren Regenbogen acht.

131. Vollständige Erklärung des Regenbogens (Airy).

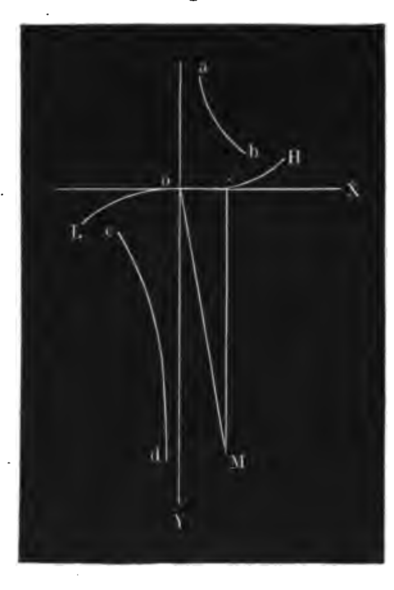
Hatte Young die Unvollständigkeit der Theorie des Cartesius erkannt, so war es Airy, welcher die vollständige Theorie in allen Einzelheiten ausarbeitete[2]). Airy's Theorie gründet sich auf die Betrachtung der aus dem Tropfen tretenden Wellenflächen. Diese sind in ihren reellen oder virtuellen Lagen betrachtet Rotationsflächen, deren Axe der normal einfallende Strahl ist. Jeder Meridianschnitt einer solchen Fläche ist eine Evolvente der caustischen Linie, welche von den in der Schnittebene austretenden Strahlen gebildet wird. Wir beschränken unsere

---

1) C. R. IV. — 2) *Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic, Trans. of the Soc. of Cambr.*, VI, 379.

Betrachtung auf eine solche Schnittebene. Die Strahlen, welche oberhalb des Centralstrahles eintreten und eine einzige Reflexion erfahren, also dem ersten Hauptregenbogen angehören, bilden nach ihrem Austritte in der gedachten Schnittebene, welche wir als Ebene der Figur annehmen (Fig. 94), eine caustische Linie. Der Durchschnitt der austretenden Wellenfläche mit der Ebene der Figur bildet eine Curve HL, welche von den Strahlen senkrecht durchschnitten wird und eine Evolvente der caustischen Linie ist.

Fig. 94.



Die Curve HL hat im Punkte O, in welchen sie von dem wirksamen Strahle durchschnitten wird, eine Krümmung gleich Null, oder der Punkt O ist ein Inflexionspunkt der Curve. ab und cd stellen Stücke der caustischen Linie vor, welche aus zwei unverbundenen unendlichen Zweigen in entgegengesetzten Richtungen besteht, mit einer gemeinschaftlichen Asymptote, dem wirksamen Strahle.

Sei XOY (Fig. 94) ein Coordinatensystem. Für den Punkt O der Curve, HL ist

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und die Gleichung der Curve HL in der Nähe des Punktes O ist:

$$y = Dx^3$$

oder

$$y = -\frac{x^3}{3\,a^2},$$

wenn

$$D = -\frac{1}{3\,a^2}$$

gesetzt wird. Es soll nun die Wirkung der Welle auf einen Punkt M berechnet werden, welcher in der Ebene XY so liegt, dass der Winkel MOY sehr klein ist. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes M durch p und q. Die Wirkung der Welle auf M reducirt sich auf die Wirkung der in der Nähe von O liegenden Theile der Welle (62). Wir zerlegen die Fläche der Welle durch Parallelkreise in unendlich schmale Elemente. Die Wirkung jedes Elementes reducirt sich auf jene eines Bruchtheiles des ersten Elementarbogens (62). Wir haben daher nur die Wirkung eines sehr schmalen, längs der Curve HL verlaufenden Strei-

fens der Wellenfläche von merklich gleicher Breite in Betracht zu ziehen, d. i. die Wirkung der linearen Welle HL.

Nehmen wir, um diese Wirkung zu berechnen, auf HOL in der Nähe von O einen Punkt S an, bezeichnen wir den Bogen OS durch s, die Entfernung SM durch δ und sei die durch das Element der linearen Welle, dessen Mitte O ist, auf M übertragene Vibrationsgeschwindigkeit

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot ds.$$

Da die Wirkung der entfernteren Elementarbogen der linearen Welle vernachlässigt werden kann, nehmen wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, das Integral, welches die gesammte, von der linearen Welle auf M übertragene Geschwindigkeit darstellt, innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ und ersetzen in demselben ds durch dx. Die auf M übertragene Gesammtgeschwindigkeit ist demnach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) dx.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten von S durch x und y und setzen wir für y aus der Gleichung der Curve HL seinen Werth, so wird:

$$\delta = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} =$$
$$= \sqrt{x^2 - 2px + p^2 + q^2 + \frac{2qx^3}{3a^2} + \frac{x^6}{9a^4}}.$$

Wir vernachlässigen das Glied mit x^6 und setzen

$$p^2 + q^2 = c^2,$$

um zu erhalten

$$\delta = c\left(1 - \frac{2px}{c^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{2qx^3}{3a^2c^2}\right)^{1/2}.$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von x, vernachlässigen die Glieder, welche höhere als die dritte Potenz von x enthalten und haben

$$\delta = c\left(1 - \frac{px}{c^2} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{qx^3}{3a^2c^2} - \frac{p^2x^2}{2c^4} + \frac{px^3}{2c^4} - \frac{p^3x^3}{2c^6}\right)$$
$$= c - \frac{px}{c} + \frac{c^2 - p^2}{2c^3}x^2 + \left[\frac{p(c^2 - p^2)}{2c^5} + \frac{q}{3a^2c}\right]x^3.$$

Da p im Vergleiche mit q sehr klein ist, kann für c oder $\sqrt{p^2 + q^2}$ auch $q + \frac{p^2}{2q}$ und in den Nennern selbst q gesetzt werden. Es ergiebt sich:

$$\delta = q + \frac{p^2}{2q} - \frac{px}{q} + \frac{x^2}{2q} + \left(\frac{p}{2q^3} + \frac{1}{3a^2}\right)x^3$$

und schliesslich unter Vernachlässigung von $\frac{p}{2q^3}$:

$$\delta = q + \frac{p^2}{2q} - \frac{px}{q} + \frac{x^2}{2q} + \frac{x^3}{3a^2}.$$

Um das Glied mit x^2 zu entfernen, führen wir eine neue Viariable x' ein, so dass

$$x = x' - \frac{a^2}{2q}.$$

Hierdurch wird, wenn die von x' unabhängigen Glieder durch f bezeichnet werden,

$$\delta = f - \frac{(4pq + a^2)}{4q^2} x' + \frac{x'^3}{3a^2}.$$

Dieser Ausdruck ist einer weiteren Vereinfachung fähig, da a^2 von der Ordnung der Grösse $\frac{x^3}{y}$ ist und neben $4pq$ weggelassen werden kann. Man erhält

$$\delta = f - \frac{p}{q} x' + \frac{x'^3}{3a^2}.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in das Integral für die auf M durch die lineare Welle übertragene Geschwindigkeit wird dieses Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{f}{\lambda} - \frac{1}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q} x'\right)\right] dx',$$

woraus sich für die Intensität des Lichtes in M ergiebt:

$$I = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q} x'\right) dx'\right]^2$$
$$+ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q} x'\right) dx'\right]^2.$$

Bemerkt man, dass das erste der Integrale doppelt so gross ist, als wenn es zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ genommen würde, und dass das zweite Integral der Null gleich ist, so erhält man für die Intensität in M

$$I = 4\left[\int_0^{\infty} \cos \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q} x'\right) dx'\right]^2.$$

Setzt man ferner

$$\frac{2\pi}{3a^2\lambda} x'^3 = \frac{\pi}{2} w^3,$$

woraus folgt

$$w = \sqrt[3]{\frac{4}{3a^2\lambda}}\, x',$$

und setzt man

$$m = \frac{4}{\lambda} \frac{p}{q} \sqrt[3]{\frac{3\,a^2 \lambda}{4}},$$

so nimmt das Integral, von welchem die Variationen der Intensität abhängen, die Form an

$$\int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (w^3 - mw)\, dw.$$

Die Intensität im Punkte M ist sonach, wenn k eine Constante bedeutet,

$$I = k \left(\int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (w^3 - mw)\, dw \right)^2.$$

Das hier vorkommende Integral kann als eine Function von m angesehen werden, welche Grösse selbst $\frac{p}{q}$ proportional ist, d. i. proportional der Tangente des Winkels MOY oder der Differenz der Deviationen des ins Auge gelangenden und des wirksamen Strahles. Airy hat die Werthe des Integrals

$$\int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (w^3 - mw)\, dw$$

für die positiven und negativen, um je $\frac{1}{10}$ von einander verschiedenen Werthe von m berechnet. Seine Methode gründet sich auf die Bemerkung, dass das Integral, zwischen einer etwas höheren Grenze und Unendlich genommen, merklich verschwindet; die Methode ist der von Fresnel zur Bestimmung seiner Integrale (102) angewendeten ähnlich. Airy fand, dass das Integral bei negativ wachsendem m rasch an Grösse abnimmt und sich der Null nähert, und bei positiv wachsendem m anfangs an Grösse zunimmt, bald ein erstes Maximum erreicht, und sodann durch eine Reihe minder intensiver Minima und Maxima geht. Der Verlauf der Function ist in der folgenden Tafel dargestellt.

Es resultiren mehrere wichtige Consequenzen. Man sieht, dass das erste, intensivste, Maximum nicht dem Werthe $m = 0$ entspricht, sondern einem positiven, wenig von Null verschiedenen Werthe von m. Es folgt, dass die Deviation des ersten Regenbogens nicht jener der wirksamen Strahlen genau gleichkommt, sondern dass sie etwas kleiner ist. Ist $\frac{p}{q}$ negativ, d. h. ist die Deviation grösser, als die der wirksamen Strahlen, so nimmt die Intensität rasch an Grösse ab. Die Helligkeit ausserhalb des ersten Regenbogens wird also rasch unmerklich, wenn nur die einmal reflectirten Strahlen in Betracht gezogen werden. Wächst $\frac{p}{q}$ po-

m	$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(w^3 - mw)\,dw$	Quadrate dieser Werthe
— 4,0	+ 0,00298	0,0000089
— 3,8	+ 0,00431	0,0000186
— 3,0	+ 0,00618	0,0000382
— 3,4	+ 0,00879	0,0000773
— 3,2	+ 0,01239	0,0001536
— 3,0	+ 0,01730	0,000299
— 2,8	+ 0,02393	0,000573
— 2,6	+ 0,03277	0,001074
— 2,4	+ 0,04442	0,00197
— 2,2	+ 0,05959	0,00355
— 2,0	+ 0,07908	0,00625
— 1,8	+ 0,10377	0,01077
— 1,6	+ 0,13461	0,01812
— 1,4	+ 0,17254	0,02977
— 1,2	+ 0,21839	0,04769
— 1,0	+ 0,27283	0,07444
— 0,8	+ 0,33021	0,11304
— 0,6	+ 0,40839	0,16678
— 0,4	+ 0,48856	0,23869
— 0,2	+ 0,57507	0,33071
0,0	+ 0,66527	0,44259
+ 0,2	+ 0,75537	0,57059
+ 0,4	+ 0,84040	0,70628
+ 0,6	+ 0,91431	0,83597
+ 0,8	+ 0,97012	0,94114
+ 1,0	+ 1,00041	1,00082
+ 1,2	+ 0,99786	0,99572
+ 1,4	+ 0,95606	0,91406
+ 1,6	+ 0,87048	0,75773
+ 1,8	+ 0,73939	0,54670
+ 2,0	+ 0,56490	0,31912
+ 2,2	+ 0,35366	0,12508
+ 2,4	+ 0,11722	0,013741
+ 2,6	— 0,12815	0,016422
+ 2,8	— 0,36237	0,13131
+ 3,0	— 0,56322	0,31721
+ 3,2	— 0,70874	0,50231
+ 3,4	— 0,78018	0,60868
+ 3,6	— 0,75516	0,58547
+ 3,8	— 0,66054	0,43631
+ 4,0	— 0,47446	0,22511

sitiv von der Null aus, ist also die Deviation kleiner, als die der wirksamen Strahlen, so geht die Intensität durch eine Reihe Maxima und Minima; das erste Maximum entspricht dem Hauptregenbogen, die übrigen, welche immer kleiner werdenden Deviationen angehören, den überzähligen Bogen, welche an der Innenseite des Hauptbogens sichtbar sind.

Die Rechnung giebt in der angedeuteten Weise die Werthe von m, welche die Intensität zu einem Maximum machen. Die entsprechenden Winkeldistanzen $\frac{p}{q}$ vom Hauptregenbogen sind diesen Werthen von m proportional, wie aus den obigen Formeln ersichtlich ist. Da die Constante, mit welcher $\frac{p}{q}$ multiplicirt werden muss, um m zu geben, nicht genau bestimmt werden konnte, war es nicht möglich, die absoluten Werthe jener Winkeldistanzen zu berechnen, wohl aber ihre Grössenverhältnisse, welche von der Grösse der Tropfen unabhängig sind.

Die absoluten Werthe der Winkeldistanzen der überzähligen Bogen vom Hauptbogen variiren mit dem Durchmesser der Tropfen. Da nämlich dasselbe Maximum immer demselben Werthe von m entspricht, ist $\frac{p}{q}$ für einen überzähligen Bogen von bestimmter Ordnungszahl um so kleiner, je grösser a ist und man sieht leicht, dass a dem Radius des Tropfens proportional ist. Denkt man sich nämlich die Figur im Verhältnisse $1 : \alpha$ linear vergrössert, so wird die Gleichung der Curve *HL*, Fig. 94,

$$\eta = -\frac{\xi^3}{3\,a'^2}$$

und da

$$\eta = \alpha y, \quad \xi = \alpha x,$$

so wird

$$a' = \alpha a$$

und

$$a' : a = r' : r.$$

Je grösser also die Tropfen werden, desto kleiner wird der Werth von $\frac{p}{q}$ für ein bestimmtes Maximum, also dass die Breite der überzähligen Bogen bei wachsender Grösse der Tropfen abnimmt. Hieraus erklärt es sich, warum die überzähligen Bogen an der höchsten Stelle des Regenbogens am sichtbarsten sind. Es folgt auch, dass die Differenz zwischen der Deviation des Hauptbogens und jener der wirksamen Strahlen bei kleineren Tropfen eine grössere ist.

Man findet in ähnlicher Weise, dass die Deviation des zweiten Regenbogens um etwas grösser ist, als es die Theorie von Descartes verlangt, und dass der Unterschied wächst, wenn die Grösse der Tropfen

abnimmt. Innerhalb des zweiten Bogens nimmt die Intensität rasch ab, ausserhalb geht sie durch eine Reihe Maxima und Minima, welche den äusseren überzähligen Bogen entsprechen.

Airy's Theorie wurde bekräftigt durch experimentelle Resultate Miller's[1]), welcher unter Anwendung einer künstlichen Lichtquelle und eines Wasserfadens die Winkeldimensionen des Hauptregenbogens und der überzähligen Bogen mit Hülfe eines Theodoliten maass.

Wir haben also drei Theorien des Regenbogens von ansteigender Vollkommenheit. Die geometrische Theorie (Descartes), die Interferenztheorie (Young) und die Beugungstheorie (Airy). Es ist von Interesse zu sehen, bis zu welchem Grade die Resultate dieser Theorien von einander abweichen.

Suchen wir demnach zuerst die Lage der Strahlen auf, welche nach Young's Theorie im Punkte M zur Interferenz kommen. Sämmtliche Strahlen gelangen gleichzeitig nach HL, Fig. 94, (24). Von da ab durchmessen zwei nahezu parallele Strahlen, welche rechts und links von O liegen, bis zum Punkte M, in welchem sie interferiren, noch Wege gleich

$$f + \frac{\lambda}{4}(w^3 - mw),$$

und nach (7) oder (62) ist der erste Differentialquotient dieser Grösse in Bezug auf m gleich Null, da die Strahlen nach den gewöhnlichen Regeln der Reflexion und Refraction gehen. Diese Differentiation ausgeführt giebt:

$$3w^2 - m = 0; \quad w = \pm\sqrt{\frac{1}{3}m}.$$

Die Länge der Wege der beiden Strahlen ist also:

$$f - \frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{4m^3}{27}} \text{ und } f + \frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{4m^3}{27}}$$

und der Unterschied:

$$\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{4m^3}{27}}.$$

Die Zerstörung des Lichtes findet also nach Young's Theorie statt, wenn

$$\sqrt{\frac{4m^3}{27}} = 1, 3, 5, \ldots$$

d. h. wenn

$$m = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}, \quad \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 9}{4}}, \ldots$$

[1]) *Trans. of the Soc. of Cambr.*, VII, 277.

oder wenn

$$m = 1{,}89,\ 3{,}93 \ldots.$$

Für negative Werthe von m würde durchaus kein Licht da sein.

Airy's Theorie dagegen giebt, dass für negative Werthe von m merklich Licht vorhanden ist, dass die Zerstörung des Lichtes stattfindet für

$$m = 2{,}48,\ 4{,}4, \ldots$$

und dass die Maxima den Werthen

$$m = 1{,}08,\ 3{,}47, \ldots$$

entsprechen.

In Fig. 95 ist die Intensität des Lichtes dargestellt durch die Ordinaten einer Curve, deren Abscissen die verschiedenen Werthe von m

Fig. 95.



vorstellen. Die starke Linie entspricht der Theorie Airy's, die schwache Linie jener Young's und die punktirte jener Descartes's.

132. Der weisse Regenbogen.

Man versteht unter dem weissen Regenbogen eine Erscheinung, welche wahrgenommen wird, wenn dichter Nebel sich in feinen Regen verwandelt, und welche in einem weisslichen, am äusseren Rande röthlichen Lichtbogen besteht, dessen Radius variabel und kleiner ist, als der des inneren Regenbogens, meist 37 bis 42 Grade. Erreicht der Radius

die Grenze von 42 Graden, so geht der weisse Regenbogen in den gewöhnlichen Regenbogen über. Der kleinste, von Bouguer in den Cordilleren beobachtete, weisse Regenbogen hatte einen Halbmesser von $33^0 5'$.

Man nimmt an, dass der weisse Regenbogen, wie der gewöhnliche, jedoch durch sehr kleine Tropfen entsteht. Aus der Theorie Airy's geht nämlich hervor, dass der Radius des Regenbogens im Allgemeinen kleiner ist, als es die elementare Theorie verlangt, und dass der Unterschied mit wachsender Kleinheit der Tropfen zunimmt. Was das Abhandensein der Farben betrifft, so kann man es aus der durch die Kleinheit der Tropfen verminderten Intensität oder aus dem Vorhandensein von Tropfen verschiedener Grösse erklären, welche Regenbogen von verschieden grossen Oeffnungswinkeln hervorbringen, durch deren Vermischung der weisse Regenbogen entstehen würde.

Bravais hat versucht, den weissen Regenbogen durch die Annahme hohler Wassertropfen zu erklären, deren Hülle eine mit dem Durchmesser der Höhlung an Grösse vergleichbare Dicke hat [1]).

Bibliographie.

Newton'sche Beugungsringe.

1704. Newton, *Optik*, II.

1755. Duc de Chaulnes, Observations sur quelques expériences de Newton, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1755, p. 136.

1773. M. (Dutour), Mémoire sur la décomposition de la lumière dans le phénomène des anneaux colorés produits avec un miroir concave, *Journ. de phys. de Rozier*, IV, 349.

1802. Young, On the Theory of Light and Coulours, *Phil. Tr.*, 1802, p. 41. — *Miscell. Works*, t. I, p. 140.

1807. Young, *Lectures on Natural Philosophy*, London, p. 471.

1816. Biot, *Traité de physique*, Paris, t. IV, p. 149.

1816. Pouillet, Expériences sur les anneaux colorés qui se forment par la réflexion des rayons à la seconde surface des lames épaisses, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 87.

1816. Arago, Observations sur les expériences de M. Pouillet, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 89.

1828. J. Herschel, *On de Theory of Light*, London.

1829. Quetelet, Sur certaines bandes colorées, *Corresp. phys. et mathém.*, V, 394.

1838. Babinet, Sur les couleurs des doubles surfaces à distance, *C. R.* VII, 694.

---

[1]) C. R. XXI. 756.

1848. **Schäfli**, Ueber eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung, *Grunert's Archiv*, XIII, 299. — *Mittheilungen der Naturforscher-Gesellschaft in Bern*, 1848, p. 177.

1850—53. **Mousson**, Ueber die Quetelet'schen Streifen, *Verhandlungen der Schweizer Naturforscher-Gesellschaft*, 1850, p. 57, 1853, p. 3.

1851. **Whewell**, On a New Kind of coloured Fringes, *Phil. Mag.*, (4), I, 336.

1851. **Stokes**, On the Colours of thick Plates, *Cambr. Trans.*, IX, 147. — *Phil. Mag.*, (4), II, 419. — *Inst.*, XX, 93.

1865. D. **Brewster**, On the bands formed by the superposition of paragenic spectra produced by the grooved surfaces of glass and steels, *Edinb. Trans.*, XXIV, 221—232. — *Phil. Mag.*, (4), XXXI, 22—26, 98—104.

1871. **Crova**, Sur les phénomènes d'interférence produits par les réseaux parallèles, *C. R.*, LXXII, 855.

1872. **Crova**, Sur les phénomènes d'interférences produits par les réseaux parallèles (2e partie), *C. R.*, LXXIV.

1872. **Odstrtschil**, Farbenerscheinungen an behauchten oder bestaubten Spiegeln, *Progr. d. k. k. Gymn. in Teschen*, 1872.

1873. M. **Sekulic**, Eine merkwürdige Interferenzerscheinung, *Pogg. Ann.*, CXLIX, 126.

1873. W. **Feussner**, Ueber die von Herrn Sekulic beschriebene Interferenzerscheinung, *Pogg.*, CXLIX, 561.

1875. M. **Sekulic**, Ueber die an bestäubten und unreinen Spiegeln sichtbaren Interferenzerscheinungen, *Pogg.*, CLIV, 308.

1875. K. **Exner**, Ueber die Quetelet'schen Interferenzstreifen, *Wien. Ber.*, LXXI, (2). — *Pogg. Ergb.*, VIII.

1875. K. **Exner**, Ueber Interferenzstreifen, welche durch zwei getrübte Flächen erzeugt werden, *Wien. Ber.*, LXXII, (2). — *Pogg.*, CLVIII.

1875. E. **Lommel**, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes, *Erl. Sitzber.*, VII. — *Pogg. Ergb.*, VIII.

1875. E. **Lommel**, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes, zweite Mittheilung, *Erl. Sitzber.*

1876. E. **Lommel**, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes, dritte Mittheilung, *Erl. Sitzber.*

1876. E. **Lommel**, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes, vierte Mittheilung, *Erl. Sitzber.*

1877. K. **Exner**, Ueber die Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen und verwandte Erscheinungen, *Wien. Ber.*, LXXVI (2).

1879. E. **Lommel**, Ueber die Newton'schen Staubringe, *Wied. Ann.*, VIII.

1880. K. **Exner**, Ueber die Newton'schen Staubringe, *Wied. Ann.*, IX.

1880. K. **Exner**, Ueber die Newton'schen Staubringe, Fortsetzung, *Wied. Ann.*, XI.

Beugung im Allgemeinen.

1665. **Grimaldi**, *Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride*, Bononiae.

1675. **Hooke**, *Posthumous Works*, London, 1705, p. 190.

1704. **Newton**, *Optics*, livre III.

1715. **Delisle**, Observations sur l'existence d'un anneau lumineux semblable à celui qu'on aperçoit autour de la lune dans les éclipses totales de soleil, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1715, p. 166.

1723. **Maraldi**, Diverses expériences d'optique, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1723, p. 111.

1738. **Mairan**, De la diffraction, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1738, p. 53.

1740. **Le Cat**, *Traité des sens*, Rouen, p. 299.

1768—84. **Dutour**, De la diffraction de la lumière, *Mém. des sav. etrang.*, V, 365; VI, 19. — *Journal de physique de Rozier*, V, 120, 130; VI, 135, 412.

1775. **Du Séjour**, Nouvelles méthodes analytiques pour calculer les éclipses de soleil, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1775, p. 265.

1780. **Marat**, *Découvertes sur la lumière*, Londres.

1786. **Hopkinson et Rittenhouse**, On Inflection through Clothes, *Trans. of the Americ. Soc.*, II, 201.

1789. **Stratico**, Memoria intorno ad un fenomeno della diffrazione della luce, *Saggi di Padova*, II, 185.

1796—97. **Lord Brougham**, Experiments and Observations on the Inflection, Reflection and Colours of Light, *Phil. Trans.*, 1796, p. 217; 1797, p. 352.

1797. **Comparetti**, *Observationes opticae de luce inflexa et coloribus*, Patav.

1799. **Jordan**, *The Observations of Newton Concerning the Inflections of Light*, London.

1802. **Young**, On the Theory of Light and Colours, *Phil. Trans.*, 1802, p. 12. — *Miscell. Works*, t. I, p. 140.

1802. **Young**, An Account of some Cases of the Production of Colours not hitherto described, *Phil. Trans.*, 1802, p. 387. — *Miscell. Works.*, t. I, p. 170.

1804. **Young**, Experiments and Calculations Relative to Physical Optics, *Phil. Tr.*, 1804, p. 1. — *Miscell. Works*, t. I, p. 179.

1807. **Young**, *Lectures on Natural Philosophy*, London, p. 342.

1814. **Brewster**, On New Properties of Light exhibited in the Optical Phaenomena of Mother of Pearl and other Bodies to which the Superficial Structure of that Substance can be communicated, *Phil. Trans.*, 1814, p. 397.

1815. **Parrot**, Ueber die Beugung des Lichtes, *Gilbert's Ann.*, LI, 247.

1815. **Fresnel**, Lettre à Arago, *OEuvres complètes*, t. I, p. 5.

1815. **Fresnel**, Premier Mémoire sur la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes*, t. I, p. 9.

1815. **Fresnel**, Complément au Mémoire sur la diffraction, *OEuvres complètes*, t. I, p. 41.

1815. **Fresnel**, Lettres à Arago, *OEuvres complètes*, t. I, p. 64, 70.

1816. **Arago**, Note sur un phénomène remarquable qui s'observe dans la diffraction de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 199.

1816. **Arago**, Rapport sur un Mémoire relatif aux phénomènes de la diffraction de la lumière par M. Fresnel, *OEuvres complètes de Fresnel*, t. I, p. 79.

1816. **Fresnel**, Deuxième Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), I, 239. — *OEuvres complètes*, t. I, p. 89.

1816. **Fresnel**, Supplément au deuxième Mémoire sur la diffraction de la lumière, *OEuvres complètes*, t. I, p. 129.

1818. **Fresnel**, Note sur la théorie de la diffraction, *OEuvres complètes*, t. I, p. 171.

1818. **Fresnel**, Note sur les franges extérieures des ombres des corps trés-étroits, *OEuvres complètes*, t. I, p. 188.

1818. **Fresnel**, Note sur l'hypothèse des petites atmosphères à la surface des corps, *OEuvres complètes*, t. I, p. 190.

1818. **Fresnel**, Note sur les phénomènes de la diffraction dans la lumière blanche, *OEuvres complètes,* t. I, p. 192.

1818. **Fresnel**, Note sur le principe de Huyghens, *OEuvres complètes,* t. I, p. 196.

1818. **Fresnel**, Note sur l'application du principe de Huyghens et de la théorie des interférences aux phénomènes de la réflexion et de la diffraction, *OEuvres complètes,* t. I, p. 201.

1818. **Fresnel**, Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, V, 339. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XI, 246, 337. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 247.

1819. **Arago**, Rapport sur le concours relatif à la diffraction, *Ann. de chim. et de phys.*, XI, 5. — *OEuvres complètes d'Arago,* t. X, p. 375. — *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 229.

1819. **Fresnel**, Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un écran et d'une ouverture circulaire éclairés par un point radieux, *OEuvres complètes,* t. I, p. 365.

1819. **Mayer**, Ueber die von der Inflexion und Deflexion des Lichtes abhängenden Erscheinungen, *Schweigger's Journ.*, XXV, 331.

1820. **Tobie Meyer**, Phaenomenorum ab inflexione luminis pendentium ex propriis observationibus et experimentis recensio et comparatio, *Comment. Soc. Götting.*, IV, 49.

1823. **Poisson**, Lettre à Fresnel sur la théorie de la diffraction, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 270.

1823. **Fresnel**, Réponse à la lettre de Poisson, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIII, 32, 113.

1823. **Fraunhofer**, Neue Modification des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen und Gesetze derselben, *Schumacher's astronomische Abhandlungen,* t. II. — *Gilbert's Ann.*, LXXIV, 337. — *Denkschriften der Münchener Akademie,* t. VIII.

1824. **Barton**, Sur les nouvelles parures métalliques, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIII, 110.

1827. **Young**, Theory of the Colours Observed in the Experiments of Fraunhofer, *Phil. Mag.*, (2), I, 112. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XL, 178.

1828. **W. Herschel**, Phaenomena produced by Apertures in Various Figures, *Theory of Light by J. Herschel,* §. 766.

1829. **Babinet**, Sur les couleurs des réseaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XL, 166.

1829. **De Haldat**, Extrait d'un Mémoire sur la diffraction, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLI, 424.

1829. **Brewster**, On a New Series of Periodical Colours produced by the Groved Surfaces of Metallic and Transparent Bodies, *Phil. Trans.*, 1829, p. 301.

1831. **Airy**, *Mathematical Tracts,* Cambridge, propos. 20 et suiv. (Beugungen im convergenten Lichte.)

1833. **Airy**, On the Calculation of Newton's Experiments on Diffraction, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, V, part. II.

1833. **Barton**, On the Inflexion of Light, *Phil. Mag.*, (3), II, 263.

1833. **Powell**, Remarks on Barton's Paper, *Phil. Mag.*, (3), II, 424.

1833. **Barton**, Reply to Powell, *Phil. Mag.*, III, 172.

1833. **Powell**, Remarks on Barton's Reply, *Phil. Mag.*, III, 412.

1834. **Airy**, On the Diffraction of an Object-Glass with Circular Aperture, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, V, 283. — *Pogg.*, 1842.

1834. Airy, Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, VI, 379.

1835. Schwerd, *Die Beugungserscheinungen*, Manheim.

1835. Delezenne, Sur les réseaux, *Mém. de la Soc. des sc. de Lille pour 1835.*

1836. Cauchy, Note sur la lumière, *C. R.*, II, 455.

1837. Brewster, On a New Property of the Light, *7th Rep. of Brit. Assoc.*, 12.

1837. Knochenhauer, Ueber die Oerter der Maxima und Minima des gebeugten Lichtes nach den Fresnel'schen Beobachtungen, *Pogg. Ann.*, XLI, 103.

1837. Talbot, An Experiment on the Interference of Light, *Phil. Mag.*, (3), X, 364. (Talbot'sche Streifen.)

1837. Babinet, Mémoire sur les propriétés optiques des minéraux, *C. R.*, IV, 758.

1838. Abria, Sur la diffraction de la lumière, *Journal de mathématiques de Lionville*, IV, 248.

1838. Brewster, On Certain Phaenomena of Diffraction, *8th Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, VII, 310.

1838. Brewster, On a New Case of Polarity of Light, *8th Rep. of Brit. Assoc.*, 13. — *Inst.*, VI, 211, 310. (Talbot'sche Streifen.)

1838. Knochenhauer, Ueber eine besondere Classe von Beugungserscheinungen, *Pogg. Ann.*, XLIII, 286. (Beugungen im convergenten Lichte.)

1839. Knochenhauer, *Die Undulationstheorie des Lichtes*, Berlin.

1839. Powell, On the Phaenomena observed by Brewster, *9th Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, VIII, 54, 243. (Talbot'sche Streifen.)

1839. De Haldat, Sur certains phénomènes de diffraction, *Mém. de la Soc. des sc. de Nancy pour 1839*, p. 77. — *Inst.*, IX, 219.

1840. Airy, On the Theorical Explanation of an Apparent New Polarity in Light, *Phil. Trans.*, 1840, p. 225; 1841, p. 1. — *Inst.*, IX, 156. (Talbot'sche Streifen.)

1842. Cauchy, Note sur la diffraction de la lumière, *C. R.*, XV, 534, 573.

1842. Cauchy, Sur les rayons diffractés qui peuvent être transmis ou réfléchis par la surface de séparation de deux milieux isophanes, *C. R.*, XV, 712.

1842. Brewster, On a New Polarity of Light, *12th Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, X, 378; XIII, 406.

1845. Mossotti, *Sulle proprietà degli spettri di Fraunhofer formati dai reticoli ed analisi della luce che somministrano*, Pisa.

1845. Moon, On Fresnel's Theory of Diffraction, *Phil. Mag.*, (3), XXVI, 89; XXVII, 46.

1846. Airy, On the Bands formed by Partial Interception of the Prismatic Spectrum, *Phil. Mag.*, XXIX, 337. — *Inst.*, XV, 15.

1847. Magnus, Ueber Diffraction des Lichtes im leeren Raume, *Pogg. Ann.*, LXXI, 408. — *Berl. Monatsber.*, 1847, p. 79.

1850. Lord Brougham, Recherches analytiques et expérimentales sur la lumière, *C. R.*, XXX, 43, 67. — *Phil. Trans.*, 1850, p. 235. — *Proc. of R. S.*, V, 900. — *Phil. Mag.*, (3), XXXVI, 466.

1850. Wilde, Zur Theorie der Beugungserscheinungen, *Pogg. Ann.*, LXXIX, 75, 202.

1850. Powell, Remarks on Lord Brougham's Experiments and Observations on the Properties of Light, *Phil. Mag.*, (4), I, 1. — *20th Rep. of the Brit. Assoc.*, 11. — *Inst.*, XIX, 263; XXI, 52.

1851. **Verdet**, Sur l'intensité des images formées au foyer des lentilles et des miroirs, *C. R.*, XXXII, 241. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 489.

1851. **Stokes**, On the Dynamical Theory of Diffraction, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, IX, 1.

1851. **Brewster**, On Certain Phaenomena of Diffraction, *21th Rep. of Brit. Assoc.*, 24. — *Inst.*, XX, 381. — *Cosmos*, I, 542.

1852. **Lord Brougham**, Sur divers phénomènes de diffraction ou d'inflexion, *C. R.*, XXXIV, 127. — *Phil. Mag.*, (4), 230. — *Proc. of R. S.*, VI, 172. — *Inst.*, XX, 75.

1852. **Stokes**, On the Total Intensity of Interfering Light, *Trans. of the Soc. of Edinb.*, XX, 317.

1852. **Geiebel**, Ein Beitrag zur Beugung und Interferenz des Lichtes, *Arch. der Pharm.*, (2), LXXI, 113.

1852. **Powell**, Remarks on Certain Points in Experiments on the Diffraction of Light, *Proc. of R. S.*, VI, 160.

1852. **Nobert**, Ein Ocularmikrometer mit leuchtenden farbigen Linien im dunkeln Gesichtsfelde, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 93. — *Cosmos*, III, 27. (Anwendung der Gitter.)

1853. **Rood**, On a Method of exhibiting the Phaenomena of Diffraction with the Compound Microscop, *Sillim. Journ.*, (2), XV, 327.

1853. **Lord Brougham**, Recherches expérimentales et analytiques sur la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXVII, part. II, p. 123.

1855. **Quet**, Note sur la diffraction de la lumière, *C. R.*, XLI, 330. — *Inst.*, XXIII, 296.

1855. **Bridge**, On the Application of Photography to Experiments on Diffraction, *Phil. Mag.*, (4), X, 251.

1856. **Quet**, Mémoire sur la diffraction de la lumière dans le cas d'une fente très-étroite et dans le cas d'un fil opaque, *C. R.*, XLIII, 288. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIX, 385, 417.

1856. **Quet**, Sur un phénomène nouveau de diffraction et sur quelques lois de la diffraction ordinaire, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVI, 385.

1856. **Meyer**, Ueber einige Beugungserscheinungen, *Pogg. Ann.*, XCVIII, 133.

1856. **Meyer**, Ueber die Strahlen, die ein leuchtender Punkt im Auge erzeugt, *Pogg. Ann.*, XCVII, 233.

1856. **Meyer**, Ueber Beugungserscheinungen im Auge, *Pogg. Ann.*, XCVIII, 214.

1858. **Bridge**, On the Diffraction of Light, *Phil. Mag.*, (4), XVI, 321. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVIII, 112.

1858. **Eisenlohr**, Ableitung der Formeln für die Intensität des an der Oberfläche zweier isotropen Mittel gespiegelten, gebrochenen und gebeugten Lichtes, *Pogg. Ann.*, CIV, 346.

1858. **Foucault**, Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté, *Ann. de l'Observ. de Paris*, t. V.

1859. **Grove**, On the Reflexion and Inflexion of Light by Incandescent Surfaces, *Phil. Mag.*, (4), XVII, 177.

1860. **Wüllner**, Eine einfache Bestimmung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen, *Pogg. Ann.*, CIX, 616.

1860. **Bacaloglo**, Ueber die Maxima des gebeugten Lichtes und Functionen der Form $\frac{\sin x}{x}$, *Pogg. Ann.*, CX, 477.

1860. **Dahl**, Zur Theorie der Beugungserscheinungen, *Pogg. Ann.*, CX, 647.

1860. Dove, Optische Notizen. — Ein Gitterversuch, *Pogg. Ann.*, CX, 290.

1861. Lommel, Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichtes, *Grunert's* Archiv, XXXVI, 385.

1862. Gilbert, Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière, *Mém. couron. de l'Acad. de Brux.*, XXXI, 1.

1862. White, Influence of Diffraction upon Microscopic Vision, *Sillim. Journ.*, (2), XXXIII, 377.

1863. Babinet, Sur un nouveau mode de propogation de la lumière, *C. R.*, LVI, 411. — *Cosmos,* XXII, 312, 343.

1864. Babinet, Sur la paragénie ou propogation latérale de la lumière et sur la déviation que les rayons paragéniques éprouvent sous l'influence du mouvement de la terre, *Cosmos,* XXV, 393, 421.

1864. F. Bernard, Théorie des bandes d'interférence produites dans le spectre par l'interposition partielle d'une plaque mince transparente sur le trajet d'un faisceau lumineux dans le cas des ondes planes, *Mondes,* V, 181. (Talbot'sche Streifen.)

1864. Bacaloglo, Neue Bestimmungen des durch kleine Oeffnungen gebeugten Lichtes, *Grunert's Archiv.*, LX, 426.

1864. Stefan, Ueber eine Erscheinung am Newton'schen Farbenglase, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 650. — *Wien. Ber.*, L, 135.

1864. Stefan, Ueber Nebenringe am Newton'schen Farbenglase, *Pogg. Ann.*, CXXV, 160. — *Wien. Ber.*, L, 394. — *Inst.*, XXXIII, 71. — *Mondes,* VIII, 180.

1864. Stefan, Ueber die Interferenzerscheinungen im prismatischen und im Beugungsspectrum, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 509. — *Wien. Ber.*, L, 138. — *Inst.*, XXXIII, 6.

1864. Brewster, On the Diffraction Bands produced by Double Striated Surfaces, *Proc. of the Soc. of Edinb.*, V, 184.

1864. Ditscheiner, Ueber einen optischen Versuch, *Pogg. Ann.*, CXXIX, 340. (Beugungsspectrum durch ein Prisma betrachtet.)

1866. Brewster, On the Bands formed by the Superposition of Paragenic Spectra produced by Grooved Surfaces of Glass and Stal, *Trans. of the Soc. of Edinb.*, XXIV, part. I. — *Phil. Mag.*, (4), XXXI, 22, 98.

1867. G. Quincke, Ueber die Beugungserscheinungen, welche durch durchsichtige Lamellen hervorgebracht werden, *Pogg.*, CXXXII, 29, 204, 321, 561.

1867. G. Quincke, Ueber eine neue Art von Beugungserscheinungen und die Phasenänderung der Lichtstrahlen bei totaler und metallischer Reflexion, *Pogg.*, CXXXII.

1869. E. Jochmann, Ueber eine von Quincke beobachtete Classe von Beugungserscheinungen und über die Phasenänderung bei totaler und metallischer Reflexion, *Pogg.*, CXXXVI, 561.

1869. Carey Lea, On certain phenomena of transmitted and diffused light, *Silliman,* 7, (2), XLVII, 364.

1870. L. Ditscheiner, Ueber den Gangunterschied und das Intensitätsverhältniss der bei der Reflexion an Glasgittern auftretenden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, *Wien. Ber.*, LX, (2), 507. — *Carl Rep.*, VI, 63.

1872. J. J. Müller, Ueber die Fortpflanzung des Lichtes, *Pogg.*, CXLV, 86. (Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität.)

1872. G. Quincke, Ueber Beugungsgitter, *Pogg.*, CXLVI, 1.

1872. J. W. Strutt, On the application of photography to copy diffraction gratings, *Pogg.*, CLII, 175.

1872. Friedr. Weber, Beiträge zur Diffractionstheorie, *Tagebl. d. Naturf. 1872 zu Leipzig*, 114.

1873. H. Draper, On diffractionspectrum photography, *Pogg. Ann.*, CLI.

1875. A. Cornu, Ueber die Diffraction, namentlich über die Brennpunktseigenschaften der Gitter, *Pogg.*, CLVI, 114.

1875. J. S. Soret, Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Diffractionsphänomene, *Pogg.*, CLVI, 99.

1876. W. H. Stone, On diffraction gratings, *Chem. News*, XXXIV, 204.

1876. W. Rosicky, Ueber die Beugungserscheinungen im Spectrum, *Wien. Ber.*, LXXI, (2), 391.

Bestimmung der Wellenlängen.

1823. Fraunhofer, Neue Modification des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen und Gesetze derselben, *Schumacher's astronomische Abhandlungen*, t. II. — *Gilbert's Ann.*, LXXIV, 337. — *Denkschrift der Münchener Akademie*, t. VIII.

1835. Schwerd, *Die Beugungserscheinungen*, Manheim.

1849. Stokes, On the Determination of the Wave Length corresponding with any Point of the Spectrum, *Athenaeum*, Nr. 1143. — *Inst.*, XVII, 368.

1851. Nobert, Description and Purpose of the Glass Plate which bears the Inscription: Interferenz-Spectrum. — Longitudo et celeritas undularum lucis cum in aere tum in vitro, *Proc. of R. S.*, VI, 43. — *Phil. Mag.*, (4), I, 570. — *Inst.*, XX, 7.

1851. Nobert, Ueber eine Glasplatte mit Theilungen zur Bestimmung der Wellenlänge und relativen Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft und im Glase, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 83. — *Cosmos*, III, 22.

1852. Drobisch, Ueber die Wellenlänge und Oscillationszahlen der farbigen Strahlen im Spectrum, *Pogg. Ann.*, LXXXVIII, 519. (Vergleichung der von Fresnel und Fraunhofer erhaltenen numerischen Werthe.)

1855. Esselbach, Ueber die Messung der Wellenlängen des ultravioletten Lichtes, *Berl. Monatsber.*, 1853, p. 757. — *Pogg. Ann.*, XCVIII, 513. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), L, 121. — *Inst.*, XXIV, 221. (Bestimmung der Wellenlängen mittelst der Talbot'schen Streifen.)

1855. Helmholtz, Ueber die physiologisch-optischen Resultate der Untersuchung des Herrn Esselbach, *Berl. Monatsber.*, 1855, p. 760. — *Inst.*, XXIV, 222. (Vergleichung mit den musikalischen Intervallen.)

1856. Eisenlohr, Die brechbarsten oder unsichtbaren Lichtstrahlen im Beugungsspectrum und ihre Wellenlänge, *Pogg. Ann.*, XCVIII, 353; XCIX, 159. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIX, 504. — *Inst.*, XXV, 6. (Bestimmung der Wellenlängen mittelst der Fluorescenz.)

1863. Müller, Bestimmung der Wellenlänge einiger heller Spectrallinien, *Pogg. Ann.*, CXVIII, 641.

1863. Mascart, Détermination de la longueur d'onde de la raie A, *C. R.*, LVI, 138. — *Inst.*, XXXI, 18.

1864. Mascart, Détermination des longueurs d'onde des rayons lumineux et des rayons ultra-violets, *C. R.*, LVIII, 1111. — *Inst.*, XXXII, 186.

1864. Mascart, Recherches sur la détermination des longueurs d'onde, *Ann. de l'École Norm.*, I.

1864. F. Bernard, Théorie des bandes d'interférence produites dans le spectre par l'interposition partielle d'une plaque mince transparente sur le trajet d'un faisceau lumineux dans le cas des ondes planes. — Application de ce phénomène à la détermination des longueurs d'onde des rayons du spectre. — Longueurs d'onde de la raie A et de la raie du thallium, *Mondes,* V, 181.

1864. Ditscheiner, Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums, *Wien. Ber.*, L, (2), 296.

1864. F. Bernard, Mémoire sur la détermination des longueurs d'onde des raies du spectre solaire au moyen des bandes d'interférence, *C. R.*, LVIII, 1153; LIX, 352. — *Inst.*, XXXII, 206. — *Cosmos,* XXV, 8.

1864. Angstrom, Neue Bestimmung der Länge der Lichtwellen nebst einer Methode auf optischem Wege die fortschreitende Bewegung des Sonnensystems zu bestimmen, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 489. — *Ofvers. of Förhandl.*, 1863, p. 41.

1866. Mascart, Recherches sur la détermination des longueurs d'onde, *Ann. de l'École Norm.*, IV, 7. — *C. R.*, LXIV, 454.

1868. Mascart, Note sur différents travaux relatives aux longueurs d'onde, *Ann. de chim.*, (4), XIII, 186. — *Carl Repert.*, IV, 364.

1868. Van der Willigen, Second supplément au mémoire sur la détermination des longueurs d'onde du spectre solaire, *Arch. d. musée Teyler,* I, 280.

1868. R. Thalén, Mémoire sur la détermination des longueurs d'onde de raies métalliques, *Mondes,* (2), XVIII, 450.

1868. G. B. Airy, Computation of the lengths of the waves of light corresponding to the lines in the dispersion spectrum measured by Kirchhoff, *Phil. Trans.*, 1868, I, 29.

1869. W. Gibbs, On the wave lengths of the spectral lines of the elements, *Silliman J.*, (2), XLVII, 194.

1871. Ditscheiner, Zur Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien, *Wien. Ber.*, (2), LXIII, 565.

1873. Ed. Becquerel, Sur la determination des longueurs d'onde des rayons de la partie infra-rouge du spectre au moyen des effets de phosphorescence, *C. R.*, LXXVII.

Höfe.

1686. Mariotte, Traité de la lumière et des couleurs, *OEuvres complètes,* La Haye, 1740, t. I, p. 272.

1704. Newton, *Optics,* livre II, part. IV.

1728. Huyghens, De coronis et parheliis, in *Opusculis posthumis,* Amstel., t. II.

1799. Jordan, *An Account of the Irides and Coronae which appear arround and contiguous to the Bodies of the Sun, Moon and other Luminous Objects,* London.

1824. Fraunhofer, Ueber die Höfe, Nebensonnen und verwandte Phänomene, *Schumacher's astronomische Abhandlungen,* t. III, p. 33.

1829. Moser, Ueber einige optische Phänomene und Erklärung der Höfe und Ringe um leuchtende Körper, *Pogg. Ann.*, XVI, 67.

1832. **Dove**, Versuche über Gitterfarben in Beziehung auf kleinere Höfe *Pogg. Ann.*, XXVI, 311.
1835. **Delezenne**, Sur les couronnes, *Mém. de la Soc. des sc. de Lille*, 1835.
1837. **Babinet**, Sur le phénomène des couronnes solaires et lunaires, *C. R.*, IV, 758. — *Inst.*, V, 142.
1837. **Babinet**, Mémoires l'optique météorologique, *C. R.*, IV, 638.
1837. **Kaemtz**, Sur les couronnes, *Traité de Météorologie*, t. III.
1838. **Delezenne**, Sur les couronnes, *Mém. de la Soc. des sc. de Lille*, 1838.
1840. **Galle**, Ueber Höfe und Nebensonnen, *Pogg. Ann.*, XLIX, 1, 241, 632.
1847. **Dove**, Beschreibung eines Stephanoskop, *Pogg. Ann.*, LXXI, 115.
1850. **Wallmark**, Ueber die Ursache der farbigen Lichtringe, die man bei gewissen Krankheiten des Auges um die Flammen erblickt, *Pogg. Ann.*, LXXXII, 139. — *Ofvers. of Förhandl.*, 1846, p. 41.
1851—53. **Beer**, Ueber den Hof um Kerzenflammen, *Pogg. Ann.*, LXXXIV, 518; LXXXVIII, 595.
1852. **Verdet**, Sur l'explication du phénomène des couronnes, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 129.
1855. **Meyer**, Ueber den die Flamme eines Lichtes umgebenden Hof, *Pogg. Ann.*, XCVI, 235.
1859. **Osann**, Ueber die farbigen Ringe, welche entstehen, wenn eine mit Lycopodium bestreute Glastafel gegen eine Lichtflamme gehalten wird, *Verhandl. der Würzb. Gesellsch.*, IX, 161.
1877. **K. Exner**, Ueber die Fraunhofer'schen Ringe etc., *Wien. Ber.*, LXXVI, (2).

Theorie des Regenbogens.

1722. **Langwith**, Concerning the Appareances of several Arches of Colours Contiguous to the Inner Edge of the Common Raindow, *Phil. Trans. abr.*, VI, 623. (Erste Beobachtung der überzähligen Bogen.)
1722. **Pemberton**, On the Above Appearance in the Rainbow, *Phil. Tr. abr.*, VI, 624. (Versuch einer Erklärung nach der Anwandlungstheorie.)
1804. **Young**, Experiments and Calculations Relative to Physical Optics. — Application to the Supernumerary Rainbows, *Phil. Tr.*, 1804, p. 8.
1836. **Potter**, Mathematical Considerations on the Problem of the Rainbow, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, VI, 141.
1836. **Airy**, Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, VI, 379.
1837. **Babinet**, Mémoires d'optique météorologique, *C. R.*, IV, 638.
1840. **Quet**, Sur les arcs-en-ciel supplémentaires, *C. R.*, XI, 245.
1842. **Miller**, On Spurious Rainbows, *Trans. of the Soc. of Cambr.*, VII, 277. — *Inst.*, IX, 388.
1844. **Galle**, Messungen des Regenbogens, *Pogg. Ann.*, LXIII, 342.
1845. **Bravais**, Sur l'arc-en-ciel blanc, *C. R.*, XXI, 756. — *Journ. de l'Éc. Pol.*, XVIII, 97. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXI, 348.
1848. **Bravais**, Notice sur l'arc-en-ciel, *Annuair météorologique pour 1848.*
1848. **Brockling**, On Supernumerary Rainbows, *Sillim. Journ.*, (2), IV, 429.
1849. **Grunert**, Theorie des Regenbogens, *Beiträge zur meteorologischen Optik*, I, 1.

1854. **Potter**, On the Interference of Light near a Caustic and the Phänomena of the Rainbow, *Phil. Mag.*, (4), IX, 321.

1857. **Raillard**, Explication nouvelle et complète de l'arc-en-ciel, *C. R.*, XLIV, 1142. — *Cosmos*, X, 605.

1864. **Billet**, Études expérimentales sur les arcs surnuméraires des onze premiers arcs-en-ciel de l'eau, *C. R.*, LVI, 999; LVIII, 1046. — *Inst.*, XXXI, 180.

1865. **Raillard**, Sur la théorie de l'arc-en-ciel, *C. R.*, LX, 1287.

1866. **Billet**, Mémoire sur les dix-neuf premiers arcs-en-ciel de l'eau, *Ann. de l'Éc. Norm.*, V, 67.

X.

Interferenz des polarisirten Lichtes.

133. Einleitung.

Die im Jahre 1811 von Arago zuerst beobachtete chromatische Polarisation führte zum Studium der Interferenz des polarisirten Lichtes und zur Aufstellung des Principes der Transversalität der Lichtschwingungen durch Fresnel.

Lässt man das Licht der Reihe nach durch einen Polariseur, ein dünnes doppeltbrechendes Blättchen und einen Analyseur treten, so entstehen zwei complementär gefärbte Bilder. Diese Grunderscheinung der chromatischen Polarisation versuchte zuerst Young in einer im April 1814 veröffentlichten Abhandlung auf das Princip der Interferenz zurückzuführen. Er erklärte das von Arago beobachtete Phänomen aus der gegenseitigen Interferenz der ordentlichen und ausserordentlichen aus dem Krystallblättchen tretenden Strahlen und berief sich auf die folgende Thatsache. Vergleicht man die Farben, welche ein Quarzblättchen giebt, mit den Newton'schen Interferenzfarben einer Luftschicht, so zeigt sich: Ist die Zeitdifferenz zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle des Krystallblättchens gleich der Zeitdifferenz zwischen dem direct durchgelassenen und dem nach zwei inneren Reflexionen durchgelassenen Strahle der Luftlamelle, so erhält man in beiden Fällen stets dieselbe Farbe. Das Ausbleiben der Erscheinung bei Hinweglassung des Polariseurs und des Analyseurs liess Young indessen unerklärt.

Fresnel bemerkte in der That, dass die bekannten Gesetze der Interferenz zur Erklärung dieser Erscheinung nicht ausreichen und wandte sich dem Studium der Interferenz der polarisirten Lichtstrahlen zu. Fresnel's und Arago's Arbeiten über diesen Gegenstand wurden im Jahre 1816 begonnen und die gewonnenen Resultate im selben

Jahre der Pariser Akademie vorgelegt[1]). Fresnel' und Arago's umfangreichere Abhandlung über denselben Gegenstand erschien im Jahre 1819 [2]).

134. Fresnel's erste Versuche. Die gekreuzten Rhomboëder.

Während sich Fresnel und Arago mit der Anwendung der Methode der Verschiebung der Interferenzstreifen auf die Bestimmung der Brechungsexponenten beschäftigten (23), stellte Arago die Frage, ob polarisirte Strahlen wie gewöhnliche interferiren. Diese beiden Physiker brachten daher die inneren Streifen des Beugungsbildes eines sehr schmalen Körpers (111) unter Anwendung polarisirten Lichtes hervor und fanden dieselben wie bei gewöhnlichem Lichte.

Fresnel liess hierauf die von einem Lichtpunkte kommenden Strahlen durch ein Kalkspathrhomboëder treten, um zu sehen, ob die von den beiden Bildern des leuchtenden Punktes kommenden, rechtwinkelig gegen einander polarisirten Strahlenbüschel im gemeinsamen Felde Interferenzstreifen hervorbringen in der Weise, wie bei seinem Spiegelversuche (18). Um die Streifen, wenn sie überhaupt vorhanden waren, hinreichend breit zu erhalten, nahm er ein Rhomboëder von geringer Dicke, so dass die beiden Bilder nahe an einander rückten (19), und da er andererseits glaubte, dass Interferenz nur bei geringen Gangunterschieden stattfinde (30), und im Kalkspathe sich der ausserordentliche Strahl schneller bewegt als der ordentliche, compensirte er die Beschleunigung des ausserordentlichen Strahles, indem er denselben durch eine Glasplatte von berechneter Dicke treten liess. Die Compensation konnte durch eine leichte Neigung der Glasplatte zu einer vollständigen gemacht werden. Der Versuch ergab das Abhandensein der Interferenzstreifen.

Der eben beschriebene Versuch leidet an dem Uebelstande, dass das eingeschobene Glas Beugungsstreifen hervorbringt (106). Um dies zu vermeiden, änderte Fresnel seinen Versuch dahin ab, dass statt des Durchganges des ausserordentlichen Strahles durch eine Glasplatte beide aus dem Krystall tretenden Strahlen von einer Glasplatte reflectirt wurden, deren Dicke so berechnet war, dass bei normaler Incidenz der Gangunterschied zwischen dem an der Vorderfläche reflectirten und dem an der Hinterfläche reflectirten Strahle ein wenig grösser war als der beim Durchgange durch den Krystall zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahle entstehende Gangunterschied. Eine leichte Neigung der Glasplatte musste die Compensation vollständig machen

---

[1]) Fresnel, Vollständige Werke, I, 385. [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (2), X, 288.

und eine Interferenz zwischen den an der Vorderfläche reflectirten ordentlichen und den an der Hinterfläche reflectirten ausserordentlichen Strahlen herbeiführen. Auch diese Modification des Versuches ergab ein negatives Resultat.

Fresnel erfand noch ein drittes Experiment, um zu zeigen, dass die beiden durch die Doppelbrechung entstehenden rechtwinkelig polarisirten Strahlen nicht interferiren. Er theilte ein Kalkspathrhomboëder in zwei identische Rhomboëder und brachte eines hinter dem anderen so an, dass die Hauptschnitte einen rechten Winkel bildeten. Betrachtet man einen Lichtpunkt durch diese gekreuzten Rhomboëder, so gewahrt man nur zwei Bilder, da die im ersten Krystall ordentlich gebrochenen Strahlen im zweiten ausserordentlich gebrochen werden und umgekehrt. Zwischen den beiden austretenden Strahlenbündeln besteht kein Gangunterschied, wenn die Rhomboëder genau gleiche Dicke haben, da jedes der beiden Bündel sich in dem einen Krystalle mit der Geschwindigkeit des ordentlichen und in dem anderen mit jener des ausserordentlichen Strahles fortbewegt. Ein kleiner Gangunterschied, welcher in Folge nicht gänzlicher Gleichheit der Dicke der Rhomboëder übrig bleiben kann, lässt sich durch eine geringe Neigung des zweiten Rhomboëders beseitigen. Nachdem auch bei diesem Versuche der gemeinsame Raum der beiden Strahlenbüschel keine Interferenzstreifen zeigte, glaubte Fresnel schliessen zu dürfen, dass die beiden rechtwinkelig polarisirten Strahlenbüschel, in welche sich das Licht beim Durchgange durch einen doppeltbrechenden Körper zerlegt, nicht fähig sind gegenseitig zu interferiren.

135. Versuche von Fresnel und Arago. Nicht-Interferenz der rechtwinkelig polarisirten Strahlen.

Arago, welchem Fresnel die Resultate seiner Versuche mitgetheilt hatte, gab einen noch beweisenderen Versuch an, welcher unabhängig von der Doppelbrechung ist und bei welchem die vorhandenen Interferenzstreifen während der Drehung der Polarisationsebene des einen der beiden interferirenden Strahlenbüschel verschwinden.

Man stellt den Interferenzversuch zweier Spaltöffnungen an (13) und sorgt dafür, dass die aus den beiden Oeffnungen austretenden Strahlenbündel polarisirt werden und die Polarisationsebenen beliebig gedreht werden können. Um letzteres zu bewirken, legte Arago eine Zahl Glimmerblättchen auf einander und zerschnitt die so entstandene Säule der Länge nach in zwei Säulen. Es wurde nun hinter jede der Oeffnungen eine der Säulen unter einer solchen Neigung gegen die austretenden Strahlen gebracht, dass eine vollständige Polarisation erfolgte. Wurde eine der Säulen bei ungeänderter Neigung gegen die einfallenden Strahlen um die Fortpflanzungsrichtung der letzteren als Achse

gedreht, so fand eine Drehung der Polarisationsebene des entsprechenden Strahlenbündels statt. Waren nun die beiden Strahlenbündel parallel polarisirt, so erschienen die Interferenzstreifen wie bei gewöhnlichem Lichte. Wurde hierauf eine der Säulen um einen rechten Winkel gedreht, so verschwanden die Streifen vollständig.

Arago's Experiment kann noch bequemer mittelst zweier Turmalinplättchen statt der polarisirenden Säulen angestellt werden. Zerschneidet man ein parallel zur Achse geschnittenes Turmalinplättchen in zwei Theile und bringt vor jede der Oeffnungen einen derselben, so werden die austretenden Strahlenbündel parallel polarisirt sein, wenn die Achsen der Turmalinplättchen sich in paralleler Lage befinden, und rechtwinkelig, wenn hierauf eines der Plättchen um einen rechten Winkel gedreht worden ist.

Fresnel, welcher in Gemeinschaft mit Arago arbeitete, variirte den eben beschriebenen Versuch Arago's in der folgenden Weise. Bringt man vor dem besprochenen Beugungsschirme ein Gypsplättchen an, so erscheint, wie bei gewöhnlichem Lichte, ein Streifensystem in der Mitte des Schattens des zwischen den beiden Spaltöffnungen liegenden Theiles des Beugungsschirmes. Dieses Streifensystem muss als eine Uebereinanderlagerung zweier congruenter Streifensysteme aufgefasst werden, von welchen das eine aus der Interferenz der ordentlichen, das andere aus jener der ausserordentlichen von den Spaltöffnungen kommenden Strahlen hervorgeht. Diese beiden Streifensysteme sind rechtwinkelig polarisirt und interferiren daher gegenseitig nicht. Indem sie sich decken, verstärken sie sich und werden nicht von einander unterschieden.

Die hier interferirenden Strahlen sind in derselben Ebene polarisirt. Würden auch Strahlen interferiren, welche rechtwinkelig polarisirt sind, so müsste man noch zwei weitere Streifensysteme wahrnehmen, von welchen jedes hervorgehen müsste aus der Interferenz der aus der einen Oeffnung austretenden ordentlichen und der aus der anderen Oeffnung austretenden ausserordentlichen Strahlen, und diese Streifensysteme müssten in Folge der ungleichen Geschwindigkeiten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles im Krystalle (23) zu beiden Seiten vom centralen Streifensysteme und in einiger Entfernung von demselben auftreten.

Zerschneidet man das Gypsplättchen in der Mitte zwischen den beiden Spaltöffnungen und dreht man den einen Theil um einen rechten Winkel, so ist das aus einer der Spaltöffnungen austretende ordentliche Strahlenbüschel parallel polarisirt mit dem aus der anderen Oeffnung austretenden ausserordentlichen Strahlenbüschel, während die gleichartigen Strahlenbüschel rechtwinkelig polarisirt sind. Dem entsprechend verschwindet das centrale Streifensystem und es treten zwei seitliche Streifensysteme auf, getrennt durch einen hellen Raum. Die Lage der seitlichen Streifensysteme liess erkennen, dass dieselben aus der Interferenz der ordentlichen Strahlen der einen Oeffnung und der ausserordentlichen der anderen hervorgingen.

Die Entfernung der beiden seitlichen Streifensysteme von der Mitte hängt von den Geschwindigkeiten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles im Krystallplättchen ab (23). Sie kann mittelst eines Mikrometers (18) gemessen werden und beträgt die Hälfte der gegenseitigen Entfernung der Centralfransen der beiden seitlichen Systeme. Kennt man überdies die Dicke des Plättchens und seinen ordentlichen Brechungsexponenten, so kann man das Verhältniss der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten berechnen. Schneidet man aus einem Krystall Plättchen in verschiedenen Richtungen, so kann man nach diesem Verfahren die Gesetze der Doppelbrechung auch bei Substanzen prüfen, welchen eine sehr schwache Doppelbrechung eigen ist oder welche nicht auf die prismatische Gestalt gebracht werden können.

136. Interferenz rechtwinkelig polarisirter Lichtstrahlen, welche auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.

Fresnel und Arago haben ferner gezeigt, dass, um rechtwinkelig polarisirte Lichtstrahlen interferenzfähig zu machen, es nicht hinreicht, sie auf dieselbe Polarisationsrichtung zu bringen, dass es vielmehr nothwendig ist, dass die Strahlen ursprünglich in derselben Ebene polarisirt waren.

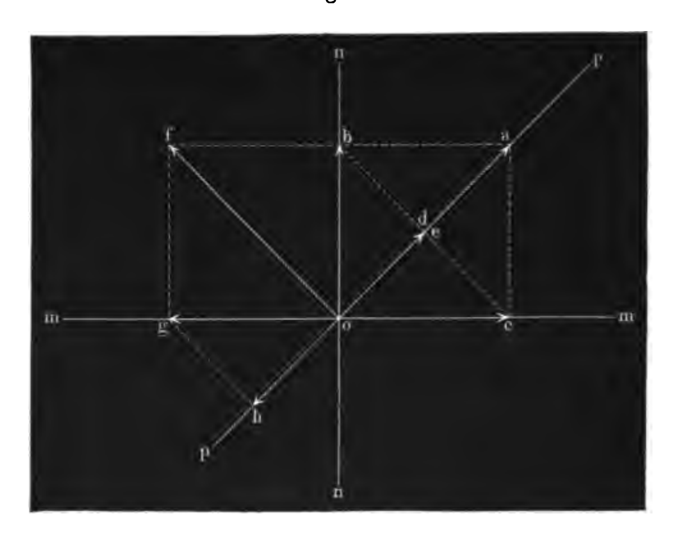
Um zu beweisen, dass zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlenbüschel, welche aus einem natürlichen Strahlenbüschel entstanden sind, auf dieselbe Polarisationsebene gebracht, nicht interferenzfähig sind, modificirte Arago das Experiment mit den Glimmersäulen in der folgenden Weise. Er brachte die beiden Säulen hinter den Beugungsöffnungen so an, dass die von den Oeffnungen kommenden Strahlenbüschel rechtwinkelig polarisirt waren, und hinter den beiden Säulen einen doppeltbrechenden Krystall, dessen Hauptschnitt mit jeder der beiden Polarisationsrichtungen einen Winkel von 45 Grad bildete. Nach den Gesetzen der Doppelbrechung zerlegt sich im Krystalle jedes der Strahlenbüschel in zwei Strahlenbüschel von gleicher Intensität, von welchen das eine im Hauptschnitte und das andere senkrecht zu demselben polarisirt ist. Es zeigten sich bei dieser Versuchsanordnung keine Interferenzstreifen.

137. Erklärung des Arago'schen Versuches.

Nehmen wir an, das natürliche Licht sei geradlinig polarisirtes Licht, welches beständig äusserst rasch und in Rücksicht auf alle Richtungen gleichmässig die Lage seiner Polarisationsebene wechselt.

Seien bei **Arago's** Versuch (136) *m*, *n*, Fig. 96, die den beiden Glimmersäulen entsprechenden Schwingungsrichtungen, *p* die Richtung, auf welche die Schwingungen durch den Krystall gebracht werden, *oa* in

Fig. 96.



irgend einem Momente die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes. *oa* zerlegt sich in den Glimmersäulen in *ob* und *oc* und von diesen Schwingungen gelangen die Composanten *od*, *oe* durch den Krystall. Indem dieselben in Folge der Gangunterschiede, welche sie durch Beugung gewinnen, interferiren, bringen sie nothwendig ein Fransensystem α hervor. In einem nächsten Momente wird sich jedoch die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes um 90 Grade gedreht haben, die Schwingung *of* zerlegt sich in *ob* und *og* und giebt schliesslich die Composanten *oe* und *oh*, welche der Phase nach um eine halbe Schwingung auseinander gerückt sind. Wir erhalten also jetzt ein Fransensystem α', welches dort helle Streifen zeigt, wo das System α dunkle, und umgekehrt. Nach unserer Vorstellung über die Natur des natürlichen Lichts müssen also die beiden complementären Streifensysteme α und α' in äusserst rascher Aufeinanderfolge entstehen und der Effect muss das Abhandensein jedes Streifensystems sein. Dasselbe müsste sich ergeben, wenn man das einfallende Licht durch ein rasch rotirendes Nicol treten liesse. Wird also ursprünglich linear polarisirtes Licht in einem Krystalle in zwei gleich intensive, rechtwinkelig polarisirte Strahlen zerlegt, und interferiren diese hierauf, nachdem sie entweder auf die ursprüngliche Schwingungsrichtung oder auf eine zu dieser senkrechte Schwingungsrichtung gebracht sind, so ist das Resultat der Interferenz in den beiden Fällen nicht dasselbe, vielmehr zerstören sich die Strahlen in dem einen

Falle, wenn sie sich in dem anderen verstärken. Die in den beiden Fällen entstehenden Interferenzfiguren sind daher stets complementär und verschwinden, wenn sie in äusserst raschem Wechsel aufeinander folgen.

Die Nichtinterferenz rechtwinkelig polarisirter und auf dieselbe Schwingungsrichtung gebrachter Strahlen, welche dann stattfindet, wenn die Strahlen von natürlichem Lichte herstammen, ist daher nur eine scheinbare.

138. Versuch von Fresnel.

Rühren die beiden rechtwinkelig polarisirten Strahlenbüschel von einem schon polarisirten Strahlenbüschel her, so werden sie, auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht, allerdings interferenzfähig. Dies wird durch den folgenden Versuch Fresnel's bestätigt.

Von einem Punkte geht ein Strahlenbüschel aus, wird polarisirt und fällt auf den Beugungsschirm mit den zwei Spaltöffnungen. Hinter dem Schirme befindet sich ein parallel zur Axe geschnittenes Gypsblättchen, dessen Axe mit der Polarisationsrichtung der Strahlen einen Winkel von 45 Graden einschliesst, sodann ein hinreichend dickes Kalkspathrhomboëder, dessen Hauptschnitt der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, und endlich die Lupe, mittelst welcher der Schatten des Beugungsschirmes untersucht wird.

Man gewahrt in jedem der zwei Bilder, welche das Kalkspathrhomboëder giebt, drei Fransensysteme, eines in der Mitte des geometrischen Schattens des zwischen den Spaltöffnungen befindlichen Theiles des Schirmes, die beiden anderen zu beiden Seiten des ersten. Nur zwei Bilder werden wahrgenommen, weil das Gypsblättchen zu dünn ist, um eine merkliche Doppelbrechung zu zeigen.

Sehen wir nun, in welcher Weise die drei Fransensysteme jedes der beiden Bilder entstehen und betrachten wir beispielsweise das ordentliche Bild. Dieses entsteht durch vier Gattungen Strahlen: solche, welche im Gyps und im Kalkspath ordentlich gebrochen werden, wir bezeichnen sie durch A_{oo} und B_{oo}, je nachdem sie von der einen oder der anderen Spaltöffnung kommen, und solche, welche im Gyps ausserordentlich und im Kalkspath ordentlich gebrochen werden, wir bezeichnen sie durch A_{eo} und B_{eo}. Diese vier Strahlenbüschel haben dieselbe Intensität. Das centrale Fransensystem entspricht der Uebereinanderlagerung zweier Fransensysteme, welche aus der Interferenz einerseits der Strahlen A_{oo} und B_{oo}, andererseits der Strahlen A_{eo} und B_{eo} hervorgehen. Sowohl die beiden ersteren Strahlenbüschel als die beiden letzteren durchlaufen dieselben Wege mit derselben Geschwindigkeit und sind in derselben Ebene polarisirt. Die beiden seitlichen Fransensysteme entstehen eines aus der Interferenz der Strahlen A_{oo} und B_{eo}, das andere aus der Interferenz der Strahlen A_{eo} und B_{oo}.

Diese Streifensysteme entstehen also durch Interferenz von rechtwinkelig polarisirten und auf dieselbe Polarisationsrichtung gebrachten Strahlen, welche ursprünglich in derselben Ebene polarisirt waren.

Im ausserordentlichen Bilde gewahrt man gleicherweise drei Systeme Interferenzstreifen. Das centrale System entsteht durch die Interferenz der Strahlen A_{ee} und B_{ee} sowie durch jene der Strahlen A_{oe} und B_{oe}, von den seitlichen Systemen entsteht das eine durch die Interferenz der Strahlen A_{ee} und B_{oe}, das andere durch jene der Strahlen A_{oe} und B_{ee}.

Ersetzt man in der Versuchsanordnung das Kalkspathrhomboëder durch ein Gypsblättchen, welches so dünn ist, dass es nicht zwei getrennte Bilder giebt, und welches so gestellt ist, dass sein Hauptschnitt mit der ursprünglichen Polarisationsebene zusammenfällt, so geben die sechs Fransensysteme keineswegs durch Uebereinanderlagerung drei Fransensysteme, vielmehr bleibt ein einziges, das centrale Fransensystem, übrig. Man muss hieraus schliessen, dass in den beiden Bildern, welche das Rhomboëder giebt, die Fransen der seitlichen Systeme eine complementäre Lage haben, so dass bei dem Uebereinanderfallen der beiden Bilder die seitlichen Systeme verschwinden.

Wenn also zwei rechtwinkelig polarisirte Lichtstrahlen auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht worden sind, so hängt das Resultat der Interferenz nicht lediglich von den durchlaufenen Wegen ab. Der Gangunterschied der interferirenden Strahlen entspricht vielmehr, je nachdem die neue Polarisationsebene parallel oder normal zur ursprünglichen Polarisationsebene liegt, dem Unterschiede der durchlaufenen Wege oder diesem Unterschiede vermehrt um eine halbe Wellenlänge.

Die Erklärung dieses Resultates ergiebt sich unmittelbar aus (137).

139. Die Gesetze der Interferenz der polarisirten Strahlen.

Aus den Versuchen Arago's und Fresnel's ergaben sich die folgenden Gesetze:

1. Zwei in derselben Richtung polarisirte Lichtstrahlen interferiren wie gewöhnliche Strahlen.
2. Zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlen interferiren nicht.
3. Zwei von einem natürlichen Strahle herrührende rechtwinkelig polarisirte Strahlen interferiren auch dann nicht, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.
4. Zwei von einem polarisirten Strahle herrührende rechtwinkelig polarisirte Strahlen interferiren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.
5. Wenn zwei von einem polarisirten Strahle herrührende rechtwinkelig polarisirte Strahlen, auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht,

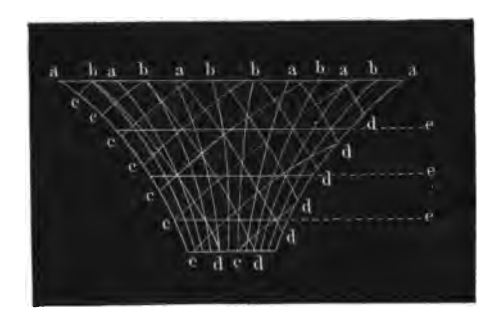
interferiren, so muss in gewissen Fällen der wirklichen Differenz der durchlaufenen Wege eine halbe Wellenlänge hinzugefügt werden.

140. Neuere Versuche.

Die Fresnel-Arago'schen Versuche wurden später vielfach erweitert und modificirt[1]) und namentlich das Princip der spectralen Auflösung auf dieselben angewendet. Wir geben im Folgenden einige Versuche, wie sie E. Mach angestellt hat.

Auf die punktförmige Spalte eines Spaltenfernrohrs S sei das Beobachtungsfernrohr B eingestellt. Vor dem Objectiv von B befindet sich eine rechteckige verticale Spalte Σ. Das Ocular von B trägt ein Prisma *à vision directe*, welches Roth nach oben, Violett nach unten ablenkt. Denken wir uns Σ durch eine verticale Linie in zwei congruente Theile getheilt und einen derselben undurchsichtig gemacht, so haben wir in der Focalebene von B das horizontale lineare Beugungsbild einer Spaltöffnung (78), dieses jedoch spectral zerlegt, d. h. die den einzelnen Farben entsprechenden Beugungsbilder liegen unter einander. Da die Minima der Intensität oder die dunklen Streifen mit abnehmender Wellenlänge näher aneinander rücken, zeigt sich in der Focalebene ein helles Feld, roth oben, violett unten, mit dunklen Streifen, welche die in Fig. 97 durch a bezeichnete Lage haben. Denken wir uns nun Σ ganz geöffnet, so haben wir das Beugungsbild einer doppelt so breiten Spalte. Dieses zeigt doppelt so viel Minima im selben Raume, es treten daher die in Fig. 97 mit b bezeichneten Interferenzlinien hinzu. Wir lassen nun durch S natürliches Licht einfallen, nehmen zwei etwa 1 mm dicke achsenparallele Quarzplatten und decken die linke Hälfte von Σ mit der einen Platte, deren Achse wir vertical stellen, die rechte Hälfte mit der anderen, deren Achse wir horizontal stellen. Es treten sonach

Fig. 97.



[1]) J. Stefan, Interferenzversuche mit dem Soleil'schen Doppelquarz. Sitzb. der Wiener Akademie. Bd. 53 und 66. — E. Mach und W. Rosicky, Ueber eine neue Form der Fresnel-Arago'schen Interferenzversuche mit polarisirtem Licht. Ebendaselbst, Bd. 72.

vier linear polarisirte Strahlenbündel durch Σ. Eines durch die linke Hälfte mit horizontaler Polarisationsebene L_h und durch dieselbe Spaltenhälfte eines mit verticaler Polarisationsebene L_v. Ebenso treten durch die rechte Hälfte die analog bezeichneten Bündel R_h und R_v. Man bemerkt, dass L_h und R_v gegen L_v und R_h um den von der Quarzdicke abhängigen Phasenunterschied D verzögert sind, welcher von Roth zu Violett zunimmt.

Fig. 98.

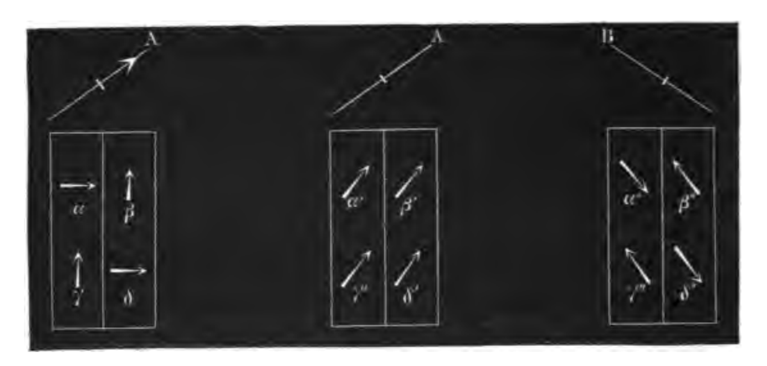


Fig. 98 stellt die Doppelspalte vor, gesehen von der Seite der Lichtquelle, die Pfeile α, β, γ, δ bedeuten die Schwingungsrichtung der vier durch die Spalte tretenden Lichter, und zwar bedeuten die unteren Pfeile γ, δ die verzögerten Lichter. Ohne den Phasensprung D würden α und δ durch ihre gegenseitige Interferenz die Interferenzstreifensysteme a und b geben, indem sich längs den Streifen a sowohl die von der linken Hälfte der Spalte kommenden Elementarstrahlen auslöschen, als die von der rechten Hälfte kommenden, und indem längs den Streifen b die von der linken Hälfte kommenden durch die von der rechten Hälfte kommenden ausgelöscht werden. Der Phasensprung D hat also keinen Einfluss auf die Streifen a, wohl aber auf die Streifen b. Dieser Einfluss besteht (23) (127) darin, dass das Streifensystem nach der Seite des verzögerten Strahlenbündels verschoben wird. Da überdies die Phasenverzögerung D für die brechbareren Strahlen beträchtlicher ist, so muss die Streifenverschiebung für diese Strahlen grösser sein. Während also die Streifen a ungeändert bleiben, verschieben sich die Streifen b und nehmen eine schiefe Lage an, d. h. statt der Streifen b entstehen die Streifen d, Fig. 97. Die Lichter γ und β geben durch ihre gegenseitige Interferenz ebenso das System a und statt des Systems b das System c, welches von rechts oben nach links unten verläuft, da nun das linksseitige Bündel das verzögerte ist.

Da nun die Resultirende $\alpha\delta$ mit der Resultirenden $\beta\gamma$ nicht interferirt, indem die Polarisationsebenen einen rechten Winkel bilden, so bleibt es bei dem Entstehen der drei Streifensysteme a, c, d.

Wir setzen nun ein Ocularnicol N_2 an das Beobachtungsfernrohr, wodurch alle Lichter auf eine Polarisationsebene E zurückgeführt werden. Lässt N_2 nur die Schwingungen α, δ hindurch, so erscheinen die Systeme a, d. Dreht man hierauf N_2 um $\frac{\pi}{2}$, so tritt an die Stelle des Systems d das System c. Bei Schiefstellung von E gegen die Quarzachsen könnte man nun erwarten, dass neue Streifensysteme entstehen. Dies findet aber nicht statt, da rechtwinkelig polarisirte Strahlen, welche von natürlichem Lichte herrühren, auch dann nicht interferiren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden. Demgemäss sieht man bei der schiefen Stellung von E das System a und die beiden schiefen Systeme c, d.

Bei Vorsetzung eines Nicols N_1 vor die Spalte, ohne Anwendung von N_2 bemerkt man ebenso bald das eine, bald das andere der schiefen Systeme c, d, bald beide gleichzeitig.

Nun bringen wir beide Nicols N_1 und N_2 bei S und B an und stellen die Polarisationsebene von N_1 unter 45^0 gegen die Quarzachse und die Polarisationsebene E von N_2 parallel zu jener von N_1. Wir haben nun wieder die Strahlenbündel α, β, γ, δ von gleicher Intensität. Nun aber interferiren auch die rechtwinkelig polarisirten Strahlen, nachdem sie durch N_2 auf dieselbe Polarisationsebene gebracht sind, und das Beugungsbild wird ein anderes. Die Strahlen α und β, welche gegen einander keine Verzögerung D haben, bringen die Streifen a und b hervor, wie gewöhnliches, durch die ganze Oeffnung Σ tretendes Licht. Ebenso die Strahlen γ und δ. Da ferner der aus α und β resultirende Strahl gegen den aus γ und δ resultirenden eine Phasendifferenz D hat, welche von Farbe zu Farbe unabhängig von der Ablenkung wechselt und vom Roth zum Violett zunimmt, so geht ein neues horizontales Interferenzstreifensystem e im Beugungsbilde hervor (dasselbe, welches im Spectrum des Lichtes erscheint, das durch den zwischen parallelen Nicols eingeschalteten Quarz gegangen ist). Es erscheinen also jetzt die Systeme a, b, e, während die schiefen c, d ausbleiben. Werden jetzt die Nicols N_1 und N_2 senkrecht gekreuzt, so ändert sich abermals die Erscheinung. Gehen nämlich die Schwingungen ursprünglich in einer Ebene A vor sich, Fig. 98, so zerlegen sich dieselben zunächst in α, β, γ, δ und geben, wieder auf dieselbe Richtung A gebracht, α', β', γ', δ'. Werden sie jedoch auf eine zu A senkrechte Richtung B gebracht, so erhält man α'', β'', γ'', δ'', und man sieht, dass im letzteren Falle zwischen α und β, γ und δ, α und γ, β und δ Phasendifferenzen gleich π entstanden sind. Dies muss zur Folge haben, dass das Streifensystem b nunmehr dort Minima zeigt, wo es früher Maxima zeigte, und dass ferner ebenso das System e dort Minima zeigt, wo es Maxima zeigte. Die Kreuzung der Nicols hat also zur Folge, dass die Streifensysteme b und e sich in complementäre Streifensysteme b' e' verwandeln.

Man sieht auch leicht, wie eine rasche Rotation des Nicols N_1 dieselbe Erscheinung hervorbringen muss, wie bei Hinweglassung von N_1 die Anwendung natürlichen Lichtes. Stehen nämlich die Polarisationsebenen von N_1 und N_2 parallel und gegen die Quarzachsen um $\frac{\pi}{4}$ geneigt (*A*, Fig. 98), so hat man die Streifensysteme *a*, *b*, *e*, und dreht sich hierauf das Nicol N_1, so hat man nach einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers um $\frac{\pi}{4}$ die Systeme *a*, *d*, nach einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ die Systeme *a*, *b'*, *e'*, nach einer Drehung um $\frac{3\pi}{4}$ die Systeme *a*, *c*, und nach einer Drehung um π wieder die Systeme *a*, *b*, *e*. Geht also die Drehung so schnell vor sich, dass die Lichteindrücke verschmelzen, so bleiben nur die Systeme *a*, *c*, *d* wahrnehmbar, wie bei Anwendung natürlichen Lichtes.

Diese Versuche können vielfach variirt werden, wenn man die beiden Hälften der Spalte oder eine Doppelspalte mit einer einzigen Quarzplatte bedeckt oder mit zwei gleich dicken, senkrecht zur Achse geschnittenen Quarzplatten, von welchen die eine rechts und die andere links dreht, u. s. w.

XI.

Transversalität der Lichtschwingungen.

141. Historisches.

Man hat Hooke die Entdeckung der Transversalität der Lichtschwingungen zugeschrieben. Obgleich nun Hooke in der That die Lichtschwingungen für transversal hielt (8), begründete er doch seine Hypothese in keiner Weise, so dass dieselbe wieder in Vergessenheit gerieth und die Verfechter der Undulationstheorie nach wie vor nur an die Möglichkeit longitudinaler Schwingungen wie beim Schalle dachten. Auch Fresnel's ersten Arbeiten über die Beugung liegt noch die Vorstellung longitudinaler Lichtschwingungen zu Grunde. Erst seine Experimente über die Interferenz des polarisirten Lichtes lehrten ihn die Unmöglichkeit an der Vorstellung longitudinaler Lichtschwingungen festzuhalten, welche schon Newton als mit der Thatsache der Lichtpolarisation unvereinbar erkannt hatte (11).

Ausgehend von der Thatsache der Nichtinterferenz rechtwinkelig polarisirter Lichtstrahlen und der Erkenntniss, dass nur Bewegungen, welche sowohl mit dem Strahle als unter sich einen rechten Winkel bilden, unfähig sind zu interferiren, gelangte er zur Annahme transversaler Lichtschwingungen [1]).

Die Idee transversaler Lichtschwingungen erschien jedoch den Zeitgenossen Fresnel's, selbst Laplace und Arago, als eine mechanische Absurdität, und Fresnel selbst wagte es längere Zeit nicht, seine Hypothese zur Grundlage der Theorie zu machen.

Wie Fresnel fasste auch Young, sobald ihm Fresnel's und Arago's Versuche über die Interferenz des polarisirten Lichtes bekannt geworden waren, die Idee transversaler Lichtschwingungen, und auch

---

[1]) Erste Arbeit Fresnel's über die Interferenz polarisirter Lichtstrahlen, *Oeuvres complètes,* I, 394.

er wagte es so wenig wie Fresnel, seine Hypothese ohne Weiteres aufzustellen [1]).

Erst im Jahre 1821, nachdem Fresnel die Fruchtbarkeit jener Hypothese auf dem Gebiete der chromatischen Polarisation und der Doppelbrechung erkannt hatte, stellte er die Hypothese von der Transversalität der Lichtschwingungen förmlich auf in seinen „*Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière*“ [2]). Kurze Zeit darauf gab er in seinem „*Mémoire sur la double réfraction*“ eine analytische Demonstration der Transversalität der Lichtschwingungen, welche im Folgenden mit einigen von Verdet herrührenden Ergänzungen [3]) wiedergegeben ist.

142. Transversalität der Lichtschwingungen.

Betrachten wir einen polarisirten Lichtstrahl, nehmen denselben zur x-Achse eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, lassen die Polarisationsebene mit der xy-Ebene zusammenfallen und zerlegen die Geschwindigkeit der Bewegung eines Aethermoleciils parallel den Axen, so erhalten wir, mag der Strahl polarisirt sein oder nicht (51):

$$u = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right),$$

$$v = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\psi}{\lambda}\right),$$

$$w = c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\chi}{\lambda}\right).$$

Betrachten wir ferner einen zweiten, parallel zu dem ersten polarisirten Strahl, welcher sich von jenem nur nach der Intensität unterscheidet, so haben wir für denselben die Geschwindigkeitscomposanten:

$$u_1 = ma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right),$$

$$v_1 = mb \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \psi\right),$$

$$w_1 = mc \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\chi}{\lambda}\right).$$

Besteht nun zwischen den beiden Strahlen ein Gangunterschied δ, so werden die Composanten des zweiten Strahles:

---

[1]) *Miscell. Works*, I, 333 bis 380. [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (2) XVII, 179. [3]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXXI, 377.

$$u_2 = ma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi + \delta}{\lambda}\right),$$

$$v_2 = mb \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\psi + \delta}{\lambda}\right),$$

$$w_2 = mc \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\chi + \delta}{\lambda}\right).$$

Dreht sich ferner die Polarisationsebene des zweiten Strahles um einen rechten Winkel, so werden die Geschwindigkeitscomposanten des zweiten Strahles:

$$u' = ma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi + \delta}{\lambda}\right),$$

$$v' = - mc \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\chi + \delta}{\lambda}\right),$$

$$w' = mb \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\psi + \delta}{\lambda}\right).$$

Setzen wir nun die beiden rechtwinkelig polarisirten Strahlen zu einem resultirenden Strahle zusammen. Wir erhalten als Resultat der Interferenz einen Strahl, dessen Geschwindigkeitscomposanten sind:

$$U = u + u',$$
$$V = v + v',$$
$$W = w + w'.$$

Die Intensität des resultirenden Strahles ist demnach (53):

$$I = a^2 + m^2 a^2 + 2 m a^2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} + c^2 + m^2 c^2 - 2 m b c \cos 2\pi \frac{\chi - \psi + \delta}{\lambda}$$
$$+ b^2 + m^2 b^2 + 2 m b c \cos 2\pi \frac{\psi - \chi + \delta}{\lambda}$$

oder

$$I = (a^2 + b^2 + c^2)(1 + m^2) + 2 m a^2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$
$$+ 4 m b c \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\chi - \psi}{\lambda}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch, wenn die Strahlen nicht polarisirt sind. Sind sie polarisirt, so zeigt der Versuch (135), dass sie nicht interferiren, welchen Werth immer δ habe. Es folgt also für polarisirtes Licht:

$$a = 0$$

und

$$b c \sin 2\pi \frac{\chi - \psi}{\lambda} = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen besagt, dass die Vibrationen in einer zur Richtung des Strahles senkrechten Ebene vor sich gehen, die zweite, dass eine der beiden Geschwindigkeiten b, c der Null gleich sein muss. Es lässt sich nämlich zeigen, dass $2\pi \sin\frac{\chi-\psi}{\lambda}$ nicht der Null gleich sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so würde folgen:

$$\chi - \psi = n\,\frac{\lambda}{2}$$

und es würde sich für die Geschwindigkeitscomposanten parallel zu y und z des ersten Strahles ergeben:

$$v = b \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\psi}{\lambda}\right),$$

$$w = \pm c \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\psi}{\lambda}\right),$$

d. h. es müsste die Vibrationsbewegung des ersten Strahles längs einer in der yz-Ebene liegenden Geraden vor sich gehen, welche mit der y-Achse einen Winkel bilden würde, dessen Tangente $\pm\frac{c}{b}$ wäre. Dies ist offenbar nicht der Fall, da ein polarisirter Strahl sich bei allen Erscheinungen als vollständig symmetrisch bezüglich der Polarisationsebene erweist.

Es folgt:

Die Schwingungen eines polarisirten Lichtstrahles sind geradlinig, senkrecht auf dem Strahle, und entweder parallel oder senkrecht zur Polarisationsebene.

Die Existenz transversaler Lichtschwingungen ist also eine experimentelle Thatsache, welche man nicht leugnen kann, ohne die Wellentheorie überhaupt zu verlassen. Andererseits ist die Entstehung und Fortpflanzung transversaler Schwingungen nicht schwerer zu begreifen, als diejenige longitudinaler Schwingungen: wie in einem elastischen Mittel jede örtliche Veränderung der Dichte Kräfte erregt, welche die ursprüngliche Dichte wieder herzustellen suchen, ebenso muss jedes Gleiten einer Schicht Molecüle an benachbarten Schichten Kräfte erregen, welche den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wiederherzustellen streben, und das Spiel dieser Kräfte muss, wenn die ursprünglichen Excursionen eine gewisse Grenze nicht überschreiten, Schwingungen parallel zur Ebene jener Schicht hervorbringen.

Durch die Bewegung einer Schicht Molecüle müssen auch die benachbarten Schichten in Bewegung versetzt werden und es müssen sich in einem elastischen Mittel transversale Vibrationen ebensogut fortpflanzen können, als longitudinale.

Die Möglichkeit transversaler, sich ohne Verdichtung und Verdünnung fortpflanzender Schwingungen ist schliesslich durch Rechnung ausser Zweifel gestellt. Poisson hat nämlich gezeigt, dass in einem isotropen Mittel jede Erschütterung einer Gruppe von Molecülen zwei Systeme von Vibrationen erregt, ein longitudinales, parallel zur Fortpflanzungsrichtung, und ein transversales, senkrecht zu dieser Richtung, ferner dass diese beiden Systeme von Vibrationen sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen [1]).

Erschien sonach die Schwierigkeit, die Existenz von Transversalschwingungen zu begreifen, als beseitigt, so ergab sich nunmehr eine neue Schwierigkeit aus dem Abhandensein der Longitudinalschwingungen des Aethers. Um diese neue Schwierigkeit zu beseitigen, nahm Fresnel an, dass der Aether unzusammendrückbar sei oder dass die Kraft, welche der gegenseitigen Annäherung zweier Schichten Molecüle entgegenwirkt, beträchtlich grösser sei als die dem Gleiten einer Schicht an der anderen entgegenwirkende Kraft. Andere Physiker nahmen später an, dass die Longitudinalschwingungen vorhanden seien ohne eine Wirkung auf die Retina auszuüben.

Endlich haben es die Arbeiten Cauchy's über die elliptische Polarisation durch Reflexion an Metallen und gewissen durchsichtigen Körpern, sowie die Untersuchungen von Holtzmann und Eisenlohr über die Polarisation durch Beugung wahrscheinlich gemacht, dass der Aether zwar fähig ist, Longitudinalschwingungen fortzupflanzen, dass aber die Amplituden dieser Schwingungen weit rascher an Grösse abnehmen als die der Transversalschwingungen, so dass die Longitudinalschwingungen schon in geringer Entfernung von der Erregungsstelle unmerklich werden.

143. Verallgemeinerung des Princips der Transversalität der Lichtschwingungen.

In der Theorie der chromatischen Polarisation wird sich zeigen, dass jeder circular oder elliptisch polarisirte Strahl aus der Coexistenz zweier geradlinig und unter einem rechten Winkel polarisirter Strahlen begriffen werden kann. Das Princip der Transversalität der Lichtschwingungen ist also auch auf diese Arten des polarisirten Lichtes anwendbar, d. h. die Trajectorie des vibrirenden Molecüls liegt, welche Gestalt immer sie habe, in einer Ebene senkrecht zur Richtung des Strahles.

Da sich endlich die Eigenschaften des natürlichen Lichtes aus der Annahme erklären lassen, man habe es mit elliptisch polarisirtem Lichte zu thun, dessen Schwingungen der Form und Orientation der Trajectorie

[1]) *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques. Ann. de chim. et de phys.* (2) XXII, 250; XLIV, 423.

sowie der Phase nach einem raschen und unregelmässigen Wechsel unterliegen, so werden auch die Schwingungen des natürlichen Lichtes als transversal angesehen wie die des polarisirten. Wird gewöhnliches Licht polarisirt, so werden die Schwingungen nicht transversal gemacht, vielmehr von den vorhandenen schon transversalen Bewegungen diejenigen unterdrückt, welche nicht einer bestimmten Richtung entsprechen.

Schliesslich hat Fresnel in seiner Theorie der Doppelbrechung das Princip der Transversalität der Lichtschwingungen auf die doppeltbrechenden Medien ausgedehnt. In diesen gehen die Lichtschwingungen in der die Wellenfläche tangirenden Ebene vor sich wie in den isotropen Medien; die tangirenden Ebenen stehen jedoch in den doppeltbrechenden Medien im Allgemeinen nicht wie in den isotropen genau senkrecht auf den Strahlen. Wenn man also von der Transversalität der Schwingungen in einem doppeltbrechenden Medium spricht, so meint man damit, dass die Schwingungen in der die Welle tangirenden Ebene vor sich gehen und nicht, dass sie auf dem Strahle genau senkrecht stehen.

Bibliographie.

Interferenz des polarisirten Lichtes. — Princip der Transversalität der Lichtschwingungen.

1672. Hooke, *Histoire de la Société royale de Londres par Birch*, t. III, p. 12.

1816. Fresnel, Mémoire sur l'influence de la polarisation dans l'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres, *OEuvres complètes*, t. I, p. 385, 410.

1817. Young, Article *Chromatics* du Supplément à l'Encyclopédie britannique, *Miscell. Works.*, t. I, p. 332.

1817. Young, Lettre à Arago, *Miscell. Works*, t. I, p. 380.

1818. Young, Note annexée au Mémoire de Brewster intitulé: „On the Laws of Polarisation and Double Refraction in regularly crystallized Bodies“, *Phil. Tr.* 1818, p. 272.

1819. Arago et Fresnel, Mémoire sur l'action que les rayons de lumière polarisée exercent les uns sur les autres, *Ann. de chim. et de phys.* (2) X, 288. — *OEuvres complètes de Fresnel*, t. I, p. 507. — *OEuvres complètes d'Arago*, t. X, p. 132.

1821. Fresnel, Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2) XVII, 179.

1821. Fresnel, Mémoire sur la double réfraction, *Mém. de l'Acad. des sc.*, VII, 45.

1823. Poisson, Extrait d'un Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques, *Ann. d. chim. et de phys.*, (2) XXII, 250.

1823. **Fresnel**, Réponse à Poisson. *Ann. de chim. et de phys.*, (2) XXIII, 119.
1840. **Cauchy**, Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels, *C. R.*, X, 905. — *Exercises d'Analyse et de Physique mathématique*, I, 288.
1842. **Cauchy**, Note sur les principales différences qui existent entre les ondes sonores et les ondes lumineuses, *C. R.* XV, 813.
1842. **Schmid**, Versuch einer inductorischen Entwickelung der Undulationstheorie, *Pogg. Ann.* LVI, 400.
1851. **Verdet**, Note sur les interférences de la lumière polarisée, *C. R.*, XXXII, 46. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 377.
1853. **Schmid**, Ueber die Interferenz polarisirten Lichts, *Pogg. Ann.* LXXXIX, 351.
1863. **Lippich**, Ueber die Natur der Aetherschwingungen in unpolarisirtem und theilweise polarisirtem Lichte. Wien. Ber., XLVIII, 2 p. 146.
1873. J. **Stefan**, Interferenzversuche mit dem Soleil'schen Doppelquarz. Wien. Ber. LIII und LXVI.
1876. E. **Mach**, Ueber eine neue Form der Fresnel-Arago'schen Interferenzversuche mit polarisirtem Lichte. Wien. Ber. LXXII.

XII.

Theorie der Doppelbrechung. Einleitung.

144. Historisches.

Der Däne Erasmus Bartholinus machte im Jahre 1669 die Entdeckung, dass das Licht im Kalkspathe doppelt gebrochen wird und dass einer der Strahlen das Gesetz der gewöhnlichen Brechung befolgt[1]). Huyghens ermittelte die Gesetze der Doppelbrechung im Kalkspathe genauer und gab eine allerdings noch unvollkommene Theorie der Doppelbrechung. Er nahm an, dass sich im Kalkspathe zwei Wellensysteme fortpflanzen, ein sphärisches und ein ellipsoidisches, das eine im Aether allein, das andere sowohl im Aether als in der ponderablen Materie des Krystalls. Indem er sodann von seinem Principe der einhüllenden Wellen (10) Gebrauch machte, gelangte er zu einer einfachen Construction, welche in allen Fällen die Richtungen der beiden gebrochenen Strahlen angiebt, und er fand die Richtigkeit seiner Construction durch zahlreiche Versuche bestätigt. Er entdeckte auch die Doppelbrechung im Quarz. Kalkspath und Quarz blieben bis zum Beginne unseres Jahrhunderts die einzigen bekannten doppeltbrechenden Körper.

Newton fügte in dem Capitel seiner Optik, welches von der Doppelbrechung handelt[2]), den von Huyghens gemachten Beobachtungen wenig bei. Er erkannte die Unmöglichkeit, die von Huyghens selbst entdeckten Erscheinungen der Polarisation des Lichtes aus der damaligen Wellentheorie zu erklären (11), und versuchte eine Erklärung der Polarisation und Doppelbrechung auf dem Boden der Emissionstheorie.

Nach Newton beschäftigte man sich erst wieder im Anfange dieses Jahrhunderts mit dem Studium der Doppelbrechung, wo Wollaston[3]) und später Malus[4]) die von Huyghens gegebene Construc-

---

[1]) *Experimenta cristalli Islandici*, 1670. [2]) *Optics*, III. [3]) *Phil. Trans.* 1802. [4]) *Théorie de la double réfraction*, Paris, 1810.

tion einer neuerlichen experimentellen Prüfung unterzogen. Hierbei bemerkte Malus, dass die Doppelbrechung auch an anderen Krystallen, als den beiden, an welchen sie bis dahin beobachtet worden war, auftritt, und stellte an verschiedenen Krystallen Messungen an.

Als 1811 die Entdeckung der chromatischen Polarisation ein Mittel lieferte, auch einen sehr geringen Grad der Doppelbrechung selbst an sehr kleinen Krystallen nachzuweisen, wurde durch die Arbeiten Biot's[1]), Brewster's[2]) und der Mineralogen die Zahl der bekannten doppeltbrechenden Minerale wenigstens eben so gross als die der einfachbrechenden.

Durch seine Versuche über die chromatische Polarisation wurde Biot darauf geführt, zwei Gattungen der Doppelbrechung zu unterscheiden, je nachdem die Phänomene sich symmetrisch um eine Achse anordneten, längs welcher selbst keine Doppelbrechung stattfand, oder um zwei solche Achsen, welche unter einem variablen Winkel gegen einander geneigt waren. Er unterschied ferner sowohl bei den einachsigen als bei den zweiachsigen Krystallen, ob die eine Achse oder die beiden Achsen ein anziehendes oder abstossendes Verhalten gegen jenen der beiden gebrochenen Strahlen zeigten, welcher das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgte oder sich demselben am meisten näherte.

In dem Maasse, als die Zahl der bekannten doppeltbrechenden Körper zunahm, wuchs auch die Kenntniss von den Beziehungen, welche zwischen der Doppelbrechung und der Krystallform bestehen. Schon Dufay hatte erkannt, dass die Krystalle des tesseralen Systems keine Doppelbrechung zeigen[3]). Hauy fand, dass alle Krystalle, welche einem anderen als dem tesseralen Systeme angehören, Doppelbrechung zeigen[4]). Endlich gelangte 1818 Brewster auf Grund von Versuchen an 150 krystallisirter Minerale zu dem Resultate, dass den Krystallen des hexagonalen und des tetragonalen Systems eine einzige optische Achse zukommt, den übrigen zwei optische Achsen.

Durch all dies waren indess die Erscheinungen der Doppelbrechung um nichts verständlicher geworden. In der Emissionstheorie beschränkte sich Laplace[5]) darauf, aus den von Huyghens gefundenen Gesetzen abzuleiten, dass die Wirkung des doppeltbrechenden Mediums auf die Molecüle des ordentlichen Strahles eine constante ist, und dass die Wirkung desselben auf die Molecüle des ausserordentlichen Strahles sich von jener um ein Glied unterscheidet, welches dem Quadrate des Cosinus des Winkels des Strahles mit der Achse proportional ist, ohne eine Erklärung dieser ungleichen Wirkung zu versuchen. In der Wellentheorie erklärte Young[6]) die Entstehung der ellipsoidischen Wellen

---

[1]) *Mém. de la prem. classe de l'Inst.* XIII u. XIV. — *Mém. de l'Acad. des sc.* III, 177. [2]) *Phil. Trans.* 1818. [3]) *Mém. de l'anc. Acad. des sc.* 1739. [4]) *Traité de minéralogie* I, 159. — *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1788. [5]) *Mém. d'Arcueil,* II, 3. — *Mém. de la prem. classe de l'Inst.* X, 300. [6]) *Quarterly Review,* 1809. — *Miscell. Works,* I, 228.

aus einer Ungleichheit der Elasticität des Mittels in verschiedenen Richtungen, ohne dass hierdurch die Entstehung zweier mit verschiedenen und bleibenden Eigenschaften begabter Lichtstrahlen verständlich geworden wäre. In der That konnte eine befriedigende Erklärung nicht gegeben werden, so lange man die Schwingungen des Lichtes für longitudinal hielt.

Fresnel eröffnete seine Studien über die Doppelbrechung mit einer wichtigen Entdeckung: er fand, dass bei den zweiachsigen Krystallen keiner der beiden Strahlen das Gesetz des Cartesius befolgt, dass also in diesem Falle gar kein ordentlich gebrochener Strahl existirt[1]. Young's Theorie, welcher die Doppelbrechung in zweiachsigen Krystallen auf die Entstehung einer Kugelwelle und einer Welle von der Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoides zurückzuführen suchte, war hierdurch widerlegt. Es handelte sich nunmehr darum, eine zweitheilige Wellenfläche von der Eigenschaft zu finden, zu drei rechtwinkeligen Achsen symmetrisch zu sein und im Falle zweier gleicher Achsen in eine Kugelfläche und ein Huyghens'sches Ellipsoid zu zerfallen. Dieses Problem löste Fresnel in seiner bewundernswerthen Arbeit über die Doppelbrechung[2]. Aus Schriften Fresnel's, welche bis zur Veröffentlichung seiner sämmtlichen Werke ungedruckt blieben, geht hervor, dass Fresnel, um die Gestalt der Wellenfläche zu finden, anfangs durchaus inductiv verfuhr; erst als er seine Resultate durch das Experiment bestätigt fand, suchte er nach einer mechanischen Erklärung.

Wenn es nun Fresnel auch nicht gelang, was er anstrebte, eine Ableitung *a priori* der Gesetze der Doppelbrechung zu geben, so ist es doch gewiss, dass die Gesetze, welche von ihm aufgestellt wurden, mit den Experimenten in Uebereinstimmung blieben, ja gestatteten, völlig neue und überraschende Phänomene vorauszusagen, welche den Experimentatoren ohne Fresnel's Theorie wohl entgangen wären, so die Erscheinung der conischen Refraction, welche Hamilton aus der Theorie Fresnel's deducirte[3] und Lloyd experimentell darstellte[4].

Fresnel gelang es nicht, die Gleichung der Wellenfläche anders zu erhalten, als indem er sie *a priori* als vom vierten Grade voraussetzte und die Coëfficienten so bestimmte, dass sie gewissen Bedingungen genügten, welche sich leicht aus der Betrachtung der Fortpflanzung der Planwellen parallel den drei Symmetrieachsen des Mittels ergaben. Ampère[5] führte zuerst die Berechnung strenge durch, welche später von Senarmont beträchtlich vereinfacht wurde[6].

Zahlreiche Physiker und Mathematiker, zunächst Cauchy, bemühten sich die Schwierigkeiten in der Theorie Fresnel's zu beseiti-

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (2) XX, 337. [2]) *Mém. de l'Acad. des sc.* VII, 45. [3]) *Trans. of Ir. Acad.* XV, 69. — XVI, 1, 94. [4]) *Trans. of Ir. Acad.* XVII, 3. [5]) *Ann. de chim. et de phys.* (2) XXXIX, 113. [6]) *Journ. de l'Ec. Polytechn.* XXV, 1.

gen. Cauchy veröffentlichte 1829 eine Theorie der Doppelbrechung, welche von jeder Hypothese frei war[1]). Er zeigte, dass, wenn man den Aether als aus Molecülen bestehend ansieht, deren Zwischenräume so gross sind, dass man die Molecüle bezüglich ihrer Wechselwirkung als Punkte ansehen kann, die Gesetze Fresnel's angenähert erhalten werden und zwar unter der Voraussetzung einer schwachen Doppelbrechung. Ueberdies muss man, um Fresnel's Gesetze aus der Theorie Cauchy's herzuleiten, zwischen den Coëfficienten, von welchen Grösse und Richtung der elastischen Kräfte abhängen, Relationen annehmen, über deren Nothwendigkeit und physikalische Bedeutung Cauchy's Theorie keinen Aufschluss giebt.

Nach den Arbeiten Cauchy's wurde die Theorie der Doppelbrechung ein Zweig der allgemeinen Theorie der Elasticität und Gegenstand eingehender Studien von Green[2]), Lamé[3]), Plücker[4]), Beer[5]) und vielen Anderen.

---

[1]) *Exerc. de Mathémat.* V, 19. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, IX, 114. — X, 293. — XVIII, 153. — *Exerc. d'analyse et de phys. mathémat.* I, 288. [2]) *Cambr. Trans.* VII, 120. [3]) *Ann. de phys. et de chim.*, (2), LV, 322. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides,* Paris, 1852, *leçons* XVII — XXIV. [4]) *Journ. Crelle,* XIX, 1, 91. [5]) *Phil. Mag.,* (4), II, 297. — Grunert's Archiv, XVI, 223.

XIII.

Theorie der Doppelbrechung. Fresnel.

145. Ausgangspunkte der Theorie Fresnel's.

In den optisch isotropen Mitteln, d. i. in den nicht krystallinischen und in den dem tesseralen Krystallsysteme angehörigen verhalten sich alle Richtungen gleich. In diesen Mitteln ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherbewegung unabhängig von der Fortpflanzungsrichtung und der Polarisationsrichtung. Die Elasticitätskräfte wirken parallel den Verschiebungen der Molecüle. Hingegen in den krystallinischen Mitteln, welche nicht dem tesseralen System angehören, d. i. in den doppeltbrechenden, verhalten sich verschiedene Richtungen verschieden. Es wird angenommen, dass in solchen Mitteln die Aethermolecüle in verschiedenen Richtungen verschieden angeordnet sind und dass folglich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherbewegung von der Fortpflanzungsrichtung und der Polarisationsrichtung abhängt, und dass die Elasticitätskräfte den Verschiebungen der Molecüle im Allgemeinen nicht mehr parallel sind.

Denkt man sich in einem homogenen Mittel einen Punkt, welcher als Erschütterungscentrum angenommen wird, in allen möglichen Richtungen aus der Ruhelage gebracht, so nennt man die Fläche, bis zu welcher sich sämmtliche Bewegungen am Ende einer bestimmten Zeit fortgepflanzt haben, die Wellenfläche. Diese hat in den isotropen Mitteln die Gestalt einer Kugel, nicht aber in den doppeltbrechenden. Die Wellenfläche soll im Folgenden stets auf die Einheit der Zeit bezogen werden.

Die optischen Eigenschaften eines Körpers hängen offenbar wesentlich von der Gestalt der Wellenfläche ab, und es bildet die Auffindung der Gestalt derselben das eigentliche Problem der Theorie der Doppelbrechung.

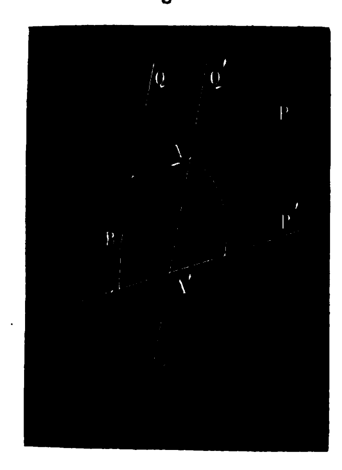
Fresnel vereinfachte dieses Problem dadurch, dass er statt der Fortpflanzung der Wellenfläche selbst diejenige der tangirenden ebenen

Wellen betrachtete, oder mit anderen Worten statt der Fortpflanzung der von einem Punkte ausgehenden Erschütterung diejenige ebener Wellen, welche in einem gegebenen Momente in allen möglichen Richtungen durch den Punkt hindurchgehen.

Es ist leicht, die Beziehung zu finden, in welcher die Lage dieser ebenen Wellen am Ende einer bestimmten Zeit zur Wellenfläche steht.

Betrachten wir eine sich in einem unendlich ausgedehnten Mittel unverändert fortpflanzende ebene Welle. Soll sich die ebene Welle unverändert fortpflanzen können, so müssen die Elasticitätskräfte in Richtungen wirken, welche den Verschiebungen der Molecüle parallel sind. Dieser Satz bildet eine der Hauptgrundlagen der Theorie Fresnel's.

Fig. 99.



Dies vorausgesetzt sei, Fig. 99, P eine sich unverändert fortpflanzende ebene Welle und P' die Lage derselben nach Verlauf einer Zeiteinheit. Nehmen wir auf der Welle P' einen beliebigen Punkt A' an, so zeigt eine Betrachtung, welche der in (59) über die Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem isotropen Mittel angestellten analog ist, dass die Bewegung des Punktes A' von einem sehr kleinen Theile der Welle P herrührt, deren Mittelpunkt A sein soll, und dass die Welle P eine von A' ausgegangene, der Zeiteinheit entsprechende, Wellenfläche in A berührt. Sei Q eine zweite ebene Welle, welche die Wellenfläche in B berührt und sich ebenfalls unverändert fortpflanzt. Am Ende einer Zeiteinheit wird diese Welle ebenfalls durch A' gehen und die Lage Q' einnehmen, und ebenso wird es sich mit allen übrigen ebenen Wellen verhalten, welche die Wellenfläche berühren und sich unverändert fortpflanzen. Stellt man sich nun vor, dass die ebenen Wellen sich in den entgegengesetzten Richtungen fortbewegen, so dass sie am Anfange der Zeit die Lagen P', Q' ... einnehmen und am Ende der Zeiteinheit die Lagen P, Q ..., so gelangt man zu dem Satze: Die Wellenfläche ist die Einhüllende aller Planwellen verschiedener Richtungen, welche in einem bestimmten Momente durch den Mittelpunkt der Wellenfläche hindurchgegangen sind und sich hierauf während einer Zeiteinheit unverändert fortgepflanzt haben.

Die Bestimmung der Gestalt der Wellenfläche ist hierdurch zurückgeführt auf die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen.

146. Fresnel's Hypothesen.

Fresnel's Theorie beruht auf einer Anzahl Hypothesen, welche wir im Folgenden entwickeln wollen, indem wir den Weg andeuten, auf welchem Fresnel zu denselben gelangte.

Die einachsigen Krystalle sind optisch symmetrisch um eine Achse. Eine Verschiebung eines einzigen Molecüls senkrecht zur Achse wird also Elasticitätskräfte wecken, welche das Molecül in seine Ruhelage zurückzutreiben suchen, d. i. in dem der Verschiebung entgegengesetzten Sinne wirken. Dasselbe muss von einer der Achse parallelen Verschiebung gelten. Die in dem einen und dem anderen Falle geweckten Elasticitätskräfte werden jedoch der Intensität nach nicht gleich sein.

Nun lehren die experimentellen Gesetze der Doppelbrechung:

1. die im Hauptschnitte polarisirten Strahlen pflanzen sich mit der constanten Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles fort;
2. die zur Achse senkrechten und senkrecht zum Hauptschnitte polarisirten Strahlen pflanzen sich ebenfalls mit einer constanten Geschwindigkeit fort, der des ausserordentlichen zur Achse normalen Strahles.

Diese experimentellen Thatsachen werden durch die folgenden drei Hypothesen unmittelbar verständlich:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel der Elasticitätskraft proportional.
2. Die Schwingungen des polarisirten Lichtes stehen auf der Polarisationsebene senkrecht.
3. Schwingen in einer ebenen Welle die Molecüle parallel oder senkrecht zur Achse, so ist die auf eines der Molecüle wirkende Elasticitätskraft proportional jener Kraft, welche auf das Molecül wirken würde, wenn es allein sich in Bewegung befände, während die übrigen Molecüle in ihren Ruhelagen verharrten, woraus folgt, dass die Elasticitätskraft bei einer bestimmten Schwingungsrichtung der Molecüle von der Fortpflanzungsrichtung der Welle unabhängig ist.

Unter diesen Voraussetzungen stehen die Schwingungen aller im Hauptschnitte polarisirten Strahlen auf der Achse senkrecht und es sind die Schwingungen aller senkrecht zum Hauptschnitte polarisirten und auf der Achse senkrechten Strahlen mit der Achse parallel. Im einen wie im anderen Falle ergeben sich constante Elasticitätskräfte und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Bemerkt man, dass im einachsigen Krystall jede zur Achse senkrechte Gerade der Durchschnitt zweier optischer Symmetrieebenen des

Krystalles ist, so kann man zu der weiteren Annahme geführt werden, dass in einem zweiachsigen Krystalle Schwingungen einer Planwelle, welche parallel einer der drei Durchschnittslinien der drei aufeinander senkrechten optischen Symmetrieebenen des Krystalls vor sich gehen, ebenfalls Elasticitätskräfte wecken proportional jenen, welche der Verschiebung eines einzigen Molecüls entsprechen, und dass die Grösse dieser Kräfte auch hier von der Richtung der Planwelle unabhängig sei, welcher die Bewegung des Molecüls angehört. Es ergiebt sich aus dieser neuen Hypothese für die zweiachsigen Krystalle die Existenz dreier Schaaren von Strahlen, welche in den drei Symmetrieebenen nach dem Descartes'schen Gesetze gebrochen werden, jede mit einem ihr eigenthümlichen Brechungsexponenten.

Es ist natürlich, eine Hypothese, welche so viele Einzelheiten erklärt, zu verallgemeinern, so dass Fresnel als ein Princip seiner Theorie annahm, dass in allen Fällen der Fortpflanzung eines Systems ebener Wellen mit geradlinigen und transversalen Schwingungen die auf ein Molecül ausgeübten elastischen Kräfte nur durch die Richtung der Schwingungen, nicht aber durch die Fortpflanzungsrichtung der Welle bestimmt seien, und dass diese Kräfte jenen Kräften proportional seien, welche auf das Molecül ausgeübt würden, wenn es allein sich bewegte.

Wenn, wie Fresnel annimmt, die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen, so müssen in den einachsigen Krystallen die Schwingungen der ausserordentlichen Strahlen, welche stets senkrecht zum Hauptschnitte polarisirt sind, parallel dem Hauptschnitte vor sich gehen, d. i. in einer Ebene, welche durch die Achse und den Strahl geht; wird andererseits angenommen, dass die Schwingungen transversal sind, so müssen dieselben auf den Durchschnitt der ebenen Welle mit dem Hauptschnitte fallen. Die durch Ausweichungen in dieser Richtung geweckten Elasticitätskräfte werden nun im Allgemeinen nicht im entgegengesetzten Sinne der Verschiebungen wirken, da dies nur für Verschiebungen parallel oder senkrecht zur Achse gelten soll. Es könnte daher scheinen, dass die ausserordentlichen Planwellen sich in den einachsigen Krystallen im Allgemeinen nicht unverändert fortpflanzen können. Die Elasticitätskraft, um welche es sich handelt, liegt jedoch in Folge der Symmetrie im Hauptschnitte, wie die Bewegung, durch welche sie hervorgerufen wird, und folglich ist wenigstens jene Composante der Elasticitätskraft, welche auf die Ebene der Welle fällt, der Ausweichung des Molecüls parallel. Könnte man also nur diese Composante als wirksam betrachten, so fände sich die Fortpflanzung der ausserordentlichen Wellen erklärt.

In dieser Weise wurde Fresnel darauf geführt, die Composante der elastischen Kraft senkrecht zur Ebene der Welle als unwirksam anzunehmen und diese Unwirksamkeit

durch die Hypothese der Unzusammendrückbarkeit des Aethers zu erklären. Er nahm also an, dass es zur unveränderten Fortpflanzung einer Welle genüge, dass die auf die Ebene der Welle fallende Composante der Elasticitätskraft der Verschiebung des Molecüls parallel wirke.

Fresnel nahm, wie schon erwähnt, an, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer sich in einem homogenen Medium fortpflanzenden ebenen Welle der Quadratwurzel aus der wirksamen Composante der Elasticitätskraft proportional sei. Fresnel begründete diese Hypothese mit der Analogie zwischen den transversalen Aetherschwingungen und den transversalen Schwingungen einer gespannten Saite. Man weiss, dass die Schwingungsdauer einer gespannten Saite ihrer Länge gerade und der Quadratwurzel ihrer Spannung verkehrt proportional ist, woraus folgt, dass der Quotient der Länge der Saite durch die Schwingungsdauer der Quadratwurzel der Spannung proportional ist. Fresnel nahm daher an, dass auch bei der Lichtbewegung der Quotient der Wellenlänge durch die Schwingungsdauer (d. i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit) der Quadratwurzel der elastischen Kraft proportional sei, welche hier die Spannung der Saite vertritt.

Fresnel's Hypothesen sind sonach:

1. Die Schwingungen des polarisirten Lichtes stehen senkrecht auf der Polarisationsebene.
2. Die bei der Fortpflanzung eines Systems geradlinig polarisirter ebener Wellen auf eines der Molecüle wirkende Elasticitätskraft ist proportional der Kraft, welche auf das Molecül wirken würde, wenn dieses allein sich in Bewegung befände, also unabhängig von der Fortpflanzungsrichtung des Wellensystems, doch abhängig von der Schwingungsrichtung des Molecüls.
3. Pflanzt sich eine ebene Welle in einem homogenen Mittel fort, so sind nur die der Ebene der Welle parallelen Composanten der Elasticitätskräfte wirksam.
4. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer sich in einem homogenen Mittel fortpflanzenden ebenen Welle ist proportional der Quadratwurzel der wirksamen Composante der durch die Schwingungen der Welle erregten Elasticitätskraft.

147. Berechnung der Elasticitätskraft, welche durch die Verschiebung eines einzigen Molecüls erregt wird.

Die zweite jener vier Hypothesen führte Fresnel zur Berechnung der Elasticitätskraft, welche durch eine Verschiebung eines einzigen

Molecüles erregt wird. Die Arbeiten Fresnel's in dieser Richtung bilden noch heute die Grundlage der allgemeinen Theorie der Elasticität.

Wir setzen ein homogenes Mittel voraus und legen in demselben beliebig ein rechtwinkeliges Coordinatensystem. Die Kraft, welche ein Aethermolecül M', dessen Coordinaten x', y', z' sind, auf ein Molecül M, dessen Coordinaten x, y, z sind, ausübt, sei

$$\mu^2 f(r),$$

wo μ die constante Masse eines Molecüls und r die gegenseitige Entfernung zweier Molecüle sein sollen. Das Molecül M befindet sich im Gleichgewichte, wenn die Resultante der von sämmtlichen übrigen Molecülen auf dasselbe ausgeübten Kräfte der Null gleich ist, d. i. wenn

$$\left.\begin{aligned} \Sigma f(r)\frac{x-x'}{r} &= 0, \\ \Sigma f(r)\frac{y-y'}{r} &= 0, \\ \Sigma f(r)\frac{z-z'}{r} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Erfährt das Molecül M eine sehr kleine Verschiebung aus der Ruhelage δs, deren Projectionen auf die drei Axen δx, δy, δz sind, so wird die gegenseitige Entfernung der Molecüle M und M' gleich $r + \delta r$, und bezeichnet man durch $X\delta s$, $Y\delta s$, $Z\delta s$ die Composanten der Elasticitätskraft, welche alsdann auf das Molecül M wirkt, so hat man, wenn auch der Einfachheit wegen $\mu^2 = 1$ gesetzt wird:

$$X\delta s = \Sigma f(r+\delta r)\frac{x+\delta x-x'}{r+\delta r},$$

$$Y\delta s = \Sigma f(r+\delta r)\frac{y+\delta y-y'}{r+\delta r},$$

$$Z\delta s = \Sigma f(r+\delta r)\frac{z+\delta z-z'}{r+\delta r}.$$

Diese Ausdrücke werden vereinfacht, indem man $f(r + \delta r)$ in die Tailor'sche Reihe entwickelt und die Glieder höheren Grades vernachlässigt. Man erhält:

$$X\delta s = \Sigma\Big[f(r) + \delta r f'(r)\Big]\left[\frac{x+\delta x-x'}{r\left(1+\frac{\delta r}{r}\right)}\right]$$

$$= \Sigma\Big[f(r) + \delta r f'(r)\Big]\left(\frac{x+\delta x-x'}{r}\right)\left(1-\frac{\delta r}{r}\right)$$

und weiter mit Rücksicht auf (1) und abermals unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$X\delta s = \Sigma\left\{f(r)\left[\frac{\delta x}{r} - \frac{(x-x')\delta r}{r^2}\right] + f'(r)\frac{x-x'}{r}\delta r\right\}.$$

Andererseits hat man

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

$$\delta r = \frac{(x-x')\delta x + (y-y')\delta y + (z-z')\delta z}{r},$$

und folglich

$$X\delta s = \Sigma\left\{f(r)\left[\frac{\delta x}{r} - \frac{(x-x')^2\delta x + (x-x')(y-y')\delta y + (x-x')(z-z')\delta z}{r^2}\right]\right.$$
$$\left. + f'(r)\frac{(x-x')^2\delta x + (x-x')(y-y')\delta y + (x-x')(z-z')\delta z}{r^3}\right\},$$

also

$$X\delta s = \delta x\,\Sigma\left\{\frac{f(r)}{r}\left[1 - \frac{(x-x')^2}{r^2}\right] + f'(r)\frac{x-x'}{r^2}\right\}$$
$$+ \delta y\,\Sigma\left[f'(r)\frac{(x-x')(y-y')}{r^2} - f(r)\frac{(x-x')(y-y')}{r^3}\right]$$
$$+ \delta z\,\Sigma\left[f'(r)\frac{(x-x')(z-z')}{r^2} - f(r)\frac{(x-x')(z-z')}{r^3}\right].$$

Man gelangt so zu den folgenden Ausdrücken für die Composanten der durch die kleine Verschiebung des Molecüls M erregten, auf dieses Molecül wirkenden Elasticitätskraft:

$$X\delta s = \delta x\,\Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')^2}{r^2}\right\}$$
$$+ \delta y\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(y-y')}{r^2}$$
$$+ \delta z\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(z-z')}{r^2},$$

$$Y\delta s = \delta x\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(y-y')}{r^2}$$
$$+ \delta y\,\Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(y-y')^2}{r^2}\right\}$$
$$+ \delta z\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(y-y')(z-z')}{r^2},$$

$$Z\delta s = \delta x\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(z-z')}{r^2}$$
$$+ \delta y\,\Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(y-y')(z-z')}{r^2}$$
$$+ \delta z\,\Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(z-z')^2}{r^2}\right\}.$$

Diese Ausdrücke werden auf eine endgiltige Form gebracht, indem man

$$A = \Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')^2}{r^2}\right\},$$

$$B = \Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(y-y')^2}{r^2}\right\},$$

$$C = \Sigma\left\{\frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(z-z')^2}{r^2}\right\},$$

$$D = \Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(y-y')(z-z')}{r^2},$$

$$E = \Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(z-z')}{r^2},$$

$$F = \Sigma\left[f'(r) - \frac{f(r)}{r}\right]\frac{(x-x')(y-y')}{r^2}$$

setzt, wodurch

$$X\delta s = A\delta x + F\delta y + E\delta z,$$
$$Y\delta s = F\delta x + B\delta y + D\delta z,$$
$$Z\delta s = E\delta x + D\delta y + C\delta z,$$

wird, und mit α, β, γ die Winkel der Richtung der Verschiebung mit den Achsen bezeichnet, so dass:

$$\cos\alpha = \frac{\delta x}{\delta s},\ \cos\beta = \frac{\delta y}{\delta s},\ \cos\gamma = \frac{\delta z}{\delta s}.$$

Man hat schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} X &= A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ Y &= F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ Z &= E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

X, Y, Z sind die drei parallel den Achsen genommenen Composanten der durch die Verschiebung des Molecüls M erregten Elasticitätskraft, bezogen auf die Einheit der Verschiebung.

148. Das Princip der Superposition der Elasticitätskräfte.

Eine Verschiebung ε eines Molecüls M, welche mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, ruft eine Elasticitätskraft hervor, deren Composanten parallel den Achsen sind:

$$X\varepsilon = A\varepsilon\cos\alpha + F\varepsilon\cos\beta + E\varepsilon\cos\gamma,$$
$$Y\varepsilon = F\varepsilon\cos\alpha + B\varepsilon\cos\beta + D\varepsilon\cos\gamma,$$
$$Z\varepsilon = E\varepsilon\cos\alpha + D\varepsilon\cos\beta + C\varepsilon\cos\gamma.$$

Für eine Verschiebung gleich $\varepsilon_1 = \varepsilon \cos \alpha$ parallel der x-Achse sind die Composanten der erregten Elasticitätskraft:

$$X_1 \varepsilon_1 = A \varepsilon \cos \alpha, \quad Y_1 \varepsilon_1 = F \varepsilon \cos \alpha, \quad Z_1 \varepsilon_1 = E \varepsilon \cos \alpha.$$

Ebenso ergiebt sich für die analogen Verschiebungen parallel der y- und z-Achse:

$$X_2 \varepsilon_2 = F \varepsilon \cos \beta, \quad Y_2 \varepsilon_2 = B \varepsilon \cos \beta, \quad Z_2 \varepsilon_2 = D \varepsilon \cos \beta,$$
$$X_3 \varepsilon_3 = E \varepsilon \cos \gamma, \quad Y_3 \varepsilon_3 = D \varepsilon \cos \gamma, \quad Z_3 \varepsilon_3 = C \varepsilon \cos \gamma.$$

Man hat folglich:

$$X\varepsilon = X_1 \varepsilon_1 + X_2 \varepsilon_2 + X_3 \varepsilon_3,$$
$$Y\varepsilon = Y_1 \varepsilon_1 + Y_2 \varepsilon_2 + Y_3 \varepsilon_3,$$
$$Z\varepsilon = Z_1 \varepsilon_1 + Z_2 \varepsilon_2 + Z_3 \varepsilon_3.$$

Diese Gleichungen sprechen das Princip der Superposition der Elasticitätskräfte aus, welches in der allgemeinen Theorie der Elasticität einen hervorragenden Platz einnimmt:

Erfährt ein Molecül eine sehr kleine Verschiebung, und zerlegt man dieselbe in drei Verschiebungen parallel den Coordinatenachsen, so ist die durch die Verschiebung des Molecüls erregte Elasticitätskraft die Resultante der drei Elasticitätskräfte, welche durch die drei Composanten der Verschiebung erregt werden.

Dieses Princip gilt nur für sehr kleine Verschiebungen, da bei der Ableitung der Gleichung (2) die Glieder mit höheren Potenzen der Verschiebung vernachlässigt wurden.

149. Das Elasticitätsellipsoid.

Die Projection der Elasticitätskraft auf die Richtung der Verschiebung ist, bezogen auf die Einheit der Verschiebung:

$$P = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + 2 D \cos \beta \cos \gamma$$
$$+ 2 E \cos \gamma \cos \alpha + 2 F \cos \alpha \cos \beta.$$

Denkt man sich nun von der Ruhelage des Molecüls aus in der Richtung der Verschiebung eine Strecke $u = \frac{1}{\sqrt{-P}}$ (P ist stets negativ) abgetragen und dies für alle möglichen Richtungen der Verschiebung ausgeführt, so bilden sämmtliche Abtragungspunkte eine Fläche, deren Gleichung ist:

$$-\frac{1}{u^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$
$$+ 2 D \cos \beta \cos \gamma + 2 E \cos \gamma \cos \alpha + 2 F \cos \alpha \cos \beta.$$

Da ferner

$$\cos\alpha = \frac{x}{u}, \quad \cos\beta = \frac{y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{u},$$

so kann diese Gleichung auch geschrieben werden:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = -1.$$

Die Fläche ist also vom zweiten Grade und da sie nothwendig geschlossen ist, ein Ellipsoid. Wir nennen dieses Ellipsoid das Elasticitätsellipsoid.

150. Die Elasticitätsachsen.

Wir lassen nun die Coordinatenachsen auf die Achsen des Elasticitätsellipsoides fallen. Die Gleichung dieses Ellipsoides nimmt dann die Form an

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$

und in dem Ausdrucke für P (149) verschwinden die Glieder mit den Producten $\cos\beta\,\cos\gamma$, $\cos\gamma\,\cos\alpha$, $\cos\alpha\,\cos\beta$, da sonst die Gleichung des Ellipsoides Glieder mit Producten verschiedener Coordinaten enthalten müsste. Wir erhalten also für diese Lage des Coordinatensystems

$$A = -L, \quad B = -M, \quad C = -N,$$
$$D = E = F = 0,$$

und die Gleichungen (2) gehen über in:

$$X = -L\cos\alpha, \; Y = -M\cos\beta, \; Z = -N\cos\gamma.$$

Wir wollen nun erforschen, in welchen Richtungen eine Verschiebung des Molecüls eine Elasticitätskraft hervorruft, welche der Richtung der Verschiebung parallel ist. Die Bedingungsgleichung ist offenbar:

$$\frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma},$$

oder

$$L\,\cos\alpha\,\cos\beta = M\,\cos\alpha\,\cos\beta,$$
$$M\,\cos\beta\,\cos\gamma = N\,\cos\beta\,\cos\gamma,$$
$$N\,\cos\gamma\,\cos\alpha = L\,\cos\gamma\,\cos\alpha.$$

Wenn, was der allgemeinste Fall ist, die drei Coëfficienten L, M, N ungleich sind, d. i. wenn das Mittel nach drei rechtwinkeligen Achsen ungleich elastisch ist, so werden diese Gleichungen nur dadurch befriedigt, dass einer der drei Winkel α, β, γ Null und die beiden anderen $\frac{\pi}{2}$ werden, d. h. soll die erregte Kraft der Verschiebung parallel sein, so muss die Verschiebung einer der drei Achsen parallel sein. Wir gelangen so zu dem folgenden wichtigen Satze:

In einem homogenen Mittel giebt es stets drei rechtwinkelige Richtungen, die Achsen des Elasticitätsellipsoides, von der Beschaffenheit, dass eine kleine Verschiebung eines Moleculs in einer dieser Richtungen eine Elasticitätskraft parallel zur Richtung der Verschiebung hervorruft, und im Allgemeinen keine andere Richtung von derselben Eigenschaft. Diese Richtungen sollen Elasticitätsachsen heissen.

Findet die Verschiebung parallel zur X-Achse statt, so ist

$$X = -L, \; Y = 0, \; Z = 0,$$

parallel zur Y-Achse,

$$X = 0, \; Y = -M, \; Z = 0,$$

parallel zur Z-Achse,

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = -N.$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die drei Elasticitätskräfte L, M, N den reciproken Quadraten der Halbachsen des Elasticitätsellipsoides proportional sind.

Sind zwei der Grössen L, M, N gleich, so ist das Elasticitätsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid und jede Richtung in der Ebene der gleichen Achsen ist eine Elasticitätsachse. Wenn also in einem homogenen Mittel zwei gleich grosse und unter einander rechtwinkelige Verschiebungen gleich grosse und den Verschiebungen parallele Elasticitätskräfte hervorrufen, so werden alle ebenso grossen Verschiebungen in der Ebene jener beiden Richtungen ebenso grosse und ebenfalls den Verschiebungen parallele Elasticitätskräfte hervorrufen. Dies ist der Fall im Aether der einachsigen Krystalle.

Sind die drei Grössen L, M, N sämmtlich gleich, so geht das Elasticitätsellipsoid in eine Kugel über und jede Richtung ist eine Elasticitätsachse. Wenn also in einem homogenen Mittel in drei rechtwinkeligen Richtungen gleich grosse Verschiebungen gleich grosse und den Verschiebungen parallele Kräfte hervorrufen, so wird dies für alle möglichen Richtungen der Fall sein.

Kehren wir zum allgemeinen Falle zurück. Bezeichnen wir durch a, b, c die drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten jener Schwingungen, welche parallel den drei Achsen vor sich gehen. Da nach der zweiten und vierten Hypothese Fresnel's (146) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wurzel aus der Elasticitätskraft proportional ist, kann die Gleichung des Elasticitätsellipsoids geschrieben werden:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

und die den Achsen parallelen Composanten der Elasticitätskraft, welche durch eine mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschliessende sehr kleine Verschiebung hervorgebracht wird, sind bezogen auf die Einheit der Verschiebung:

$$X = -a^2 \cos\alpha, \; Y = -b^2 \cos\beta, \; Z = -c^2 \cos\gamma.$$

151. Hauptrichtungen.

Suchen wir unter allen in einer Ebene möglichen Verschiebungen eines Molecüls jene, für welche die Projectionen der erregten Elasticitätskräfte auf die gedachte Ebene den Verschiebungen parallel sind.

Legen wir zu diesem Zwecke das Coordinatensystem so, dass die x- und y-Achse mit den Achsen des elliptischen Schnittes der gedachten Ebene und des Elasticitätsellipsoides zusammenfallen. Dann wird die Gleichung des Elasticitätsellipsoides, da $F = 0$:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + 2Exz = -1,$$

und die Composanten der elastischen Kraft:

$$X = A\cos\alpha + E\cos\gamma,$$
$$Y = B\cos\beta + D\cos\gamma,$$
$$Z = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma.$$

Da die Verschiebung in der xy-Ebene erfolgt, hat man

$$\gamma = \frac{\pi}{2},\ \cos\beta = \sin\alpha,$$

und folglich

$$X = A\cos\alpha,$$
$$Y = B\sin\alpha,$$
$$Z = E\cos\alpha + D\sin\alpha.$$

Soll nun die Projection der elastischen Kraft auf die Schnittebene mit der Verschiebung zusammenfallen, so muss

$$\frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\sin\alpha}$$

oder

$$A\cos\alpha\ \sin\alpha = B\sin\alpha\ \cos\alpha.$$

Da A und B im Allgemeinen verschiedene Werthe haben, so muss folglich entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sein.

Wir gelangen also zu dem folgenden Satze:

Unter allen möglichen Verschiebungen eines Molecüls in einer bestimmten Ebene giebt es im Allgemeinen nur zwei, welche elastische Kräfte wecken, deren Projectionen auf die Ebene der Verschiebungen mit den Verschiebungen selbst der Richtung nach zusammen-

fallen. Diese beiden Verschiebungen stehen auf einander senkrecht und fallen mit den Achsen der Ellipse zusammen, in welcher das Elasticitätsellipsoid von der Ebene geschnitten wird, in welcher die Verschiebungen stattfinden.

Diese beiden Richtungen werden die Hauptrichtungen genannt.

Ist die Ebene, in welcher die Verschiebungen stattfinden, ein Kreisschnitt des Ellipsoides, so ist jede Richtung in dieser Ebene eine Hauptrichtung.

152. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Wellen.

Nach Fresnel's Anschauung pflanzt sich ein System ebener Wellen nur dann fort, wenn die erregten Elasticitätskräfte den Verschiebungen parallel wirken. Diese Elasticitätskräfte sind nach einer der Hypothesen Fresnel's bis auf einen constanten Factor identisch mit den durch die Verschiebungen der einzelnen Molecüle für sich erregten Kräften. Nach einer anderen dieser Hypothesen wirken nur die der Ebene der Welle parallelen Composanten der Kräfte. Demnach pflanzen sich ebene Wellen nur dann fort, wenn die Schwingungen der Molecüle in einer Hauptrichtung der Ebene der Welle vor sich gehen. Hat die Verschiebung auf einer ebenen Welle eine beliebige Richtung, so kann man dieselbe stets nach dem Principe der Superposition der Elasticitätskräfte in zwei Verschiebungen parallel den Hauptrichtungen zerlegen. Eine ebene Welle zerlegt sich sonach im Allgemeinen in zwei ebene Wellen, auf welchen die Schwingungen den Hauptrichtungen parallel und unter einander senkrecht vor sich gehen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden ebenen Wellen, senkrecht zur Ebene der Wellen genommen, sind verschieden. Dieselben sind nach der vierten Hypothese Fresnel's proportional der Quadratwurzel aus der wirksamen Composante der elastischen Kraft und folglich nach der Construction des Elasticitätsellipsoides verkehrt proportional den Achsen des elliptischen Schnittes dieses Ellipsoides und der Wellenebene.

Wir gelangen sonach zu dem folgenden Satze:

Jeder Richtung normaler Fortpflanzung entsprechen zwei Systeme ebener Wellen, deren Schwingungen parallel den Achsen der Ellipse vor sich gehen, in welcher das Elasticitätsellipsoid, d. i. ein in dem doppeltbrechenden Körper fest liegendes Ellipsoid, von einer durch seinen Mittelpunkt gehenden und zur Richtung der normalen Fortpflanzung senkrechten, also zu den Wellen selbst parallelen Ebene geschnitten wird. Die normalen Fortpflan-

zungsgeschwindigkeiten dieser beiden Systeme ebener Wellen sind den Achsen jener Ellipse verkehrt proportional.

Dieser Satz kann das Grundgesetz der Doppelbrechung genannt werden, welches man durch zahlreiche Experimente verificirt hat. Diesen Satz und seine Consequenzen nennt man **die Fresnel'schen Gesetze** der Doppelbrechung. Frésnel gelangte zu diesem Satze zuerst auf dem Wege der Verallgemeinerung. Es ist jedoch noch Folgendes wohl zu bemerken. Nach Fresnel's Theorie ist jede der beiden Schwingungsrichtungen jener Achse des elliptischen Schnittes parallel, welcher die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit verkehrt proportional ist. Dieses Resultat der Theorie Fresnel's ist jedoch weder experimentell, noch, wie sich zeigen wird, durch die genauere Theorie verificirt, die Frage, ob das linear polarisirte Licht in der Polarisationsebene schwingt oder senkrecht zu derselben, ist heute noch eine offene.

Sind α, β, γ die Winkel einer der Hauptrichtungen mit den Coordinatenachsen, so sind die Composanten der elastischen Kraft entsprechend einer Verschiebung parallel zu dieser Hauptrichtung:

$$X = - a^2 \cos\alpha, \quad Y = - b^2 \cos\beta, \quad Z = - c^2 \cos\gamma.$$

Die Projection der elastischen Kraft auf die Verschiebungsrichtung, d. i. die wirksame Composante derselben ist

$$-(a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma)$$

und folglich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Planwelle, deren Molecüle parallel dieser Hauptrichtung schwingen:

$$\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}.$$

Ist die Planwelle parallel einer der Elasticitätsachsen, so fällt eine der Hauptrichtungen mit dieser Elasticitätsachse zusammen, eine der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich a, b oder c, je nachdem die Welle der x-, y- oder z-Achse parallel ist.

Ist die Planwelle einem Kreisschnitte des Elasticitätsellipsoides parallel, so pflanzt sich die Welle unverändert fort, welches immer die Schwingungsrichtung der Molecüle sei, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist von der Schwingungsrichtung unabhängig.

153. Das Ellipsoid der gleichen Arbeit.

Das Elasticitätsellipsoid besitzt die folgende bemerkenswerthe Eigenschaft[1]):

Um die zur Ausführung einer Verschiebung δs eines Molecüls bei ungeänderter Lage der übrigen Molecüle erforderliche Arbeit zu bestimmen, haben wir nur eine Componente der ganzen durch die Ver-

[1]) J. Stefan, Theorie der Doppelbrechung, Wien. Ber. L (2).

schiebung geweckten Kraft in Rechnung zu ziehen, nämlich jene Componente, welche in die Richtung der Verschiebung fällt. Da δs mit den Coordinatenachsen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \frac{\delta z}{\delta s}.$$

sind, so ist jene Componente gegeben durch

$$X \delta s \cdot \frac{\delta x}{\delta s} + Y \delta s \cdot \frac{\delta y}{\delta s} \cdot Z \delta s + \frac{\delta z}{\delta s} \cdot$$

Dieselbe wächst während der Vornahme der Verschiebung von Null an bis zu ihrem Endwerthe, sowie δs von Null an bis zu seinem Endwerthe zunimmt. Die gethane Arbeit ist daher

$$\frac{\delta s}{2}(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Setzt man darin für X, Y, Z die Werthe aus den Gleichungen in (150), so erhält man für die gethane Arbeit:

$$-\frac{\delta s}{2}(a^2 \cos\alpha\, \delta x + b^2 \cos\beta\, \delta y + c^2 \cos\gamma\, \delta z)$$

oder

$$-\frac{1}{2}(a^2 \delta x^2 + b^2 \delta y^2 + c^2 \delta z^2).$$

Diese Formel giebt die bei der Verschiebung δs von den Kräften des Systems gethane Arbeit, welcher die zur Bewerkstelligung dieser Verschiebung nothwendige der absoluten Grösse nach gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt ist.

Bezeichnen wir die letztere Arbeit mit $\mathfrak{A}$, so wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(a^2 \delta x^2 + b^2 \delta y^2 + c^2 \delta z^2).$$

Nach dieser Formel kann man die zu jeder gegebenen Verschiebung δs erforderliche Arbeit berechnen. Betrachtet man aber $\mathfrak{A}$ als eine gegebene constante Grösse, so giebt die letzte Gleichung eine Bedingung, welcher die Projectionen δx, δy, δz einer Verschiebung δs genügen müssen, damit diese Verschiebung mit der gegebenen Arbeit bewerkstelligt werden kann, sie giebt den geometrischen Ort der Endpunkte aller jener Verschiebungen, welche mit dem Aufwande einer und derselben Arbeit $\mathfrak{A}$ ausgeführt werden können, sie ist die Gleichung der Fläche der gleichen Arbeit $\mathfrak{A}$. Diese Fläche ist somit ein Ellipsoid, dessen Gleichung, wenn der Einfachheit wegen jetzt x, y, z für δx, δy, δz gesetzt wird, geschrieben werden kann:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 2\mathfrak{A}.$$

Man sieht, dass dieses E l l i p s o i d d e r g l e i c h e n A r b e i t mit dem Elasticitätsellipsoid (150) ähnlich ist und dieselbe Lage hat, mit

anderen Worten, dass das Elasticitätsellipsoid und das Ellipsoid der gleichen Arbeit identisch sind.

Aus der Bedeutung des Elasticitätsellipsoides als einer Fläche gleicher Arbeit folgt unmittelbar, dass jede Verschiebung in der Oberfläche des Ellipsoides ohne Aufwand, natürlich auch ohne Gewinn von Arbeit bewerkstelligt werden kann. Daraus folgt, dass auf den in die Oberfläche geschobenen Punkt keine tangentiale Kraft wirkt. Das heisst:

Durch eine Verschiebung in der Richtung des Radiusvectors des Elasticitätsellipsoides wird eine Kraft geweckt, die mit der Normale des Ellipsoides gleiche Richtung hat.

Legt man durch das Centrum des Ellipsoides eine Ebene parallel der Planwelle, so ist der Schnitt eine Ellipse. Durch eine Verschiebung in der Richtung des Radiusvectors der Ellipse wird folglich eine Kraft geweckt, deren Projection auf die Ebene der Ellipse mit der Normale der Ellipse gleiche Richtung hat. Soll sich also die Planwelle fortpflanzen können, so muss die Normale der Ellipse mit dem Radiusvector zusammenfallen, oder die Schwingungen müssen parallel einer der Achsen der Ellipse vor sich gehen.

154. Die Elasticitätsfläche.

Um die Gestalt der Wellenfläche zu finden, beschäftigen wir uns zunächst mit der sogenannten Elasticitätsfläche. Man lege durch einen beliebigen Punkt des Mittels alle möglichen Ebenen und ebenso viele Gerade, welche auf je einer der Ebenen senkrecht stehen. Auf jeder dieser Normalen trage man von jenem Punkte aus zu beiden Seiten zwei Stücke ab, verkehrt proportional den beiden Achsen des elliptischen Schnittes der entsprechenden Ebene mit dem Elasticitätsellipsoide oder gerade proportional den beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche der Richtung der Normale entsprechen. Der Ort der Abtragungspunkte ist die Elasticitätsfläche. Legt man durch sämmtliche Abtragungspunkte Ebenen senkrecht zu den entsprechenden Normalen, so hat man die einem bestimmten Zeitmomente entsprechenden Lagen aller ebenen Wellen, welche gleichzeitig durch das Centrum gegangen sind, und die Wellenfläche ist die Enveloppe aller dieser Ebenen.

Suchen wir zunächst die Gleichung der Elasticitätsfläche. Wir lassen die Coordinatenachsen mit den Elasticitätsachsen zusammenfallen, bezeichnen durch l, m, n die Winkel der Normale einer der Planwellen mit den Coordinatenachsen und durch α, β, γ die Winkel zwischen den Coordinatenachsen und einer der Achsen jener Ellipse, in welcher das Elasticitätsellipsoid parallel der Planwelle geschnitten wird.

Dann ist

$$\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach (152) sind die Richtungscosinus der elastischen Kraft, welche durch eine Verschiebung in der Richtung (α, β, γ) geweckt wird, proportional den Grössen

$$a^2\cos\alpha, \quad b^2\cos\beta, \quad c^2\cos\gamma$$

und die Projection der elastischen Kraft auf die Ebene der Welle ist der Verschiebung parallel. Betrachtet man also eine Hülfsrichtung, normal sowohl zur Richtung der Kraft als zu jener der Verschiebung, so fällt diese Richtung auf die Wellenebene, und ihre Winkel u, v, w mit den Achsen erfüllen die Bedingung:

$$a^2\cos\alpha\cos u + b^2\cos\beta\cos v + c^2\cos\gamma\cos w = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\cos\alpha\cos u + \cos\beta\cos v + \cos\gamma\cos w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\cos l\cos u + \cos m\cos v + \cos n\cos w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ist ferner r die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Planwelle, so hat man (152)

$$r^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen α, β, γ, u, v, w, so bleibt eine Relation zwischen r, l, m, n übrig, welche die Polargleichung der Elasticitätsfläche ist.

Um u, v, w zu eliminiren, wenden wir die Methode der unbestimmten Coëfficienten an. Wir multipliciren die Gleichungen (2), (3), (4) der Reihe nach mit B, A, 1, addiren dieselben und bestimmen A und B so, dass die Coëfficienten von $\cos v$ und $\cos w$ der Null gleich werden. Wir erhalten dann die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(A + Ba^2)\cos\alpha + \cos l &= 0\\(A + Bb^2)\cos\beta + \cos m &= 0\\(A + Bc^2)\cos\gamma + \cos n &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf (1) und (5):

$$A = - Br^2.$$

Substituirt man diesen Werth von A nach (6), so erhält man

$$\cos l = B(r^2 - a^2)\cos\alpha,$$

$$\cos m = B(r^2 - b^2)\cos\beta,$$

$$\cos n = B(r^2 - c^2)\cos\gamma\,.$$

und hieraus

$$\frac{\dfrac{\cos l}{r^2-a^2}}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cos m}{r^2-b^2}}{\cos\beta} = \frac{\dfrac{\cos n}{r^2-c^2}}{\cos\gamma} = \sqrt{\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}} \quad (7)$$

Ersetzt man nun in (1) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die proportionalen Grössen

$$\frac{\cos l}{r^2 - a^2}, \quad \frac{\cos m}{r^2 - b^2}, \quad \frac{\cos n}{r^2 - c^2},$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

als Polargleichung der Elasticitätsfläche.

Es ist wohl zu bemerken, dass die Gleichung der Elasticitätsfläche aus den Fresnel'schen Gesetzen (152) auch auf rein geometrischem Wege erhalten wird.

155. Die Wellenfläche.

Legen wir durch einen Punkt der Elasticitätsfläche, dessen Polarcoordinaten l, m, n, r sind, eine Ebene normal zum Radiusvector r und bezeichnen wir durch ϱ, λ, μ, ν die Polarcoordinaten irgend eines Punktes dieser Ebene, so ist die Gleichung derselben:

$$\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu = \frac{r}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

und man hat überdies:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1, \\ &\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

Die Wellenfläche ist die Enveloppe der durch die Gleichung (9) bestimmten Ebenen. Um daher die Gleichung der Wellenfläche zu erhalten, eliminirt man aus den drei Gleichungen (9) und (10) und den sechs Gleichungen, welche man dadurch erhält, dass man jene Gleichungen nach den unabhängigen Parametern, wie $\cos l$ und $\cos m$, differenzirt, die acht Grössen

$$r, \cos l, \cos m, \cos n, \frac{d\cos n}{d\cos l}, \frac{d\cos n}{d\cos m}, \frac{dr}{d\cos l}, \frac{dr}{d\cos m}.$$

Hierdurch erhält man eine Gleichung, in welcher ausser a, b, c nur noch ϱ, λ, μ, ν vorkommen.

Die sechs Gleichungen, welche man durch Differenziation der Gleichungen (9) und (10) erhält, sind:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\lambda + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos l} = \frac{1}{\varrho}\frac{dr}{d\cos l},\\
&\cos l + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos l} = 0,\\
&\frac{\cos l}{r^2-a^2} + \frac{\cos n}{r^2-c^2}\frac{d\cos n}{d\cos l} = \frac{dr}{d\cos l} r \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}\right]
\end{aligned}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\mu + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos m} = \frac{1}{\varrho}\frac{dr}{d\cos m},\\
&\cos m + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos m} = 0,\\
&\frac{\cos m}{r^2-b^2} + \frac{\cos n}{r^2-c^2}\frac{d\cos n}{d\cos m} = \frac{dr}{d\cos m} r \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}\right]
\end{aligned}\right\} (12)$$

Um die Elimination der Grössen $\frac{d\cos n}{d\cos l}$, $\frac{d\cos n}{d\cos m}$, $\frac{dr}{d\cos l}$, $\frac{dr}{d\cos m}$ zu bewerkstelligen, verfahren wir abermals nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten. Wir multipliciren die Gleichungen (11) der Reihe nach mit 1, A, $-B$ und addiren sie, ebenso die Gleichungen (12). Man sieht leicht, dass dieselben Werthe von A und B, welche die Coëfficienten von $\frac{d\cos n}{d\cos l}$ und $\frac{dr}{d\cos l}$ in der sich aus (11) ergebenden Gleichung der Null gleich machen, auch die Coëfficienten von $\frac{d\cos n}{d\cos m}$ und $\frac{dr}{d\cos m}$ in der sich aus (12) ergebenden Gleichung der Null gleich machen müssen. Wir haben also zwei Gleichungen zur Bestimmung von A und B. Fügen wir die beiden Gleichungen hinzu, welche sich aus (11) und (12) ergeben, wenn A und B dermaassen bestimmt sind, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
\cos\lambda + A\cos l &= B\frac{\cos l}{r^2-a^2},\\
\cos\mu + A\cos m &= B\frac{\cos m}{r^2-b^2},\\
\cos\nu + A\cos n &= B\frac{\cos n}{r^2-c^2},\\
\frac{1}{\varrho} &= Br\left[\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}\right]
\end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

Wenn man die drei ersten dieser Gleichungen der Reihe nach mit $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ multiplicirt und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung von (9) und (10):

$$A + \frac{r}{\varrho} = 0.$$

Wenn man dieselben Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man:

$$1 + A^2 + 2A\frac{r}{\varrho} = \frac{B}{r\varrho}.$$

Es ergiebt sich hieraus für A und B:

$$A = -\frac{r}{\varrho},\ B = \frac{r}{\varrho}(\varrho^2 - r^2).$$

Setzt man diese Werthe in (13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho\cos\lambda}{\varrho^2 - a^2} &= \frac{r\cos l}{r^2 - a^2},\\
\frac{\varrho\cos\mu}{\varrho^2 - b^2} &= \frac{r\cos m}{r^2 - b^2},\\
\frac{\varrho\cos\nu}{\varrho^2 - c^2} &= \frac{r\cos n}{r^2 - c^2},\\
\frac{1}{\varrho^2 - r^2} &= r^2\left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right]\\
&= \varrho^2\left[\frac{\cos^2\lambda}{(\varrho^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2\mu}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2\nu}{(\varrho^2 - c^2)^2}\right]
\end{aligned}\right\} . \quad (14)$$

Die drei ersten der Gleichungen (14) können auf die Form gebracht werden:

$$\cos\lambda - \frac{r}{\varrho}\cos l = (\varrho^2 - r^2)\frac{\cos\lambda}{\varrho^2 - a^2},$$

$$\cos\mu - \frac{r}{\varrho}\cos m = (\varrho^2 - r^2)\frac{\cos\mu}{\varrho^2 - b^2},$$

$$\cos\nu - \frac{r}{\varrho}\cos n = (\varrho^2 - r^2)\frac{\cos\nu}{\varrho^2 - c^2}.$$

Multiplicirt man diese letzteren Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und addirt sie, so hat man mit Rücksicht auf (9):

$$1 - \frac{r^2}{\varrho^2} = (\varrho^2 - r^2)\left(\frac{\cos^2\lambda}{\varrho^2 - a^2} + \frac{\cos^2\mu}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu}{\varrho^2 - c^2}\right);$$

und schliesslich

$$\frac{\cos^2\lambda}{\varrho^2 - a^2} + \frac{\cos^2\mu}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu}{\varrho^2 - c^2} = \frac{1}{\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

als Polargleichung der Wellenfläche.

Diese Gleichung kann auf eine für die Discussion bequemere Form gebracht werden. Zieht man nämlich die Gleichung (15) von der identischen Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{\varrho^2} + \frac{\cos^2\mu}{\varrho^2} + \frac{\cos^2\nu}{\varrho^2}$$

ab, so erhält man als **Gleichung der Wellenfläche**

$$\frac{a^2 \cos^2 \lambda}{\varrho^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \mu}{\varrho^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2 \nu}{\varrho^2 - c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

unter welcher Form man die Gleichung der Wellenfläche zu schreiben pflegt.

Um die Gleichung der Wellenfläche in rechtwinkeligen Coordinaten zu erhalten, genügt es, in (16) $\cos \lambda$ durch $\frac{x}{\varrho}$, $\cos \mu$ durch $\frac{y}{\varrho}$, $\cos \nu$ durch $\frac{z}{\varrho}$ und ϱ durch $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(b^2 + c^2) x^2 \\ - b^2(a^2 + c^2) y^2 - c^2(a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0 \quad . \quad (17)\end{aligned}$$

Haben demnach die drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten a, b, c verschiedene Werthe, so ist die Gleichung der Wellenfläche eine Gleichung vierten Grades.

Haben zwei von den Grössen a, b, c gleiche Werthe, wie dies bei einachsigen Krystallen der Fall ist, ist z. B. $b = c$, so zerfällt die Gleichung (17) in zwei Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2) = a^2 b^2.$$

Die Wellenfläche zerlegt sich in eine Kugel und ein Umdrehungsellipsoid, und zwar berührt das letztere die Kugel in den Endpunkten seiner Umdrehungsachse.

Ist endlich $a = b = c$, wie dies bei isotropen Mitteln zutrifft, so reducirt sich die Gleichung der Wellenfläche auf

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

die Gleichung einer Kugelfläche.

156. Construction der Wellenfläche.

Um die Wellenfläche zu construiren, betrachten wir das sogenannte **zweite Ellipsoid**, dessen Halbachsen bezüglich den drei Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten proportional sind, und dessen Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wir legen durch den Mittelpunkt dieses Ellipsoids eine beliebige Ebene und tragen auf der Normale Stücke ab, welche den Achsen des entstandenen elliptischen Schnittes proportional sind.

Erinnern wir uns an die Construction der Elasticitätsfläche mittelst des Elasticitätsellipsoids, dessen Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

ist, so sehen wir unmittelbar, dass, wenn wir durch ϱ, λ, μ, ν die Polarcoordinaten der durch die obige Construction gegebenen Punkte bezeichnen, wir die Polargleichung des geometrischen Ortes dieser Punkte erhalten, wenn wir in der Gleichung der Elasticitätsfläche r^2, a^2, b^2, c^2, l, m, n durch $\frac{1}{\varrho^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, λ, μ, ν ersetzen. Wir gelangen so zur Gleichung

$$\frac{\cos^2\lambda}{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{a^2}} + \frac{\cos^2\mu}{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{b^2}} + \frac{\cos^2\nu}{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{c^2}} = 0$$

oder

$$\frac{a^2\cos^2\lambda}{\varrho^2-a^2} + \frac{b^2\cos^2\mu}{\varrho^2-b^2} + \frac{c^2\cos^2\nu}{\varrho^2-c^2} = 0,$$

der Gleichung der Wellenfläche.

Wir werden also zu der folgenden Construction der Wellenfläche geführt:

Man lege eine beliebige Ebene durch den Mittelpunkt des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und trage vom Mittelpunkte aus auf der Normale dieser Ebene zwei Strecken ab proportional den Achsen der Ellipse, in welcher das Ellipsoid durch die Ebene geschnitten wird: der geometrische Ort der so erhaltenen Punkte ist die Wellenfläche.

157. Schwingungsrichtung auf der Wellenfläche.

Eliminirt man aus der Gleichung (7) und den drei ersten der Gleichungen (14) die Grössen $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, so erhält man unter Berücksichtigung der letzten der Gleichungen (13) und des Werthes von B:

$$\frac{\frac{\cos\lambda}{\varrho^2-a^2}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos\mu}{\varrho^2-b^2}}{\cos\beta} = \frac{\frac{\cos\nu}{\varrho^2-c^2}}{\cos\gamma} = \sqrt{\frac{\cos^2\lambda}{(\varrho^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2\mu}{(\varrho^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2\nu}{(\varrho^2-c^2)^2}}$$

$$= \frac{r}{\varrho}\sqrt{\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}}$$

$$= \frac{r}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{Br\varrho}} = \frac{1}{\varrho\sqrt{\varrho^2-r^2}},\text{ also}$$

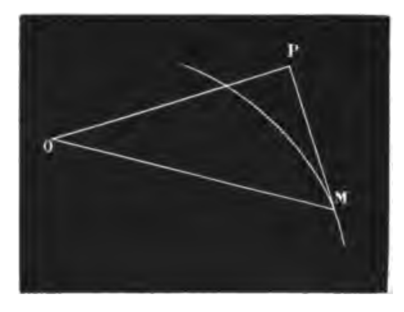
$$\frac{\cos\lambda}{\varrho^2-a^2} = \frac{\cos\alpha}{\varrho\sqrt{\varrho^2-r^2}},\quad \frac{\cos\mu}{\varrho^2-b^2} = \frac{\cos\beta}{\varrho\sqrt{\varrho^2-r^2}},\quad \frac{\cos\nu}{\varrho^2-c^2} = \frac{\cos\gamma}{\varrho\sqrt{\varrho^2-r^2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (15) der Wellenfläche, so hat man

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varrho^2}}.$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist der Cosinus des Winkels zwischen der Schwingungsrichtung in einem Punkte M der Wellenfläche (Fig. 100) und dem Radiusvector OM dieses Punktes. Andererseits ist $\frac{r}{\varrho}$ der Cosinus des Winkels zwischen dem Radiusvector und dem Perpendikel OP, welches vom Ursprunge O auf die tangirende Ebene des Punktes M der Wellenfläche gefällt wird. Es folgt, dass die Schwingungen des Punktes M längs MP vor sich gehen.

Fig. 100.



Wir gelangen also zu dem folgenden wichtigen Satze:

Man erhält für irgend einen Punkt der Wellenfläche die Schwingungsrichtung, wenn man den Radiusvector dieses Punktes der Wellenfläche auf die tangirende Ebene desselben Punktes projicirt.

Diese Construction verliert ihre Anwendbarkeit in dem Falle, wo der Radiusvector auf der Wellenfläche senkrecht steht, doch findet man dann die Schwingungsrichtung leicht in anderer Weise.

Die Ebene OMP, welche den Radiusvector und die Schwingungsrichtung enthält, heisst Schwingungsebene. Nach Fresnel steht die Polarisationsebene eines Strahles OM auf der Schwingungsrichtung senkrecht. Da nun im Allgemeinen die Schwingungsrichtung gegen den Strahl geneigt ist, kann die Polarisationsebene nicht zugleich den Strahl enthalten und auf der Schwingungsrichtung senkrecht stehen.

Fresnel nahm daher keineswegs an, dass die Polarisationsebene den Strahl enthalte. Will man, dass dies der Fall sei, so muss man als Polarisationsebene jene Ebene bezeichnen, welche den Strahl enthält und auf der Schwingungsebene senkrecht steht. Da jedoch die bekannten doppeltbrechenden Medien nur eine geringe Doppelbrechung zeigen, kann die Differenz, welche sich aus den beiden Definitionen ergiebt, ausser Acht gelassen werden.

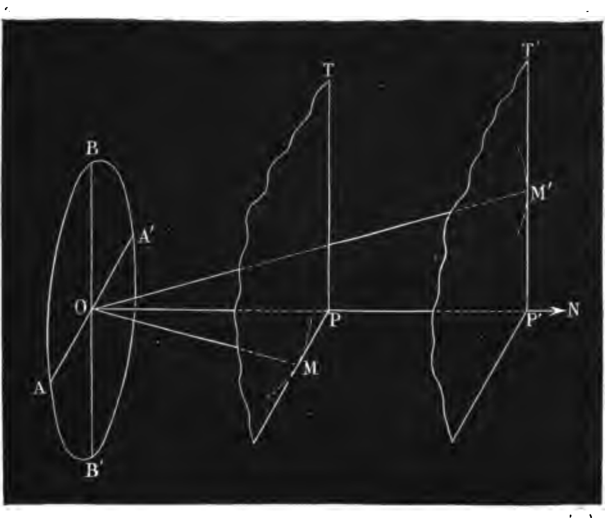
158. Weitere Richtungsbeziehungen.

Nach dem letzten Satze liegen die Schwingungen eines Punktes M der Wellenfläche, die Normale vom Mittelpunkte O der Wellenfläche nach der tangirenden Ebene des Punktes M und der Radiusvector OM in einer und derselben Ebene. Andererseits wissen wir (152), dass derselben Richtung normaler Fortpflanzung noch eine zweite die Wellenfläche in einem anderen Punkte berührende Wellenebene entspricht und dass die Schwingungen in den beiden Berührungspunkten parallel den Achsen der Ellipse vor sich gehen, in welcher das Elasticitätsellipsoid von einer durch seinen Mittelpunkt gehenden und den beiden berührenden Ebenen parallelen Ebene geschnitten wird.

Es folgt:

Zwei Ebenen (OPM, $OP'M'$), welche ein und dieselbe Richtung normaler Fortpflanzung (ON), je eine der beiden zugehörigen Schwingungsrichtungen (MP, $M'P'$) und die entsprechenden Radienvectoren der Wellenfläche (OM, OM') enthalten, stehen auf einander senkrecht.

Fig. 101.



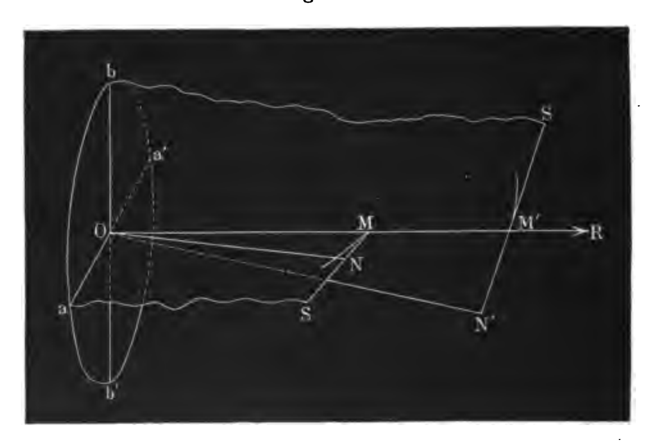
In Fig. 101 bedeutet $AA'BB'$ den elliptischen Schnitt und O den Mittelpunkt des Elasticitätsellipsoids, ON die Richtung normaler Fortpflanzung, T, T' die beiden auf ON senkrechten, die Wellenfläche tangirenden Ebenen, M, M' die beiden Berührungspunkte, $MP \parallel AA'$ und $M'P' \parallel BB'$ die Schwingungsrichtungen in M und M'.

Andererseits entsprechen, da die Wellenfläche eine Doppelfläche ist, jedem Radiusvector zwei Durchschnittspunkte mit der Wellenfläche, also

zwei verschiedene Schwingungsrichtungen. Wir wollen zeigen, dass die beiden Ebenen, welche durch denselben Radiusvector gehen und die beiden diesem Radiusvector entsprechenden Schwingungsrichtungen enthalten, ebenfalls auf einander senkrecht stehen. Zu diesem Zwecke beweisen wir den folgenden Satz (siehe Fig. 102):

Die beiden Schwingungsrichtungen (MS, $M'S'$), welche einem und demselben Radiusvector (OR) der Wellenfläche entsprechen, liegen in zwei Ebenen, ($MSOa$, $M'S'Ob$), welche durch den Radiusvector gehen und durch je eine der beiden Achsen (aa', bb') der Ellipse ($aa'bb'$), in welcher eine zum Radiusvector senkrechte Ebene das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ durchschneidet.

Fig. 102.



Bezeichnen wir durch φ, ψ, χ die Winkel einer der Achsen dieses elliptischen Schnittes mit den Coordinatenachsen, so handelt es sich darum, zu zeigen, dass die drei Geraden (α, β, γ), (λ, μ, ν), (φ, ψ, χ) (Schwingungsrichtung, Radiusvector, Achse der Ellipse) in einer und derselben Ebene liegen.

α, β, γ sind zugleich die Richtungswinkel einer der Achsen jener Ellipse, in welcher das Elasticitätsellipsoid durch eine zu (l, m, n) (Richtung der normalen Fortpflanzung) senkrechten Ebene geschnitten wird, und folglich sind diese Winkel durch die Relation verbunden:

$$\frac{\frac{\cos l}{r^2-a^2}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\cos m}{r^2-b^2}}{\cos\beta}=\frac{\frac{\cos n}{r^2-c^2}}{\cos\gamma}=\sqrt{\frac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2}+\frac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2}+\frac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2}}\,. \quad (7)$$

Um daher die Relation zu erhalten, durch welche φ, ψ, χ verbunden sind, hat man einfach in der letzten Gleichung r^2, α, β, γ, l, m, n, a^2, b^2, c^2 durch $\frac{1}{\varrho^2}$, φ, ψ, χ, λ, μ, ν, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ zu ersetzen und erhält:

$$\frac{\frac{a^2 \cos\lambda}{\varrho^2 - a^2}}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2 \cos\mu}{\varrho^2 - b^2}}{\cos\psi} = \frac{\frac{c^2 \cos\nu}{\varrho^2 - c^2}}{\cos\chi} = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2\lambda}{(\varrho^2 - a^2)^2} + \frac{b^4 \cos^2\mu}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{c^4 \cos^2\nu}{(\varrho^2 - c^2)^2}} \quad (18)$$

Dies vorausgesetzt, betrachten wir die Gerade, welche sowohl auf (λ, μ, ν) als auf (φ, ψ, χ) senkrecht steht und nennen A, B, C die Winkel dieser Geraden mit den Achsen.

Wir haben dann

$$\cos A \cos\lambda + \cos B \cos\mu + \cos C \cos\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\cos A \cos\varphi + \cos B \cos\psi + \cos C \cos\chi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Ersetzt man in (20) $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ durch die ihnen proportionalen Werthe (18), so erhält man

$$\frac{a^2 \cos\lambda}{\varrho^2 - a^2} \cos A + \frac{b^2 \cos\mu}{\varrho^2 - b^2} \cos B + \frac{c^2 \cos\nu}{\varrho^2 - c^2} \cos C = 0.$$

Addirt man diese Gleichung zu (19), so ergiebt sich

$$\frac{\cos\lambda}{\varrho^2 - a^2} \cos A + \frac{\cos\mu}{\varrho^2 - b^2} \cos B + \frac{\cos\nu}{\varrho^2 - c^2} \cos C = 0,$$

und da nach (7) und (14)

$$\frac{\frac{\cos\lambda}{\varrho^2 - a^2}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos\mu}{\varrho^2 - b^2}}{\cos\beta} = \frac{\frac{\cos\gamma}{\varrho^2 - c^2}}{\cos\gamma},$$

so hat man schliesslich

$$\cos\alpha \cos A + \cos\beta \cos B + \cos\gamma \cos C = 0.$$

Da also die drei Geraden (α, β, γ), (λ, μ, ν), (φ, ψ, χ) sämmtlich auf der Geraden (A, B, C) senkrecht stehen, liegen sie nothwendig in einer Ebene, und es folgt:

Die beiden Ebenen, welche durch einen und denselben Radiusvector der Wellenfläche gehen und je eine der beiden diesem Radiusvector zugehörigen Schwingungsrichtungen enthalten, stehen auf einander senkrecht und enthalten die beiden entsprechenden Richtungen normaler Fortpflanzung (ON, ON', Fig. 101).

Wir können diese Resultate kurz so zusammenfassen:

Jeder Wellennormale (ebene Wellen vorausgesetzt) entsprechen zwei Schwingungsrichtungen, welche mit der Normale zwei Ebenen bestimmen, die durch die Achsen des zur Normale senkrechten Schnittes des Elasticitätsellipsoids gehen und die beiden entsprechenden Strahlen enthalten. Jedem Strahle entsprechen zwei Schwingungsrichtungen, welche mit dem Strahle zwei Ebenen bestimmen, die durch die Achsen des zum Strahle senkrech-

ten Schnittes des zweiten Ellipsoids gehen und die beiden entsprechenden Normalen enthalten[1]).

159. Kritik der Theorie Fresnel's.

Nachdem wir Fresnel's geniale Theorie dargelegt haben, kehren wir zum Schlusse zu den Hypothesen zurück, auf welchen dieselbe beruht, um zu bemerken, dass dieselben eine strenge Kritik nicht vertragen und dass insbesondere Cauchy die Irrigkeit jener der Hypothesen Fresnel's nachgewiesen hat, nach welcher die Elasticitätskräfte, welche bei der Fortpflanzung eines Systems ebener, geradlinig polarisirter Wellen wirken, von der Fortpflanzungsrichtung der Wellen unabhängig sein soll. Es ist in Folge dessen auch nicht evident, dass in den einachsigen Krystallen die Vibrationen der ordentlichen Strahlen auf der Achse senkrecht stehen, und Cauchy hat gezeigt, wie man zu denselben Gesetzen der Doppelbrechung gelangen könne, mag man annehmen, dass die Schwingungen des ordentlichen Strahles in der Polarisationsebene liegen oder dass sie auf ihr senkrecht stehen, wenn man nur in den beiden Fällen verschiedene Relationen zwischen den Coëfficienten annimmt, von welchen die Constitution des Mittels abhängt. Die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes ist heute noch als eine offene zu betrachten.

Gleichwohl sind die Resultate der Theorie Fresnel's, als deren Hauptsatz man den in (152) abgeleiteten Satz ansehen kann, durch zahlreiche Experimente und Messungen als vollkommen richtig erkannt worden.

[1]) Wegen einer vollständigen Herleitung aller Consequenzen, welche sich aus dem Fresnel'schen Grundgesetze (152) ergeben, sei verwiesen auf: V. v. Lang, Ueber die Gesetze der Doppelbrechung, Wien. Ber. XLIII (2).

XIV.

Theorie der Doppelbrechung. Cauchy.

160. Ausgangspunkte der Theorie Cauchy's.

Cauchy's Theorie ist frei von den Hypothesen Fresnel's. Wir setzen punktförmige Aethermolecüle voraus, welche sich in den Zwischenräumen zwischen den Molecülen des Körpers befinden und mit gewissen Kräften auf einander wirken. Aus dem Spiele dieser Kräfte leiten wir die Lichtbewegung ab. Wir nehmen ferner an, dass die Schwingungen der Aethermolecüle sehr klein sind im Vergleiche mit ihren gegenseitigen Entfernungen und dass zwischen je zwei Molecülen m, μ eine Kraft thätig sei parallel dem gegenseitigen Abstande r und an Grösse gleich

$$m\mu f(r),$$

wo $f(\ )$ eine unbekannte Function ist.

161. Briot's Ansicht über die Constitution des Aethers.

Briot[1]) definirt den homogenen Aether folgendermaassen:

„Wir betrachten das Aethermedium, welches einen Krystall durchdringt, als ein dem freien Aether analoges, jedoch durch Anwesenheit der ponderablen Molecüle modificirtes Medium. . . . . . Denkt man sich ein isotropes Mittel, welches mit dem betrachteten von gleicher Dichtigkeit ist, und dass dasselbe nach gewissen Richtungen, welche den Linien des Krystalls entsprechen, auseinander- oder zusammengezogen

[1]) Briot Mathematische Theorie des Lichtes, übers. v. Klinkerfues, Leipzig, 1867.

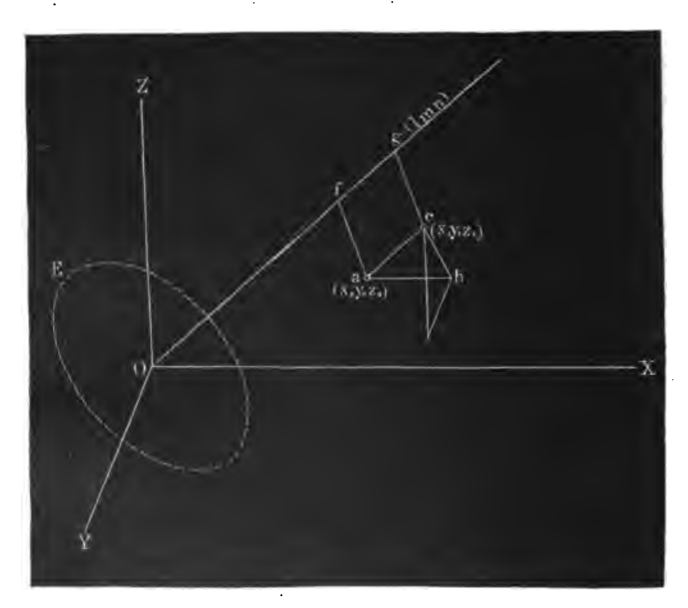
werde, so wird man den Aether, welcher den Krystall erfüllt, dem so modificirten isotropen Mittel anpassen können. In der Wirklichkeit ist die Dichtigkeit des Aethers nicht in allen Punkten einer Zelle, in dem Centrum oder in dem Rande, die nämliche, wird vielmehr nur wieder die nämliche an den homologen Punkten der verschiedenen Zellen; wir vernachlässigen einstweilen diese periodischen Ungleichheiten in der Vertheilung des Aethers und substituiren für die periodische wirkliche Anordnung den erwähnten mittleren Zustand."

Diese Anschauung über die Constitution des Aethers weicht einigermaassen von der Anschauung Cauchy's ab, welcher den Aether als krystallisirt annahm.

Briot's Ansicht über die Constitution des homogenen Aethers führt zu der folgenden Betrachtung:

Wir denken ein isotropes Mittel, legen in dasselbe ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und bezeichnen durch x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Molecüls des Mittels. Es sei, Fig. 103, l, m, n eine beliebige

Fig. 103.



Richtung, E eine durch O gehende auf (lmn) senkrechte Ebene. Es erfahre das Mittel eine Dehnung in der Richtung (lmn), während die Ebene E des Mittels in Ruhe bleibt, d. h. es werde jedes Molecül des Mittels längs seiner Abstandslinie von der Ebene E verschoben, so dass die Länge dieser Abstandslinie, wenn sie ursprünglich e war, λe werde, wo λ für alle Punkte des Mittels constant sein soll. Die neuen

Coordinaten des Molecüls $(x_0 y_0 z_0)$ mögen x_1, y_1, z_1 heissen. Dann hat man

$$x_1 - x_0 = ab = ac.\cos l = fg.\cos l,$$

wenn fg die Projection von ac auf (lmn) ist. Es ist aber

$$fg = og - of = of.\lambda - of = of(\lambda - 1)$$
$$= (x_0 \cos l + y_0 \cos m + z_0 \cos n)(\lambda - 1)$$

und folglich

$$x_1 = x_0 + \cos l (x_0 \cos l + y_0 \cos m + z_0 \cos n)(\lambda - 1).$$

Wir haben also nach der Dehnung des Mittels

$$x_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0,$$
$$y_1 = d_1 x_0 + e_1 y_0 + f_1 z_0,$$
$$z_1 = g_1 x_0 + h_1 y_0 + i_1 z_0,$$

wo $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1$ Functionen von l, m, n, λ sind.

Möge nun das schon veränderte Mittel eine zweite Dehnung λ' in einer anderen Richtung l', m', n' erfahren, hierauf eine dritte, vierte, ... $n$te Dehnung.

Wir haben nach der $n$ten Dehnung für die Coordinaten des betrachteten Molecüls

$$\left.\begin{aligned} x_n &= a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 \\ y_n &= d_n x_0 + e_n y_0 + f_n z_0 \\ z_n &= g_n x_0 + h_n y_0 + i_n z_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die Coëfficienten a_n, b_n, ... i_n von Richtung und Grösse der einzelnen Dehnungen des Mediums abhängen.

Das Mittel befindet sich nun nicht mehr in seinem ursprünglichen Zustande (A), sondern in einem anderen Zustande (B). Jede Linie, welche im Zustande (A) des Mittels gerade war, ist es noch im Zustande (B), und im selben Maasse, in welchem diese Gerade vergrössert oder verkleinert erscheint, sind es auch alle zu ihr parallelen Geraden. Die verschiedenen Zustände, in welchen sich das Mittel nach der Deformation befinden kann, unterscheiden sich durch die verschiedenen Werthe der Coëfficienten $a_n \ldots i_n$.

Wir wollen nun sehen, ob das Mittel aus dem Zustande (A) in den Zustand (B) nicht auch durch weniger als n Dehnungen gebracht werden kann.

Wir haben nach drei Dehnungen in drei auf einander senkrechten Richtungen:

$$x_3 = a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0,$$
$$y_3 = d_3 x_0 + e_3 y_0 + f_3 z_0,$$
$$z_3 = g_3 x_0 + h_3 y_0 + i_3 z_0.$$

Das Mittel befindet sich nun in einem Zustande, welchen wir durch (B') bezeichnen wollen. Soll der Zustand (B') des Mittels dem Zustande (B) gleich sein, so muss das Mittel im Zustande (B') sich so auf das Mittel im Zustande (B) legen lassen, dass die identischen Molecüle sich decken.

Bezeichnen wir durch $OX'Y'Z'$ ein neues Coordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Ursprunge des alten Coordinatensystems zusammenfällt, und dessen Lage gegen jenes durch die drei Grössen p, q, r bestimmt ist, so hat man für die Lage eines der Molecüle in Bezug auf das neue System nach den drei Dehnungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_3' x_0 + b_3' y_0 + c_3' z \\ \eta &= d_3' x_0 + e_3' y_0 + f_3' z_0 \\ \zeta &= g_3' x_0 + h_3' y_0 + i_3' z_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Sollen (B') mit (B) identisch sein, so muss sich die Lage von $OX'Y'Z'$ so bestimmen lassen, dass, wenn man das System $OX'Y'Z'$ sammt dem Mittel um O dreht, bis es auf $OXYZ$ fällt, die Gleichungen (1) und (2) identisch werden, also dass

$$\left.\begin{aligned} a_3' &= a_n & b_3' &= b_n & c_3' &= c_n \\ d_3' &= d_n & e_3' &= e_n & f_3' &= f_n \\ g_3' &= g_n & h_3' &= h_n & i_3' &= i_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$a_n \ldots i_n$ sind gegebene Grössen, $a_3' \ldots i_3'$ sind gegebene Functionen der Grössen $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$, durch welche die Richtungen und Grössen der drei Dehnungen und die Lage des Coordinatensystems $OX'Y'Z'$ bestimmt sind. Da überdies die drei Dehnungen der Richtung nach auf einander senkrecht stehen sollen, so haben wir zur Bestimmung der 15 Grössen

$$l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q, r$$

die neun Gleichungen (3) und überdies die sechs folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos^2 l_1 + \cos^2 m_1 + \cos^2 n_1 &= 1, \\ \cos^2 l_2 + \cos^2 m_2 + \cos^2 n_2 &= 1, \\ \cos^2 l_3 + \cos^2 m_3 + \cos^2 n_3 &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos l_1 \cos l_2 + \cos m_1 \cos m_2 + \cos n_1 \cos n_2 &= 0, \\ \cos l_1 \cos l_3 + \cos m_1 \cos m_3 + \cos n_1 \cos n_3 &= 0, \\ \cos l_2 \cos l_3 + \cos m_2 \cos m_3 + \cos n_2 \cos n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen also:

Durch beliebig viele Dehnungen gelangt das Mittel in einen Zustand, in welchen es stets auch durch nur drei auf einander senkrechte Dehnungen gebracht werden kann.

Man sieht auch leicht, dass drei rechtwinkelige Dehnungen eine im Mittel gedachte Kugel in ein Ellipsoid verwandeln. Ob indessen der so beschaffene homogene Aether Briot's vom isotropen Aether irgendwie unterschieden ist, möge vorläufig dahingestellt bleiben.

162. Differentialgleichungen der Aetherbewegung.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Molecüls m, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ jene eines anderen Molecüls μ, so ist die zwischen den beiden Molecülen wirkende Kraft:

$$m\mu f(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Befindet sich das Molecül m im Gleichgewichte, so hat man, wenn das Summenzeichen Σ sich auf die sämmtlichen übrigen Molecüle bezieht,

$$\Sigma\mu f(r)\frac{\Delta x}{r} = 0, \quad \Sigma\mu f(r)\frac{\Delta y}{r} = 0, \quad \Sigma\mu f(r)\frac{\Delta z}{r} = 0 \quad . \quad (2)$$

Sind in irgend einem Momente der Bewegung des Mittels $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ die Coordinaten des Molecüls m, $x + \Delta x + \xi + \Delta\xi$, $y + \Delta y + \eta + \Delta\eta$, $z + \Delta z + \zeta + \Delta\zeta$ jene des Molecüls μ, $r + \varrho$ die augenblickliche gegenseitige Entfernung der beiden Molecüle, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma\mu f(r+\varrho)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{r+\varrho} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma\mu f(r+\varrho)\frac{\Delta y + \Delta\eta}{r+\varrho} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma\mu f(r+\varrho)\frac{\Delta z + \Delta\zeta}{r+\varrho} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Entwickelt man $f(r + \varrho)$ in eine Reihe und vernachlässigt die Glieder mit höheren Potenzen von ϱ, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma\mu\Big(f(r) + \varrho f'(r)\Big)\Big(\frac{\Delta x + \Delta\xi}{r}\Big)\Big(1 - \frac{\varrho}{r}\Big) \\ &= \Sigma\mu\Big(f(r)\frac{\Delta\xi}{r} + \varrho f'(r)\frac{\Delta x}{r} - \varrho f(r)\frac{\Delta x}{r^2}\Big) \\ &= \Sigma\mu\Big(f(r)\frac{\Delta\xi}{r} + (f'(r) - \frac{f(r)}{r})\varrho\frac{\Delta x}{r}\Big) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Andererseits hat man

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

$$(r + \varrho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2,$$

und, wenn man sich mit demselben Grade der Annäherung begnügt, wie früher,

$$\varrho = \frac{\Delta x\Delta\xi + \Delta y\Delta\eta + \Delta z\Delta\zeta}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Substituirt man diesen Werth von ϱ in den Ausdruck für die Beschleunigungscomposante und bildet die analogen Ausdrücke für die beiden anderen Composanten, so erhält man, wenn überdies der Einfachheit wegen

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(r)}{r} &= \varphi, \\ f'(r) - \frac{f(r)}{r} &= \psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma\mu\Big((\varphi + \psi\frac{\Delta x^2}{r^2})\Delta\xi + \psi\frac{\Delta x\Delta y}{r^2}\Delta\eta + \psi\frac{\Delta x\Delta z}{r^2}\Delta\zeta\Big) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma\mu\Big(\psi\frac{\Delta x\Delta y}{r^2}\Delta\xi + (\varphi + \psi\frac{\Delta y^2}{r^2})\Delta\eta + \psi\frac{\Delta y\Delta z}{r^2}\Delta\zeta\Big) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma\mu\Big(\psi\frac{\Delta x\Delta z}{r^2}\Delta\xi + \psi\frac{\Delta y\Delta z}{r^2}\Delta\eta + (\varphi + \psi\frac{\Delta z^2}{r^2})\Delta\zeta\Big) \end{aligned}\right\} (7)$$

Die Gleichungen (7) sind die Differentialgleichungen der Aetherbewegung. Das vollständige Integral derselben liefert alle bei der angenommenen Constitution des Aethers möglichen Bewegungen. Wir übergehen diese von Cauchy gegebene Integration[1]) und gehen einen mehr indirecten Weg, indem wir die Bewegungsgleichungen eines Systems sich ohne Alteration fortpflanzender ebener Wellen aufstellen und dieselben in die Differentialgleichungen (7) substituiren, um zu sehen, ob dieselben befriedigt erscheinen und ob demnach in einem Aether von der angenommenen Constitution eine solche Bewegung möglich ist.

163. Bewegungsgleichungen eines sich ohne Alteration fortpflanzenden Systems linear polarisirter ebener Wellen.

Wir setzen nun eine undulatorische Bewegung des Aethers von bestimmter Art voraus, indem wir uns vorbehalten, diese Bewegung auf ihre Möglichkeit zu prüfen.

Wir setzen voraus, dass sämmtliche Molecüle einfache harmonische Bewegungen ausführen parallel einer festen Richtung, deren Winkel mit den Coordinatenachsen α, β, γ sein sollen, dass die Amplituden sämmtlicher Schwingungen einer constanten Grösse δ gleich seien, dass in irgend einer Ebene senkrecht zu einer gewissen festen Richtung l, m, n in jedem Momente Phasenübereinstimmung herrsche, nicht aber zwischen den Molecülen zweier verschiedener auf dieser Richtung senkrech-

[1]) *Mémoire sur la dispersion de la lumière,* 1836.

ter Ebenen, dass vielmehr die Bewegung sich von einer solchen Ebene zur nächsten mit einer constanten Geschwindigkeit V fortpflanze; mit anderen Worten, wir setzen ein System sich mit der Geschwindigkeit V fortpflanzender ebener Wellen voraus, welches in einer gegen die Fortpflanzungsrichtung beliebig geneigten Richtung geradlinig polarisirt ist.

Sind R die Entfernung einer solchen sich in einem homogenen Mittel ohne Alteration fortpflanzenden Planwelle vom Ursprunge des Coordinatensystems, ε die Verschiebung eines der Molecüle zur Zeit t, ζ, η, ξ die Composanten dieser Verschiebung parallel den Achsen des Coordinatensystems, so hat man

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon = \delta \sin \frac{2\pi}{\lambda}(R - Vt) \\ \xi = \varepsilon . \cos\alpha, \quad \eta = \varepsilon . \cos\beta, \quad \zeta = \varepsilon . \cos\gamma \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Nach den gemachten Voraussetzungen sind die Winkel α, β, γ für alle Molecüle und alle Zeitmomente unveränderlich.

Sind x, y, z die Coordinaten der Ruhelage eines Molecüls m der Ebene, deren Abstand vom Ursprunge des Coordinatensystems R ist, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Coordinaten eines Molecüls μ einer benachbarten Ebene, deren Entfernung vom Ursprunge des Coordinatensystems $R + \Delta R$ ist, ξ, η, ζ die Composanten der Verschiebung ε des Molecüls m, $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$ jene des Molecüls μ, so ist:

$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und mit Rücksicht hierauf

$$\Delta x \cos l + \Delta y \cos m + \Delta z \cos n = \Delta R \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ferner ergiebt sich aus (8):

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\xi = \cos\alpha\left[\frac{d\varepsilon}{dR}\Delta R + \frac{d^2\varepsilon}{dR^2}\frac{\Delta R^2}{1.2} + \ldots\right] \\ \Delta\eta = \cos\beta\left[\frac{d\varepsilon}{dR}\Delta R + \frac{d^2\varepsilon}{dR^2}\frac{\Delta R^2}{1.2} + \ldots\right] \\ \Delta\zeta = \cos\gamma\left[\frac{d\varepsilon}{dR}\Delta R + \frac{d^2\varepsilon}{dR^2}\frac{\Delta R^2}{1.2} + \ldots\right] \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Wir erhalten durch Differentiation der ersten der Gleichungen (8):

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 V^2}{\lambda^2}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ist $U\varepsilon$ die Elasticitätskraft, welche das Molecül in die Ruhelage zurücktreibt, so hat man:

$$U\varepsilon = m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2},$$

und

$$U = -\frac{4\pi^2 m}{\lambda^2} V^2.$$

Also:

Pflanzt sich eine geradlinig polarisirte ebene Welle ohne Alteration in einem homogenen Mittel fort, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus der auf eines der Molecüle wirkenden Elasticitätskraft.

Die Gleichungen (8) sind die Bewegungsgleichungen eines sich ohne Alteration fortpflanzenden Systems geradlinig in einer gegen die Wellenflächen beliebig geneigten Richtung polarisirter Wellen, deren Molecüle einfache harmonische Bewegungen ausführen, und es handelt sich darum, zu sehen, ob diese Gleichungen den der angenommenen Constitution des Aethers entsprechenden Differentialgleichungen (7) genügen.

164. Möglichkeit der Fortpflanzung eines Systems ebener Wellen.

In den Gleichungen (7) kommen die Grössen ξ, η, ζ nicht vor, wohl aber $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, welche Grössen wir demnach zu entwickeln hätten. Wir ziehen es jedoch vor, dieselben zunächst in der unentwickelten Form (11) nach (7) zu substituiren.

Da die Wirkungen der Molecüle sich nur auf sehr geringe Entfernungen erstrecken, können wir in den Gleichungen (11) die Glieder, welche ΔR in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten, vernachlässigen, werden jedoch auf diese vernachlässigten Glieder bei der Entwickelung der Theorie der Dispersion zurückkommen. Wir sehen überdies, dass unter den Summenzeichen die Glieder mit ΔR sich gegenseitig aufheben werden, da jedem positiven Gliede ein gleiches negatives entsprechen wird. Wir vereinfachen also die Substitution, indem wir beispielsweise für $\Delta\xi$ einfach $\cos\alpha \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dR^2} \cdot \frac{\Delta R^2}{1.2}$ setzen. Es ist aber

$$\cos\alpha \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dR^2} \cdot \frac{\Delta R^2}{1.2} = \cos\alpha \cdot \left(-\frac{4\pi^2\varepsilon}{\lambda^2}\right) \cdot \frac{\Delta R^2}{2} = -\cos a \cdot \frac{2\pi^2\varepsilon}{\lambda^2} \cdot \Delta R^2.$$

Das Resultat der Substitution ist sonach, wenn

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X\varepsilon, \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y\varepsilon, \quad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gesetzt wird, so dass X, Y, Z die Elasticitätskräfte bezogen auf die Einheit der Verschiebung bedeuten,

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{X}{m} &= \cos\alpha\,.\,\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta x^2}{r^2})\,\Delta R^2\right)\\
&+\cos\beta\,.\,\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta x\,\Delta y}{r^2}\,\Delta R^2\right)+\cos\gamma\,.\,\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta x\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{Y}{m} &= \cos\alpha\,.\,\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta x\,\Delta y}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
&+\cos\beta\,.\,\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta y^2}{r^2})\,\Delta R^2\right)+\cos\gamma\cdot\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta y\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{Z}{m} &= \cos\alpha\,.\,\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta x\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
&+\cos\beta\,.\,\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta y\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)+\cos\gamma\,.\,\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta z^2}{r^2})\,\Delta R^2\right)
\end{aligned}\right\}(14)$$

Wir bringen diese Gleichung auf eine etwas andere Form, indem wir einerseits

$$X=\frac{m}{\varepsilon}\frac{d^2\xi}{d\,t^2}=\frac{m}{\varepsilon}\cdot\left(-\frac{4\,\pi^2\,\varepsilon\,V^2}{\lambda^2}\cos\alpha\right)=-\cos\alpha\cdot\frac{4\,m\,\pi^2\,V^2}{\lambda^2}$$

setzen, woraus sich ergiebt

$$-\frac{\lambda^2}{2\,\pi^2\,m}\,X=2\,V^2\cos\alpha,$$

und ebenso

$$-\frac{\lambda^2}{2\,\pi^2\,m}\,Y=2\,V^2\cos\beta,$$

$$-\frac{\lambda^2}{2\,\pi^2\,m}\,Z=2\,V^2\cos\gamma,$$

andererseits der Einfachheit wegen die Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{aligned}
L&=\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta x^2}{r^2})\,\Delta R^2\right)\\
M&=\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta y^2}{r^2})\,\Delta\;R\right)\\
N&=\Sigma\left(\mu(\varphi+\psi\frac{\Delta z^2}{r^2})\,\Delta R^2\right)\\
P&=\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta y\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
Q&=\Sigma\left(\mu\,\psi\frac{\Delta x\,\Delta z}{r^2}\,\Delta R^2\right)\\
R&=\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta x\,\Delta y}{r^2}\,\Delta R^2\right)
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\alpha\, V^2 &= L\cos\alpha + R\cos\beta + Q\cos\gamma \\ 2\cos\beta\, V^2 &= R\cos\alpha + M\cos\beta + P\cos\gamma \\ 2\cos\gamma\, V^2 &= Q\cos\alpha + P\cos\beta + N\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Indem wir also die Bewegungsgleichungen (8) eines Systems beliebig linear polarisirter sich ohne Alteration fortpflanzender Planwellen, um die Möglichkeit der Fortpflanzung eines solchen Wellensystems vom Standpunkte der Theorie Cauchy's zu erforschen, in die Differentialgleichungen (7) einsetzen, gelangen wir zu den Gleichungen (16), das heisst, die Fortpflanzung eines solchen Wellensystems erscheint nicht ohne Weiteres als möglich, vielmehr an die Erfüllung der Bedingungsgleichungen (16) gebunden. In diesen Gleichungen bedeuten α, β, γ die Schwingungsrichtung, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $L \ldots R$ Coëfficienten, welche von der Constitution des Mittels, und, wie man sich durch Substitution aus (10) nach (15) überzeugt, von der Fortpflanzungsrichtung des Wellensystems abhängen.

Die Bedingungsgleichungen (16) sprechen also eine Relation aus zwischen der Fortpflanzungsrichtung des Wellensystems und der Schwingungsrichtung, welche erfüllt sein muss, wenn eine Fortpflanzung des Wellensystems nach Cauchy's Theorie möglich sein soll. Diese Relation wollen wir uns nun näher besehen.

165. Das Polarisationsellipsoid.

Wir erhalten durch Elimination der Grösse $2V^2$ aus den Gleichungen (16):

$$\left.\begin{aligned} \frac{L\cos\alpha + R\cos\beta + Q\cos\gamma}{\cos\alpha} &= \frac{R\cos\alpha + M\cos\beta + P\cos\gamma}{\cos\beta} \\ &= \frac{Q\cos\alpha + P\cos\beta + N\cos\gamma}{\cos} \end{aligned}\right\} . \quad (17)$$

und es ist überdies

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Sind die Coëfficienten $L \ldots R$ gegeben, d. h. ist die Fortpflanzungsrichtung des Wellensystems gegeben, so bestimmen die Gleichungen (17) und (18) die dieser Fortpflanzungsrichtung entsprechende mögliche Schwingungsrichtung.

Wir betrachten das Ellipsoid, dessen Gleichung ist

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qxz + 2Rxy = 1 \quad . \quad . \quad (19)$$

dessen Gestalt und Lage sonach von der Fortpflanzungsrichtung des Wellensystems abhängt. Sind α', β', γ' die Winkel der Achsen dieses Ellipsoids mit den Coordinatenachsen, so hat man nach den Regeln der analytischen Geometrie:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{L\cos\alpha' + R\cos\beta' + Q\cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \dfrac{R\cos\alpha' + M\cos\beta' + P\cos\gamma'}{\cos\beta'} \\ = \dfrac{Q\cos\alpha' + P\cos\beta' + N\cos\gamma'}{\cos\gamma'}\end{array}\right\} \quad (20)$$

und

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Die Gleichungen (20) und (21) gehen in die Gleichungen (18) und (19) über, sobald man α, β, γ für α', β', γ' setzt.

Die Gleichungen (17), (18) besagen also, dass die Schwingungsrichtung mit einer der drei Achsen des Ellipsoids (19) parallel sein muss, welches Cauchy das Polarisationsellipsoid genannt hat.

Die Bedingungsgleichungen (16) sprechen jedoch noch mehr aus, da sie auch die Grösse V bestimmen.

Wir haben

$$2V^2 = \frac{L\cos\alpha + R\cos\beta + Q\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{R\cos\alpha + M\cos\beta + P\cos\gamma}{\cos\beta}$$
$$= \frac{Q\cos\alpha + P\cos\beta + N\cos\gamma}{\cos\gamma} = S^2.$$

Lassen wir α, β, γ der Reihe nach mit den drei verschiedenen, den Achsen des Polarisationsellipsoids entsprechenden Werthen von α', β', γ' zusammenfallen, so bedeutet nach den Regeln der analytischen Geometrie S der Reihe nach die entsprechenden reciproken Halbachsen des Polarisationsellipsoids. Wir finden also

$$V = \frac{S}{\sqrt{2}}, \quad U = -\frac{2\pi^2 m}{\lambda^2} S^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und gelangen zu dem folgenden Satze:

Im homogenen Aether können sich in jeder Richtung drei Systeme ebener Wellen fortpflanzen, deren Schwingungsrichtungen mit den Achsen des Polarisationsellipsoids parallel sind und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den entsprechenden Achsen des Polarisationsellipsoids verkehrt proportional sind.

Ist die Schwingungsrichtung der Molecüle einer Planwelle eine beliebige, so kann man die Verschiebungen in drei Verschiebungen parallel den Achsen des Polarisationsellipsoids zerlegen und es folgt, dass eine ebene Welle im Allgemeinen sich in drei ebene Wellen zerlegt, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen.

Da sich also für jede Richtung normaler Fortpflanzung drei Systeme ebener Wellen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ergeben, scheint zunächst aus Cauchy's Theorie hervorzugehen, dass die Wellenfläche eine dreifache Fläche sein müsse, was mit der Erfahrung im Widerspruche steht.

Es handelt sich also darum, zwischen den Coëfficienten, von welchen die Constitution des Mittels abhängt, solche Relationen zu finden, welche die Uebereinstimmung mit der Erfahrung herstellen.

166. Weitere Entwickelungen.

Wir substituiren die Gleichungen (10) nach (14) und bemerken, dass hierbei alle Glieder, welche eine der Grössen Δx, Δy, Δz in einer ungeraden Potenz enthalten, sich gegenseitig aufheben.

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{X}{m} &= \cos\alpha \left\{\begin{aligned} &\cos^2 l\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta x^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta x^4}{r^2})\right)\\ &+\cos^2 m\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta y^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{r^2})\right)\\ &+\cos^2 n\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta z^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta z^2}{r^2})\right)\end{aligned}\right.\\
&+2\cos\beta\cos l\cos m\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{r^2}\right)\\
&+2\cos\gamma\cos l\cos n\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta z^2}{r^2}\right)\\
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{Y}{m} &= 2\cos\alpha\cos l\cos m\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{r^2}\right)\\
&+\cos\beta\left\{\begin{aligned} &\cos^2 l\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta x^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{r^2})\right)\\ &+\cos^2 m\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta y^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta y^4}{r^2})\right)\\ &+\cos^2 n\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta z^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{r^2})\right)\end{aligned}\right.\\
&+2\cos\gamma\cos m\cos n\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{r^2}\right)\\
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{Z}{m} &= 2\cos\alpha\cos l\cos n\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta z^2}{r^2}\right)\\
&+2\cos\beta\cos m\cos n\,\Sigma\left(\mu\psi\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{r^2}\right)\\
&+\left\{\begin{aligned} &\cos^2 l\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta x^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta x^2\Delta z^2}{r^2})\right)\\ &\cos^2 m\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta y^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{r^2})\right)\\ &\cos^2 n\left(\Sigma(\mu\varphi\Delta z^2)+\Sigma(\mu\psi\frac{\Delta z^4}{r^2})\right)\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \Sigma\mu\frac{f(r)}{r}\Delta x^2 = \Sigma\mu\varphi\Delta x^2\\
\mathfrak{B} &= \Sigma\mu\frac{f(r)}{r}\Delta y^2 = \Sigma\mu\varphi\Delta y^2\\
\mathfrak{C} &= \Sigma\mu\frac{f(r)}{r}\Delta z^2 = \Sigma\mu\varphi\Delta z^2\\
A &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta x^4}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta x^4,\\
B &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta y^4}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta y^4,\\
C &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta z^4}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta z^4,\\
D &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta y^2\Delta z^2\\
E &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta x^2\Delta z^2}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta x^2\Delta z^2\\
F &= \Sigma\mu\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{r^2} = \Sigma\mu\frac{\psi}{r^2}\Delta x^2\Delta y^2
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (24)$$

so werden die Gleichungen (23):

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{X}{m} &= [(\mathfrak{A}+A)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+F)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+E)\cos^2 n]\cos\alpha\\
&\quad + 2F\cos l\cos m\cos\beta + 2E\cos l\cos n\cos\gamma\\
-\frac{\gamma^2}{2\pi^2}\frac{Y}{m} &= 2F\cos l\cos m\cos\alpha\\
&\quad + [(\mathfrak{A}+F)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+B)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+D)\cos^2 n]\cos\beta\\
&\quad + 2D\cos m\cos n\,\mathrm{nos}\,\gamma\\
-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{Z}{m} &= 2E\cos l\cos n\cos\alpha + 2D\cos m\cos n\cos\beta\\
&\quad + [(\mathfrak{A}+E)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+D)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+C)\cos^2 n]\cos\gamma
\end{aligned}\right\} (25)$$

Substituiren wir die Gleichungen (10) auch nach (15), so nehmen die Coëfficienten $L \ldots R$ die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
L &= (\mathfrak{A}+A)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+F)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+E)\cos^2 n\\
M &= (\mathfrak{A}+F)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+B)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+D)\cos^2 n\\
N &= (\mathfrak{A}+E)\cos^2 l + (\mathfrak{B}+D)\cos^2 m + (\mathfrak{C}+C)\cos^2 n\\
P &= 2D\cos m\cos n\\
Q &= 2E\cos l\cos n\\
R &= 2F\cos l\cos m
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26)$$

Substituiren wir schliesslich (26) nach (19), so erhalten wir als Gleichung des Polarisationsellipsoides:

$$\left.\begin{aligned}&[(\mathfrak{A}+A)\cos^2 l+(\mathfrak{B}+F)\cos^2 m+(\mathfrak{C}+E)\cos^2 n]x^2\\+&[(\mathfrak{A}+F)\cos^2 l+(\mathfrak{B}+B)\cos^2 m+(\mathfrak{C}+D)\cos^2 n]y^2\\+&[(\mathfrak{A}+E)\cos^2 l+(\mathfrak{B}+D)\cos^2 m+(\mathfrak{C}+C)\cos^2 n]z^2\\+&4D\cos m\cos n\,yz+4E\cos l\cos n\,xz+4F\cos l\cos m\,xy=1\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \qquad (27)$$

Wir gelangen also schliesslich zu dem Resultate:

In jeder Richtung können sich drei Planwellen fortpflanzen, deren Schwingungsrichtungen mit den Achsen des Polarisationsellipsoids zusammenfallen, welches durch die Gleichung (27) dargestellt ist. Die daselbst vorkommenden Coëfficienten sind gegeben durch die Gleichungen (24), die entsprechenden drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch die Gleichung (22), wo für S der Reihe nach die reciproken Halbachsen des Polarisationsellipsoides zu setzen sind.

167. Unmöglichkeit vollkommen transversaler Schwingungen in Cauchy's Theorie.

Die Schwierigkeit, welche sich aus dem Umstande ergiebt, dass Cauchy's Theorie als Wellenfläche zunächst eine dreifache Fläche verlangt, verschwindet, wenn das Mittel so beschaffen ist, dass zwei der drei möglichen Schwingungsrichtungen einer Planwelle stets zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht sind, die dritte zu derselben parallel, in welcher Richtung immer die Fortpflanzung stattfinde; denn in diesem Falle kann man annehmen, dass die zur Fortpflanzungsrichtung parallelen Schwingungen keine Lichtwirkung hervorbringen. Suchen wir also die Relationen, welche zwischen den das Mittel charakterisirenden Coëfficienten bestehen müssen, damit für jede beliebige Fortpflanzungsrichtung zwei der drei möglichen Verschiebungsrichtungen genau transversal und die dritte longitudinal sei, oder anders ausgedrückt, damit für alle beliebigen Werthe von l, m, n die Gleichungen (17) und (18) befriedigt werden durch

$$\alpha = l, \qquad \beta = m, \qquad \gamma = n.$$

Ersetzt man in (17) und (18) α, β, γ durch l, m, n, so nehmen diese Gleichungen unter Berücksichtigung von (26) die Form an:

$$\begin{aligned}A\cos^2 l+3F\cos^2 m+3E\cos^2 n&=3F\cos^2 l+B\cos^2 m+3D\cos^2 n\\&=3E\cos^2 l+3D\cos^2 m+C\cos^2 n\end{aligned}$$

$$\cos^2 l+\cos^2 m+\cos^2 n=1,$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\cos l$, so erhält man

$$A + (3F - A)\cos^2 m + (3E - A)\cos^2 n$$
$$= 3F + (B - 3F)\cos^2 m + 3(D - F)\cos^2 n$$
$$= 3E + 3(D - E)\cos^2 m + (C - 3E)\cos^2 n,$$

oder, da diese Gleichungen für beliebige m und n gelten sollen,

$$A = 3F = 3E, \qquad 3F - A = B - 3F = 3(D - E),$$
$$3E - A = 3(D - F) = C - 3E,$$

oder schliesslich

$$A = B = C = 3D, \quad D = E = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die so erhaltenen Bedingungsgleichungen besagen nichts anderes, als dass das Mittel isotrop sein müsse. Ist also das Mittel nicht isotrop, so erscheint es als unmöglich, dass die Schwingungen einer Planwelle für jede beliebige Fortpflanzungsrichtung genau transversal seien. Sobald es sich um ein nicht isotropes Mittel handelt, kann man also durch keine Hypothese über die Constitution des Aethers eine strenge Uebereinstimmung der Theorie Cauchy's mit Fresnel's Gesetzen erzielen.

168. Quasi-transversale Lichtschwingungen.

Alle bekannten doppeltbrechenden Mittel sind sehr schwach doppeltbrechend und unterscheiden sich folglich wenig von den isotropen Mitteln. Die Bedingungen (28), welche für isotrope Mittel strenge erfüllt sind, sind es daher angenähert auch für die doppeltbrechenden. Es folgt hieraus, dass in diesen Mitteln von den drei möglichen Schwingungsrichtungen einer Planwelle stets zwei mit der Planwelle nahezu parallel sind, und die dritte nahezu auf derselben senkrecht steht.

Die beiden ersteren Schwingungsrichtungen heissen quasi-transversal, die letzteren quasi-longitudinal.

Von den drei Systemen von Planwellen, welche einer bestimmten Fortpflanzungsrichtung entsprechen, sind also zwei quasi-transversal und eine quasi-longitudinal. Nimmt man an, dass die quasi-longitudinalen Vibrationen keine Lichtwirkung hervorbringen, so findet sich die Existenz nur zweier gebrochener Strahlen auch in Cauchy's Theorie erklärt.

Da die Ebene der beiden quasi-transversalen Vibrationen nahezu mit der Wellenebene zusammenfällt, so fallen auch die Schnitte dieser beiden Ebenen mit dem Polarisationsellipsoid nahezu zusammen. Es sind also die den beiden quasi-transversalen Schwingungsrichtungen entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nahezu verkehrt proportional den Längen der Achsen des elliptischen Schnittes der Wellenebene mit dem Polarisationsellipsoid. Es folgt hieraus, dass, wenn die

Schnitte der Wellenebene mit dem Polarisationsellipsoide und dem Elasticitätsellipsoide Fresnel's, dessen Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

ist, zusammenfallen, die Theorien Cauchy's und Fresnel's angenähert übereinstimmen (152). Es wird sich also darum handeln, jene Relationen zwischen den Coëfficienten der Gleichung des Polarisationsellipsoides zu suchen, welche die Erfüllung jener Bedingung zur Folge haben. Nur dann ist Cauchy's Theorie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung gebracht.

169. Angenäherte Uebereinstimmung der Theorien Fresnel's und Cauchy's.

Wir werden eine erste Gruppe von Relationen zwischen den Coëfficienten der Gleichung des Polarisationsellipsoides aus dem durch das Experiment gegebenen Gesetze ableiten, dass, wenn ein Strahl aus einem isotropen Medium in ein krystallinisches übergeht, und die Einfallsebene mit einer der Symmetrieebenen des zweiten Mittels zusammenfällt, einer der gebrochenen Strahlen in dieser Ebene polarisirt ist und das Gesetz des Descartes befolgt. Es ergiebt sich aus diesem Gesetze, dass, wenn die Normale einer ebenen Welle in eine der Symmetrieebenen fällt und die Welle in dieser Ebene polarisirt ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle von der Richtung der Normale unabhängig ist. Sind also die Coordinatenachsen zugleich die Elasticitätsachsen des Mittels, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen in der xy-Ebene polarisirten Welle dieselbe, mag diese auf der x-Achse oder auf der y-Achse senkrecht stehen.

Wenn man, wie dies Cauchy anfangs that, annimmt, dass die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes in die Polarisationsebene fällt, so sind die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen, welche in der xy-Ebene polarisirt sind und bezüglich auf der x-Achse und der y-Achse senkrecht stehen, parallel bezüglich mit der y-Achse und der x-Achse, und die Betrachtung des Polarisationsellipsoids ergiebt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser beiden Wellen Grössen, welche proportional $\sqrt{\mathfrak{A} + F}$ und $\sqrt{\mathfrak{B} + F}$ sind; man hat also, ausgehend von der Voraussetzung, dass die Schwingungsrichtung auf die Polarisationsebene fällt:

$$\sqrt{\mathfrak{A} + F} = \sqrt{\mathfrak{B} + F}.$$

Betrachtet man ferner zwei Wellen, welche bezüglich auf der y-Achse und z-Achse senkrecht stehen, und in der yz-Ebene polarisirt sind, so hat man gleicherweise

$$\sqrt{\mathfrak{B} + D} = \sqrt{\mathfrak{C} + D}$$

und es ergiebt sich aus den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C},$$

eine Bedingung, welche in einem nicht isotropen Mittel nur dadurch erfüllt wird, dass die drei Coëfficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einzeln der Null gleich werden.

Cauchy hat in seinen optischen Abhandlungen [1]) die Gründe auseinandergesetzt, welche es ihm unwahrscheinlich erscheinen liessen, dass diese Bedingung in Wirklichkeit erfüllt sei, und wurde so dahin geführt, die Hypothese fallen zu lassen, nach welcher die Schwingungsrichtung der Polarisationsebene parallel ist, ohne behaupten zu können, dass die Erscheinungen der Doppelbrechung zwischen den beiden Hypothesen über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes zu entscheiden geeignet sind.

Kehren wir also zu Fresnel's Hypothese zurück, nach welcher die Schwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht stehen. Nach dieser Hypothese sind die Schwingungen der beiden in der xy-Ebene polarisirten Wellen, welche auf x und y senkrecht stehen, in beiden Fällen parallel zu z. Es folgt dann aus der Gleichung des Polarisationsellipsoids, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser beiden Wellen sind: $\sqrt{\mathfrak{A} + E}$ und $\sqrt{\mathfrak{B} + D}$. Da diese beiden Geschwindigkeiten gleich sind, hat man

$$\mathfrak{A} + E = \mathfrak{B} + D.$$

Gleicherweise sind die Schwingungen der beiden Wellen, welche in der xz-Ebene polarisirt sind und bezüglich auf x und z senkrecht stehen, in beiden Fällen parallel zu y. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser beiden Wellen sind folglich proportional bezüglich $\sqrt{\mathfrak{A} + F}$ und $\sqrt{\mathfrak{C} + D}$ und es folgt:

$$\mathfrak{A} + F = \mathfrak{C} + D.$$

Schliesslich sind die Schwingungen der beiden in der yz-Ebene polarisirten Wellen, welche bezüglich auf y und z senkrecht stehen, parallel zu x, und man hat

$$\mathfrak{B} + F = \mathfrak{C} + E.$$

Wir erhalten so zwischen den Coëfficienten der Gleichung des Polarisationsellipsoids die drei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} + F = \mathfrak{C} + E \\ \mathfrak{C} + D = \mathfrak{A} + F \\ \mathfrak{A} + E = \mathfrak{B} + D \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

welche sich in Wesenheit auf zwei Gleichungen reduciren, da man die

[1]) Exerc. de Mathémat. III, p. 213.

dritte der Gleichungen erhält, wenn man den aus der ersten gezogenen Werth von $\mathfrak{C}$ in die zweite einsetzt.

Sind die Gleichungen (29) erfüllt, so pflanzen sich die zu einer der drei Achsen parallelen Schwingungen mit derselben Geschwindigkeit fort, mag die Normale der Planwelle mit der einen oder der anderen der beiden übrigen Achsen parallel sein.

Die Theorie Cauchy's stimmt also, wenn die Gleichungen (29) erfüllt sind, mit der Theorie Fresnel's in dem Falle überein, wo die Planwelle auf einer der Elasticitätsachsen senkrecht steht. Bezeichnen wir, wie in Fresnel's Theorie, durch a, b, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Schwingungen, welche bezüglich den Achsen der x, der y und der z parallel sind, und nehmen wir als Maass der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die reciproken Werthe der Achsen des Polarisationsellipsoides, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \mathfrak{B} + F = \mathfrak{C} + E \\ b^2 &= \mathfrak{C} + D = \mathfrak{A} + F \\ c^2 &= \mathfrak{A} + E = \mathfrak{B} + D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Wir wollen nun sehen, welche Bedingungen hinzugefügt werden müssen, damit in allen Fällen die Schnitte der Planwelle mit dem Polarisationsellipsoide einerseits und dem Elasticitätsellipsoide andererseits zusammenfallen, d. i. damit die Theorien Fresnel's und Cauchy's merklich übereinstimmende Resultate geben, welches immer die Richtung der Planwelle sei. Mit Rücksicht auf (29) und auf die Relation

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1$$

wird die Gleichung des Polarisationsellipsoides:

$$\begin{aligned} &[(\mathfrak{A} + A - \mathfrak{B} - F)\cos^2 l + \mathfrak{B} + F]x^2 \\ &\quad + [(\mathfrak{B} + B - \mathfrak{A} - F)\cos^2 m + \mathfrak{A} + F]y^2 \\ &\quad + [(\mathfrak{C} + C - \mathfrak{A} - E)\cos^2 n + \mathfrak{A} + E]z^2 \\ &\quad + 4D\cos m\cos n\; yz + 4E\cos l\cos n\; xz + 4F\cos l\cos m\; xy = 1 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &[(\mathfrak{A} + A - \mathfrak{B} - F)\cos^2 l + a^2]x^2 + [(\mathfrak{B} + B - \mathfrak{A} - F)\cos^2 m + b^2]y^2 \\ &\quad + [(\mathfrak{C} + C - \mathfrak{A} - E)\cos^2 n + c^2]z^2 \\ &\quad + 4D\cos m\cos n\; yz + 4E\cos l\cos n\; xz + 4F\cos l\cos m\; xy = 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Planwelle ist:

$$x\cos l + y\cos m + z\cos n = 0.$$

Eliminirt man x zwischen dieser Gleichung und der Gleichung des Polarisationsellipsoids, so erhält man die folgende Gleichung, welche die Projection des Schnittes der Planwelle mit dem Polarisationsellipsoide auf die Ebene yz darstellt:

$$[a^2 cos^2 m + b^2 cos^2 l + (A + B - 6F) cos^2 l \, cos^2 m] y^2$$
$$+ [a^2 cos^2 n + c^2 cos^2 l + (A + C - 6E) cos^2 l \, cos^2 n] z^2$$
$$+ 2[(\mathfrak{A} + A - \mathfrak{B} + 2D - 2E - 3F) cos^2 l + a^2] cos\, m \, cos\, n \; yz$$
$$= cos^2 l.$$

Man findet ebenso als Gleichung der Projection des Schnittes der Planwelle mit dem Elasticitätsellipsoide auf die Ebene der yz:

$$(a^2 cos^2 m + b^2 cos^2 l) y^2 + (a^2 cos^2 n + c^2 cos^2 l) z^2 + 2 a^2 cos\, m \, cos\, n \, yz$$
$$= cos^2 l.$$

Damit die beiden Schnitte für alle Richtungen der Planwelle identisch sind, ist nöthig und genügt es, dass man habe

$$A + B - 6F = 0 \quad \ldots \ldots \quad (31)$$
$$A + C - 6E = 0 \quad \ldots \ldots \quad (32)$$
$$\mathfrak{A} + A - \mathfrak{B} + 2D - 2E - 3F = 0 \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Diese Relation kann auf eine einfachere Form gebracht werden. Man ziehe die erste der Gleichungen (29) von der zweiten ab:

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = D - E,$$

setze dies nach (33):

$$A + 3D - 3E - 3F = 0 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

addire (31) und (32):

$$A = -\frac{B + C}{2} + 3(E + F),$$

und substituire dies nach (34), um schliesslich zu haben:

$$B + C - 6D = 0.$$

Damit also die angenäherte Uebereinstimmung zwischen den Theorien Fresnel's und Cauchy's hergestellt sei, ist nöthig und genügt es, dass die folgenden fünf Bedingungen erfüllt seien:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} + F = \mathfrak{C} + E \\ \mathfrak{C} + D = \mathfrak{A} + F \\ A + B - 6F = 0 \\ B + C - 6D = 0 \\ C + A - 6E = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

XV.

Ableitung der Gesetze der Doppelbrechung aus den Gleichungen der Elasticität fester Körper.

170. Ableitung der Fresnel'schen Gesetze.

Wir geben noch die Ableitung der durch das Experiment bestätigten Fresnel'schen Gesetze (152) der Fortpflanzung ebener Lichtwellen in den homogenen aber nicht isotropen Mitteln aus den Differentialgleichungen der Theorie der Elasticität fester Körper nach G. Kirchhoff[1]), welcher zeigte, dass die von Neumann[2]) gegebene Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in einem krystallinischen Mittel und die später von Mac Cullagh[3]) gegebene als vollkommen übereinstimmend angesehen werden können.

Wir nehmen an, dass die Fortpflanzung der Lichtbewegung im homogenen Aether so vor sich gehe, wie in einem homogenen elastischen Körper, und verificiren diese Annahme, indem wir zeigen, dass aus derselben und den bekannten Gesetzen elastischer fester Körper sich die Gesetze der Doppelbrechung ergeben. Es wird sich zeigen, dass man die Fresnel'schen Gesetze allerdings, und zwar nicht nur angenähert, erhält, wenn man eine weitere Annahme macht, welche sich auf die Werthe der Constanten der Elasticität bezieht.

Wir nehmen also an, dass keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verschiebungen bewirkten, setzen die Dichtigkeit $= 1$ und nennen u, v, w die Componenten der unendlich kleinen Verrückung, die ein Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, zur Zeit t erfahren hat.

---

[1]) Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel. Abh. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1876. [2]) Pogg. XXV. [3]) *Trans. of the Irish Acad.*, Vol. XXI.

Wir haben dann die bekannten Differentialgleichungen der Bewegung[1]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial F}{\partial x_x} & Y_z &= Z_y = \frac{\partial F}{\partial y_z} \\ Y_y &= \frac{\partial F}{\partial y_y} & Z_x &= X_z = \frac{\partial F}{\partial z_x} \\ Z_z &= \frac{\partial F}{\partial z_z} & X_y &= Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} \\ x_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & y_z &= z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & z_x &= x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & x_y &= y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

und F eine homogene Function zweiten Grades von $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ mit constanten Coëfficienten bedeutet.

Die Coëfficienten von F, 21 an der Zahl, sind die Constanten der Elasticität des Körpers.

Seien $l, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ die Cosinus der Winkel zweier Richtungen mit den Achsen, s der Abstand einer zu l, m, n senkrechten Ebene vom Ursprunge, σ eine unendlich kleine Verschiebung eines Punktes dieser Ebene, V eine constante Geschwindigkeit, φ ( ), ψ ( ) zwei beliebige Functionen.

Soll sich das betrachtete Mittel in einem solchen Bewegungszustande befinden, dass in jedem Momente die Verschiebungen auf jeder zu l, m, n (Wellennormale) senkrechten Ebene identisch $\sigma = \varphi\ (s)$ und parallel der constanten Richtung (α, β, γ) (Schwingungsrichtung) sind, soll sich ferner der betrachtete Bewegungszustand des Mittels mit der constanten Geschwindigkeit V in der Richtung l, m, n fortpflanzen, so dass man hat: $\sigma = \varphi\ (s - Vt)$, und soll schliesslich eine ähnliche Bewegung

[1]) Ueber die Ableitung dieser Gleichungen siehe G. Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik.

gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung fortschreiten, so müssen die Bewegungsgleichungen bestehen:

$$\sigma = \varphi(s - Vt) + \psi(s + Vt) \quad \ldots \quad (3)$$

$$lx + my + nz = s \quad \ldots \quad (4)$$

$$u = \alpha\sigma, \quad v = \beta\sigma, \quad w = \gamma\sigma \quad \ldots \quad (5)$$

durch deren Differentiation man erhält:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \quad \ldots \quad (6)$$

Wir wollen nun sehen, ob diese Gleichungen sich in (1) einführen lassen, d. i. ob die betrachtete, durch die Gleichungen (3), (4), (5), (6) gegebene Bewegung zu den möglichen Bewegungen des Mittels gehört.

Die linken Seiten der Gleichungen (1) werden nach (5):

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \quad \beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \quad \gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \quad \ldots \quad (7)$$

Um ihre rechten zu bilden, hat man Folgendes zu beachten. Es ist nach Gleichung (2)

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x_x}}{\partial x} \quad \ldots \quad (8)$$

F ist eine homogene quadratische Function von $x_x \ldots$, was wir so ausdrücken wollen:

$$F = \{x_x^2 \ldots\} \quad \ldots \quad (9)$$

Es ergiebt sich, dass $\frac{\partial F}{\partial x_x}$ eine homogene Function ersten Grades von $x_x \ldots$ ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x_x} = \left\{x_x \ldots\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Die hier vorkommenden Grössen $x_x \ldots$ berechnen sich wie folgt. Es ist nach Gleichung (2), (5), (3), (4)

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \alpha \frac{\partial s}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \alpha l \frac{\partial \sigma}{\partial s}.$$

Bildet man gleicherweise die entsprechenden Ausdrücke für y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \alpha l \frac{\partial \sigma}{\partial s} & y_z &= (\beta n + \gamma m) \frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ y_y &= \beta m \frac{\partial \sigma}{\partial s} & z_x &= (\gamma l + \alpha n) \frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ z_z &= \gamma n \frac{\partial \sigma}{\partial s} & x_y &= (\alpha m + \beta l) \frac{\partial \sigma}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Ehe wir (11) nach (10) substituiren, führen wir die neuen Constanten ein:

$$\left.\begin{array}{ll} x_x' = \alpha l & y_z' = \beta n + \gamma m \\ y_y' = \beta m & z_x' = \gamma l + \alpha n \\ z_z' = \gamma n & x_y' = \alpha m + \beta l \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und setzen

$$F' = \{x_x'^2 \ldots\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

d. h. wir bezeichnen durch F' den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man in dem Ausdrucke (9) $x_x', y_y' \ldots$ statt $x_x, y_y \ldots$ setzt.

Hierdurch wird

$$\frac{\partial F'}{\partial x_x'} = \left\{x_x' \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

dieselbe Function von $x_x' \ldots$, welche $\frac{\partial F}{\partial x_x}$ von $x_x \ldots$ ist. $\frac{\partial F'}{\partial x_x'}$ ist also eine lineare Function von α, β, γ.

Wir substituiren nun (11) nach (10) und heben den constanten Factor $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ heraus. Der andere Factor ist dann $\frac{\partial F'}{\partial x'_x}$ und wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s}.$$

Diesen Werth substituiren wir ferner nach (8), um zu erhalten:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot \frac{\partial \frac{\partial \sigma}{\partial s}}{\partial x}.$$

Es ist aber nach Gleichung (3) und (4)

$$\frac{\partial \frac{\partial \sigma}{\partial s}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial \sigma}{\partial s}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \cdot l$$

und folglich wird

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = l \, \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Bildet man ebenso die Ausdrücke für $\frac{\partial X_y}{\partial y}$ und $\frac{\partial X_z}{\partial z}$, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial X_x}{\partial x} = l \, \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \frac{\partial X_y}{\partial y} = m \, \frac{\partial F'}{\partial x_y'} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \frac{\partial X_z}{\partial z} = n \, \frac{\partial F'}{\partial x_z'} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Es ergiebt sich also aus (7) und (15) als Substitutionsresultat für die erste der Gleichungen (1):

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \left(l \frac{\partial F'}{\partial x_x'} + m \frac{\partial F'}{\partial x_y'} + n \frac{\partial F'}{\partial x_z'} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Dieses Resultat kann vereinfacht werden. Man hat nach Gleichung (12) und (13):

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha} = \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot \frac{\partial x_x'}{\partial \alpha} + \frac{\partial F'}{\partial x_y'} \cdot \frac{\partial x_y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial F'}{\partial x_z'} \cdot \frac{\partial x_z'}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial F'}{\partial x_x'} \cdot l + \frac{\partial F'}{\partial x_y'} \cdot m + \frac{\partial F'}{\partial x_z'} \cdot n.$$

Dies in die letzte Gleichung gesetzt, giebt:

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial F'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Führt man die analogen Rechnungen für die zweite und dritte der Gleichungen (1) durch, so erhält man schliesslich als Substitutionsresultat:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial F'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial F'}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial F'}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Soll die supponirte Bewegung möglich sein, so müssen die Gleichungen (16) unter einander und mit Gleichung (6) identisch sein, d. h. es muss:

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha} = V^2 \alpha, \quad \frac{\partial F'}{\partial \beta} = V^2 \beta, \quad \frac{\partial F'}{\partial \gamma} = V^2 \gamma \quad \ldots \quad (17)$$

Die Differentialquotienten $\frac{\partial F'}{\partial \alpha}, \frac{\partial F'}{\partial \beta}, \frac{\partial F'}{\partial \gamma}$ sind homogene lineare Functionen von α, β, γ und enthalten ausser diesen Grössen nur noch die Constanten der Elasticität und die gegebene Fortpflanzungsrichtung l, m, n.

Welches immer also die Constanten der Elasticität des Mittels sind, es können sich in einer gegebenen Richtung Planwellen fortpflanzen unter der Bedingung, dass die Gleichungen (17) erfüllt sind. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn Schwingungsrichtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit jene Werthe haben, welche sich durch Auflösung der Gleichung (17) in Verbindung mit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

nach α, β, γ und V ergeben. Es sind dies dieselben Gleichungen, wie diejenigen, die man aufzulösen hat, um die Hauptachsen des Ellipsoides zu finden, dessen Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = 2F' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ist, wenn r die Länge des Radiusvector bedeutet, der die Richtung α, β, γ hat. Die Richtung der Verschiebung kann die Richtung einer jeden der Halbachsen desselben sein; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist immer gleich dem Reciproken derselben Halbachse.

Jeder Richtung normaler Fortpflanzung entsprechen also drei mögliche Systeme ebener Wellen, deren Schwingungsrichtungen den Achsen des Ellipsoides (18) parallel und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den entsprechenden Achsen dieses Ellipsoides verkehrt proportional sind.

Es ist wohl zu bemerken, dass, wie aus Gleichung (12) und (13) hervorgeht, die Gleichung des Ellipsoides (18) die Richtungsconstanten l, m, n der Wellennormale enthält, dass also dieses Ellipsoid mit der normalen Fortpflanzungsrichtung variabel ist.

Ertheilt man den Constanten der Elasticität die Werthe, welche sie für einen isotropen Körper annehmen, so geht das Ellipsoid (18) in ein Umdrehungsellipsoid über, dessen Umdrehungsachse die Wellennormale ist. Eine von den drei Wellen, welche sich in irgend einer Richtung fortpflanzen können, ist eine longitudinale, die beiden anderen besitzen gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und sind transversal.

Bei allen Krystallen, die es giebt, ist die Doppelbrechung nur eine kleine; hierauf gestützt, kann man annehmen, dass bei allen Krystallen die Constanten der Elasticität des Aethers nur wenig von jenen Werthen abweichen, die sie in einem isotropen Körper haben können, und dass daher von den drei Wellen, die in ihm in einer Richtung sich fortpflanzen, die eine nahezu longitudinal ist, die beiden anderen nahezu transversal und dass die letzteren die Lichtwellen ausmachen.

Man kann nun, wie Green[1]) gezeigt hat, die Fresnel'schen Gesetze vollständig erhalten, wenn man gewisse Annahmen über die Werthe der Constanten der Elasticität des Aethers macht, d. i. wenn man annimmt, dass die Function F die Form habe:

$$\left.\begin{aligned} 2F = {} & a_0(x_x + y_y + z_z)^2 + a_{11}(y_z^2 - 4y_y z_z) \\ & + a_{22}(z_x^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4x_x y_y) \\ & + 2a_{23}(2y_z x_x - y_x z_x) + 2a_{31}(2z_x y_y - z_y x_y) \\ & + 2a_{12}(2x_y z_z - x_z y_z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

wo die Constanten a beliebige Werthe haben können.

---

1) *Transactions of the Cambridge Philos. Soc.* 1839.

Zunächst lässt sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung eine der drei möglichen Wellen eine rein longitudinale mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{a_0}$$

ist. Um dies zu zeigen, muss man nachweisen, dass durch die Annahme

$$\alpha = l, \quad \beta = m, \quad \gamma = n, \quad V = \sqrt{a_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

die Bedingungsgleichungen (17) befriedigt werden.

Man erhält durch Substitution aus (12) nach (19):

$$\left.\begin{aligned} 2F' = {} & a_0(\alpha l + \beta m + \gamma n)^2 \\ & + a_{11}(\gamma m - \beta n)^2 + a_{22}(\alpha n - \gamma l)^2 + a_{33}(\beta l - \alpha m)^2 \\ & + 2a_{23}(\alpha n - \gamma l)(\beta l - \alpha m) + 2a_{31}(\beta l - \alpha m)(\gamma m - \beta n) \\ & + 2a_{12}(\gamma m - \beta n)(\alpha n - \gamma l) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

und weiter durch Differentiation von (21) und Substitution aus (20):

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha} = V^2\alpha, \quad \frac{\partial F'}{\partial \beta} = V^2\beta, \quad \frac{\partial F'}{\partial \gamma} = V^2\gamma$$

in Uebereinstimmung mit (17).

Eine der drei Wellen ist also eine longitudinale und $\sqrt{a_0}$ ist ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es folgt, dass die beiden anderen Wellen, welche wir als Lichtwellen ansehen, genau transversal sind. Für sie ist

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und ihre Schwingungsrichtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind aus (17) und (22) zu bestimmen.

Setzen wir also (22) nach (21), so verschwindet rechts vom Gleichheitszeichen das erste Glied. Die übrigen Glieder enthalten die Factoren

$$\left.\begin{aligned} \gamma m - \beta n &= \mathfrak{a} \\ \alpha n - \gamma l &= \mathfrak{b} \\ \beta l - \alpha m &= \mathfrak{c} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und man sieht, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Cosinus der Winkel sind, welche eine Richtung, die senkrecht auf den Richtungen (l, m, n) und (α, β, γ) ist, mit den Coordinatenachsen bildet. Die Gleichung (21) wird also für die gesuchten Transversalschwingungen, wenn hier $\mathfrak{F}$ für F' gesetzt wird:

$$2\mathfrak{F} = a_{11}\mathfrak{a}^2 + a_{22}\mathfrak{b}^2 + a_{33}\mathfrak{c}^2 + 2a_{23}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + 2a_{31}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + 2a_{12}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad (24)$$

Um nun die Gleichungen (17) für diesen Fall zu bilden, hat man durch Differentiation von (24)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha}$$

und weiter aus (23)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} \cdot n - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} m.$$

Die Gleichungen (23) lassen sich auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{b} n - \mathfrak{c} m \\ \beta &= \mathfrak{c} l - \mathfrak{a} n \\ \gamma &= \mathfrak{a} m - \mathfrak{b} l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

und man erhält für die erste der Bedingungsgleichungen (17):

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2 \mathfrak{b}\right) n - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2 \mathfrak{c}\right) m = 0,$$

und schliesslich für alle drei Gleichungen (17):

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2 \mathfrak{b}\right) n - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2 \mathfrak{c}\right) m = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2 \mathfrak{c}\right) l - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2 \mathfrak{a}\right) n = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2 \mathfrak{a}\right) m - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2 \mathfrak{b}\right) l = 0.$$

Diese Bedingungsgleichungen stellen nur zwei Gleichungen vor, da jede derselben aus den beiden anderen folgt. Sie können auch geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} &= V^2 \mathfrak{a} + \mu l \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} &= V^2 \mathfrak{b} + \mu m \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} &= V^2 \mathfrak{c} + \mu n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

wo μ eine zu eliminirende Grösse bedeutet. Die beiden transversalen Wellen, welche sich in der Richtung l, m, n fortpflanzen, sind also an die Bedingungen (26) gebunden. Es enthalten diese Gleichungen ausser μ, l, m, n noch die Grössen V, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und die sechs in (24) vorkommenden Constanten der Elasticität.

Die beiden transversalen Wellen müssen also Werthen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und V entsprechen, welche sich durch Auflösung der Gleichung (26) und der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 &= 1 \\ l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

ergeben.

Da die Gleichungen (26) nur zwei Gleichungen vorstellen, hat man zur Bestimmung der vier Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, V im Ganzen vier Glei-

chungen. Es sind das dieselben Gleichungen, wie diejenigen, welche man aufzulösen hat, um die Hauptachsen der Ellipse zu finden, in der das sogenannte Elasticitätsellipsoid, das im Krystalle festliegende Ellipsoid nämlich, dessen Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = 2\mathfrak{F}$$

ist, wenn r die Länge des Radiusvector bedeutet, der die Richtung $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ hat, von der durch seinen Mittelpunkt gelegten Wellenebene geschnitten wird. Es sprechen diese Gleichungen die Fresnel'schen Gesetze in Betreff der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und Polarisationsrichtungen der beiden Lichtwellen aus, wenn man die Polarisationsrichtung und die Schwingungsrichtung als zusammenfallend annimmt.

XVI.

Reflexion und Brechung in doppeltbrechenden Mitteln.

171. Richtung der gebrochenen und der reflectirten Strahlen.

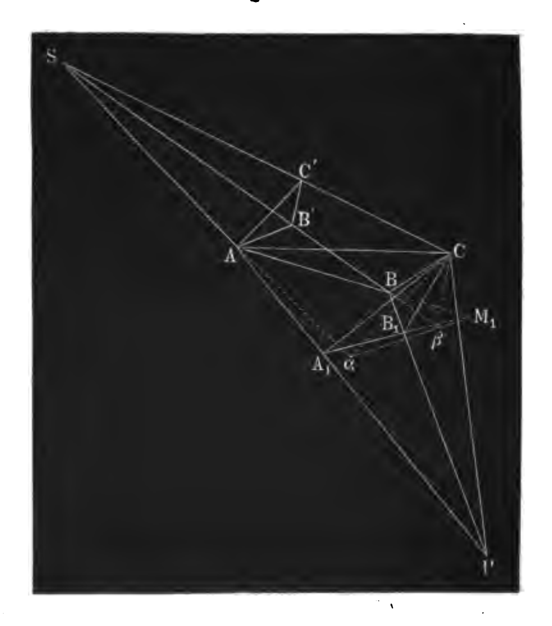
Nachdem wir die Gleichung der Wellenfläche abgeleitet haben (155, 156), wollen wir zeigen, wie der gebrochene und reflectirte Strahl construirt werden können, sobald die Gestalt und die Lage der Wellenfläche gegeben sind.

Betrachten wir zunächst die Brechung beim Uebergange des Lichtes aus einem homogenen Mittel in ein anderes eben solches und setzen wir der Einfachheit wegen die Trennungsfläche als eben voraus.

Seien S und P (Fig. 104 a. f. S.) der leuchtende, im ersten Medium gelegene, und der erleuchtete, im zweiten Medium gelegene Punkt. Wir nehmen an, dass das Fermat'sche Princip auch für doppeltbrechende Medien gelte, d. h. dass der Weg, welchen das Licht von S nach P nimmt, ein Minimum sei. Diese Verallgemeinerung des Fermat'schen Satzes ist plausibel. In der That, ist SAP der Strahl, welcher von S ausgeht, um in A nach P gebrochen zu werden, und SaP ein benachbarter, so werden die Schwingungen dieser zwei Strahlen in P dieselbe Phase haben und einander verstärken, wenn sie dieselbe Zeit gebraucht haben, um von S nach P zu gelangen, und dasselbe wird für ein ganzes Bündel von Strahlen gelten, welche dem Strahle SAP benachbart sind. Das meiste nach P gelangende Licht wird also durch Punkte der Trennungsfläche gegangen sein, welche A sehr nahe liegen. Gehen wir also von dem Fermat'schen Satze aus, d. h. nehmen wir an, dass die Erleuchtung des Punktes P von einem sehr kleinen, den Punkt A enthaltenden Theile der brechenden Fläche herrührt, für welchen die Zeit ein Minimum ist, so findet sich die Lage des Punktes A auf der brechenden Fläche dadurch bestimmt, dass die Zeit, welche

das Licht braucht, um über irgend einen dem Punkte A unendlich nahe liegenden Punkt der brechenden Fläche nach P zu gelangen, der Zeit gleichkommt, welche es braucht, um über A dahin zu gelangen.

Fig. 104.



Nehmen wir also auf der brechenden Fläche unendlich nahe an A zwei Punkte B und C an, und beschreiben wir von S aus eine sich auf das erste Mittel beziehende Wellenfläche, welche durch A geht. Sei $AB'C'$ ein unendlich kleines Stück dieser Wellenfläche, welches wir als eben ansehen können. Beschreiben wir ferner von P aus eine auf das zweite Mittel bezogene Wellenfläche, welche durch C geht, und sei CA_1B_1 ein unendlich kleines Stück dieser Welle. CA_1B_1 kann nun auch als eine Ebene aufgefasst werden, welche eine von A aus construirte und durch A_1 gehende, auf das zweite Mittel bezogene Wellenfläche in A_1 berührt.

Da das Licht einerseits gleiche Zeiten braucht, um von S nach A, B', C' zu gelangen, andererseits gleiche Zeiten, um von P nach A_1, B_1, C zu gelangen, und da überdies die Wege SAP, SBP, SCP in gleichen Zeiten zurückgelegt werden sollen, so folgt, dass auch die den Wegen AA_1, $B'BB_1$, $C'C$ entsprechenden Zeiten gleich sein müssen.

Ist also v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes längs SA und u jene längs AP, so hat man

$$\frac{AA_1}{u} = \frac{B'B}{v} + \frac{BB_1}{u} = \frac{C'C}{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Da nämlich die Punkte A, B, C unendlich nahe aneinander liegen, können die Geschwindigkeiten längs SA, SB, SC einerseits, und jene längs AP, BP, CP andererseits als gleich gross angenommen werden. Verlängern wir SA bis zu einem Punkte α, so dass

$$\frac{A\alpha}{v} = \frac{AA_1}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Beschreiben wir von A aus eine auf das erste Medium bezogene Wellenfläche, welche durch α geht, und legen wir durch α eine Tangentialebene an diese Wellenfläche, so wird die Tangentialebene die Verlängerungen von SB und SC in zwei Punkten, β und γ, schneiden. α, β, γ kann nun auch als ein unendlich kleines Stück einer von S aus construirten, auf das erste Medium bezogenen und durch α gehenden Wellenfläche angesehen werden. Man hat folglich

$$A\alpha = B'\beta = C'\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ersetzt man in (2) $A\alpha$ durch $C'\gamma$, so erhält man

$$\frac{C'\gamma}{v} = \frac{AA_1}{u},$$

und folglich nach (1)

$$CC' = C'\gamma.$$

Der Punkt γ fällt also mit dem Punkte C zusammen.

Um zu beweisen, dass die Durchschnittslinie der Ebenen $C\alpha\beta$ und CA_1B_1 auf die brechende Fläche fällt, zeigen wir, dass ausser C noch ein zweiter Punkt dieser Durchschnittslinie auf die brechende Fläche fällt. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir durch μ und M_1 die Durchschnittspunkte der Geraden $\alpha\beta$ und A_1B_1 mit AB. Die Dreiecke $\mu A\alpha$ und $\mu B\beta$ können als ähnlich angesehen werden und man hat

$$\frac{\mu A}{\mu B} = \frac{A\alpha}{B\beta},$$

woraus folgt

$$\frac{\mu A}{AB} = \frac{A\alpha}{A\alpha - B\beta}$$

und

$$\mu A = AB\frac{A\alpha}{A\alpha - B\beta}.$$

Andererseits ergiebt die Aehnlichkeit der Dreiecke M_1AA_1 und M_1BB_1

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{AA_1}{BB_1},$$

woraus folgt

$$\frac{M_1 A}{AB} = \frac{AA_1}{AA_1 - BB_1}$$

und

$$M_1 A = AB \frac{AA_1}{AA_1 - BB_1}.$$

Man findet nun leicht aus (1), (2) und (3)

$$\frac{BB_1}{u} = \frac{AA_1}{u} - \frac{BB'}{v} = \frac{A\alpha - BB'}{v} = \frac{B'\beta - BB'}{v} = \frac{B\beta}{v},$$

woraus folgt

$$\frac{BB_1}{B\beta} = \frac{u}{v} = \frac{AA_1}{A\alpha}$$

und

$$\frac{AA_1}{AA_1 - BB_1} = \frac{A\alpha}{A\alpha - B\beta},$$

so, dass man hat:

$$\mu A = M_1 A.$$

Die Punkte μ und M_1 fallen also zusammen und folglich fällt die Durchschnittsgerade CM_1 der Ebenen $C\alpha\beta$ und CA_1B_1 auf die Trennungsebene.

Ganz ähnlich verhält es sich bei der Reflexion.

Wir haben gezeigt: Beschreibt man vom Einfallspunkte aus zwei demselben Momente entsprechende Wellenflächen, von welchen sich die erste auf das erste, die zweite auf das zweite Medium bezieht, und legt man berührende Ebenen an die Durchschnittspunkte der ersten Wellenfläche mit dem einfallenden und der zweiten Wellenfläche mit dem gebrochenen Strahle, so schneiden sich diese beiden berührenden Ebenen auf der als eben vorausgesetzten brechenden Fläche. Es ergiebt sich hieraus unmittelbar die folgende Construction, welche eine Verallgemeinerung jener Construction ist, welche Huyghens[1]) für den besonderen Fall der einachsigen Krystalle gegeben hat.

Vom Einfallspunkte aus beschreibe man zwei demselben Momente entsprechende, sich auf das erste und das zweite Medium beziehende Wellenflächen. Man verlängere den einfallenden Strahl bis zum Durchschnitte mit der sich auf das erste Medium beziehenden Wellenfläche und lege durch diesen Punkt eine tangirende Ebene an die Wellenfläche. Durch die gerade Durchschnittslinie dieser tangirenden Ebene mit der Trennungsebene lege man so viele tangirende Ebenen als möglich an den im zweiten Medium liegenden Theil der zweiten Wellenfläche. Verbindet man die Berührungspunkte mit dem Einfallspunkte, so hat man die gebrochenen Strahlen.

[1]) Traité de la lumière, chap. V.

Legt man durch dieselbe Gerade alle möglichen tangirenden Ebenen an den im ersten Medium liegenden Theil der sich auf das erste Medium beziehenden Wellenfläche und verbindet die Berührungspunkte mit dem Einfallspunkte, so hat man die reflectirten Strahlen.

Ist die reflectirende oder brechende Fläche gekrümmt, so kann man dieselbe durch die tangirende Ebene des Einfallspunktes ersetzen und sodann die eben angeführte Construction anwenden.

Aus dieser Construction geht hervor, dass, wenn das Licht aus einem isotropen Mittel in ein homogenes übergeht, im Allgemeinen zwei gebrochene Strahlen entstehen, indem die Wellenfläche des zweiten Mittels in diesem Falle eine Doppelfläche ist. Doch kann in gewissen Fällen die Construction unmöglich werden und zwar entweder für beide gebrochenen Strahlen oder nur für einen derselben, entsprechend dem Phänomene der totalen Reflexion, welches bei doppeltbrechenden Medien unter Umständen nur für einen der beiden gebrochenen Strahlen eintreten kann.

Sind beide Medien doppeltbrechend, so giebt die Construction im Allgemeinen vier gebrochene Strahlen für jeden einfallenden Strahl, doch können sämmtliche Strahlen oder ein Theil derselben fehlen, indem die Huyghens'sche Construction unmöglich wird.

Man sieht schliesslich, dass, wenn eine Reflexion in einem doppeltbrechenden Krystalle stattfindet, jeder einfallende Strahl im Allgemeinen vier reflectirte Strahlen giebt. Die gegebene Construction zeigt, dass von diesen vier reflectirten Strahlen zwei stets existiren. Die beiden anderen können fehlen, indem die Construction derselben unmöglich wird. A. Levistal nennt diese beiden Arten der Reflexion homologe und anologe Reflexion.

Die Construction der reflectirten oder gebrochenen Welle, welche wir für isotrope Mittel gegeben haben, dehnt sich leicht auf die doppeltbrechenden Mittel aus. Die reflectirte oder gebrochene Welle ist die Einhüllende der auf denselben Zeitmoment bezogenen Elementarwellen, welche von den verschiedenen Punkten der reflectirenden oder brechenden Fläche in dem Momente ausgehen, in welchem sie von der Bewegung der einfallenden Welle ergriffen werden. Allein in den doppeltbrechenden Mitteln sind die Elementarwellen nicht mehr sphärisch und die reflectirten oder gebrochenen Strahlen sind im Allgemeinen nicht mehr senkrecht auf der Wellenfläche.

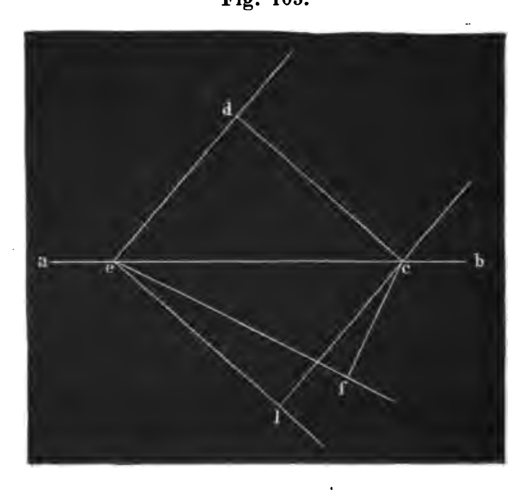
172. Brechung einer Planwelle.

Gelangt eine Planwelle *cd* (s. Fig. 105 a. f. S.) an die ebene Trennungsfläche *ab* zweier homogener Mittel, so sieht man mit Huyghens jeden Punkt der Trennungsfläche als ein Erschütterungscentrum und die gebrochene Welle als die Einhüllende aller sich im neuen Mittel fort-

pflanzenden Elementarwellen an. Es ergiebt sich hieraus unmittelbar, dass die gebrochene Welle ebenfalls eine Planwelle ist und dass die drei Normalen der einfallenden Welle, der Trennungsebene und der gebrochenen Welle in einer Ebene liegen.

Wir nehmen diese Ebene zur Ebene der Figur. In dem Momente, in welchem der Punkt e der Trennungsfläche von der einfallenden

Fig. 105.



Welle getroffen wird, hat sich von c aus eine Elementarwelle ins zweite Mittel fortgepflanzt und wird von der gebrochenen Welle ef in einem im Allgemeinen nicht in der Ebene der Figur liegenden Punkte f' berührt. cf' ist der gebrochene Strahl.

Construirt man von c aus eine auf das erste Mittel bezogene und demselben Zeitmomente entsprechende Elementarwelle, legt durch eine auf der Ebene der Figur senkrechte und durch e gehende Gerade eine tangirende Ebene el an diese Elementarwelle und verbindet den Berührungspunkt l', welcher im Allgemeinen nicht in der Ebene der Figur liegt, mit c, so ist die Verlängerung von $l'c$ über c hinaus der einfallende dem Punkte c entsprechende Strahl. Aus der Gestalt der Wellenfläche geht hervor, dass es im Allgemeinen vier gebrochene Strahlen giebt. Man gelangt so einfacher zu der in (171) aus dem Fermat'schen Principe hergeleiteten Construction und kann nun umgekehrt aus der Uebereinstimmung der Resultate auf die Anwendbarkeit des Fermat'schen Principes auch auf die doppeltbrechenden Mittel schliessen.

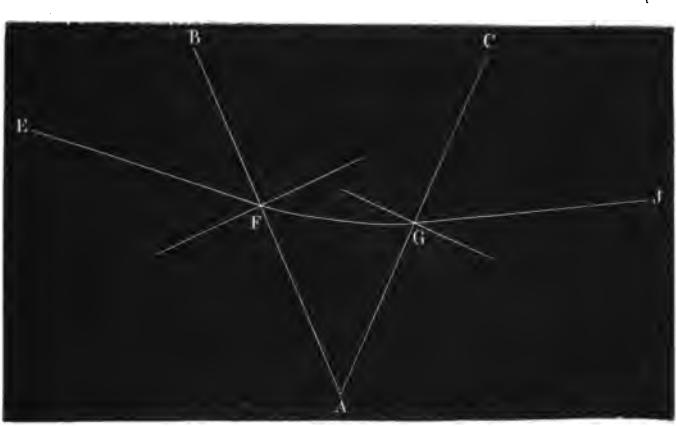
173. Durchgang des Lichtes durch ein doppeltbrechendes Prisma.

Die ebenen Lichtwellen, welche aus dem Spaltfernrohre eines Spectralapparates kommen, mögen durch ein aus einer einaxigen oder zweiaxigen Substanz beliebig geschnittenes Prisma so treten, dass die Normale der einfallenden Wellen oder die einfallenden Strahlen auf der brechenden Kante senkrecht stehen. Die gebrochenen Strahlen treten im Prisma im Allgemeinen aus der Einfallsebene heraus, allein die Normalen der gebrochenen ebenen Wellen bleiben im Prisma in der Einfallsebene. Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Planwellen in der Luft und v' jene einer der beiden im Prisma fortschreitenden gebrochenen Planwellen, d. i. die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche von der Geschwindigkeit des Strahles zu unterscheiden ist, so nennt man das Verhältniss

$$\frac{\sin v}{\sin v'} = n$$

den Brechungsexponenten. Auch beim Austritte der Wellen aus dem Prisma bleibt die Wellennormale in der Einfallsebene und die Strahlen werden wieder der ursprünglichen Einfallsebene parallel. Das Heraustreten der Strahlen im Prisma aus der Einfallsebene hat zur Folge, dass

Fig. 106.



das Bild der Spalte parallel der Kante des Prismas verschoben erscheinen kann. Mittelst des Beobachtungsfernrohres gewahrt man dann zwei Spectra und kann die Ablenkungen der einzelnen Linien derselben messen.

Der Durchgang der Wellen durch das Prisma unterliegt den folgenden mathematischen Gesetzen [1]).

Sei (s. Fig. 106 a. v. S.) *BAC* der brechende Winkel des Prismas, *EF*, *FG*, *GI* die Normalen der einfallenden, gebrochenen und austretenden Welle. Seien ferner a, b, c die drei Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten (169), n_1, n_2, n_3 die drei Hauptbrechungsexponenten des Krystalls (183), welche seinen drei Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen. Nennt man

$\left.\begin{matrix} P \\ P' \end{matrix}\right\}$ die Normalen der Seiten des Prismas

ξ, η, ζ die Winkel von P mit den drei Elasticitätsachsen des Krystalls,

ξ', η', ζ' die Winkel von P' mit den drei Elasticitätsachsen des Krystalls,

A den brechenden Winkel des Prismas,

i den Winkel des senkrecht zur brechenden Kante einfallenden Strahles mit P,

i' den Winkel des austretenden Strahles mit P',

$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ die Winkel der Wellennormale im Krystalle mit P und P',

v die Geschwindigkeit des Strahles in der Luft,

v' die Geschwindigkeit der Welle im Krystalle,

l, m, n die Winkel der Wellennormale im Krystalle mit den Elasticitätsachsen,

$\nu = \frac{v}{v'}$ den Brechungsexponenten für die Richtung l, m, n,

D die Gesammtablenkung des Strahles,

so findet man leicht mittelst sphärischer Trigonometrie:

$$\left.\begin{aligned} \cos l &= [\cos\xi \sin(A - r) - \cos\xi' \sin r]\frac{1}{\sin A} \\ &= [\cos\xi \sin i' - \cos\xi' \sin i]\frac{1}{\nu \sin A} \\ \cos m &= [\cos\eta \sin(A - r) - \cos\eta' \sin r]\frac{1}{\sin A} \\ &= [\cos\eta \sin i' - \cos\eta' \sin i]\frac{1}{\nu \sin A} \\ \cos n &= [\cos\zeta \sin(A - r) - \cos\zeta' \sin r]\frac{1}{\sin A} \\ &= [\cos\zeta \sin i' - \cos\zeta' \sin i]\frac{1}{\nu \sin A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

und hat ferner die folgenden Relationen

[1]) V. v. Lang, Ueber die Minimumablenkung der Lichtstrahlen durch doppeltbrechende Prismen, Wien. Ber. XXXIII, 155.

$$\left.\begin{aligned} A &= r + r' \\ D &= i + i' - r - r' = i + i' - A \\ \frac{\sin i}{\sin r} &= \frac{\sin i'}{\sin r'} = v \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sind A, D, i bekannt, so findet man für v:

$$\left.\begin{aligned} tg\left(\frac{A}{2} - r\right) &= tg\,\frac{A}{2}\,cot\,\frac{A+D}{2}\,tg\left(i - \frac{A+D}{2}\right) \\ v &= \frac{\sin i}{\sin r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

Andererseits ist die Geschwindigkeit einer Welle im Krystalle gegeben durch (154)

$$\frac{\cos^2 l}{v'^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{v'^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{v'^2 - c^2} = 0,$$

oder, wenn die Nenner durch v^2 dividirt werden, durch

$$\frac{\cos^2 l}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{\cos^2 m}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{\cos^2 n}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0.$$

Setzt man noch für $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ ihre Werthe aus (1), so erhält man schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\cos\xi \sin i' - \cos\xi' \sin i)^2}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{(\cos\eta \sin i' - \cos\eta' \sin i)^2}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_2^2}} \\ &\qquad + \frac{(\cos\zeta \sin i' - \cos\zeta' \sin i)^2}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Um die drei Hauptbrechungsexponenten eines Krystalls zu bestimmen, kann man aus demselben drei Prismen schneiden, parallel den drei Elasticitätsachsen. Einer der beiden gebrochenen Strahlen befolgt das Gesetz des Cartesius, und man kann den Brechungsexponenten nach dem gewöhnlichen Verfahren mittelst eines Spectrometers bestimmen. Man kann aber auch, was oft von Vortheil ist, alle drei Hauptbrechungsexponenten mittelst eines einzigen Prismas bestimmen, in welchem das System der Elasticitätsachsen eine beliebige Lage hat. In Gleichung (4) kommen ausser den Unbekannten n_1, n_2, n_3 noch die Grössen v, i, i', ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' vor. v, i, i' können nach (2) und (3) durch Beobachtung ermittelt werden, ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sind mit der Orientirung der Elasticitätsachsen im Prisma gegeben. Fallen, wie im rhombischen Systeme, die Elasticitätsachsen mit den Krystallachsen zusammen, so sind die Werthe zweier Winkel, falls die Prismenseiten von Krystallflächen gebildet werden, den krystallographischen Constanten zu entnehmen.

In Gleichung (4) sind dann nur mehr die drei Unbekannten n_1, n_2, n_3. Indem man nun die Incidenz des Lichtes zweimal ändert, erhält man drei Gleichungen von der Form (4), aus welchen n_1, n_2, n_3 bestimmt werden können.

Auch bei den doppeltbrechenden Prismen findet man ein Minimum der Ablenkung. Während aber bei den einfachbrechenden Prismen das Minimum der Ablenkung dadurch bestimmt ist, dass die Wellennormale im Prisma gegen die Seiten desselben gleich geneigt geht, oder dass $r = r'$, ist das Minimum der Ablenkung bei den doppeltbrechenden Prismen, wie V. v. Lang[1] gezeigt hat, nur dann durch die Bedingung $r = r'$ gegeben, wenn die Elasticitätsachsen im Prisma so liegen, dass

$$\cos\xi = \pm\cos\xi'$$
$$\cos\eta = \pm\cos\eta'$$
$$\cos\zeta = \pm\cos\zeta'$$

mit anderen Worten, wenn eine der Elasticitätsachsen den brechenden Winkel des Prismas oder seinen Nebenwinkel halbirt, wo dann die beiden Normalen der beiden Prismenflächen mit den drei Elasticitätsachsen gleiche Winkel bilden. In jedem anderen Falle ist für das Minimum der Ablenkung $r \gtrless r'$.

Rechnungen, welche sich auf specielle Fälle des Durchganges der Strahlen durch doppeltbrechende Prismen beziehen, haben Senarmont[2] und G. G. Stokes[3] gegeben.

---

[1]) *Loc. cit.* [2]) *Note sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringentes. Nouv. Ann. de Mathém.* t. XVI. [3]) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal for May* 1846. — *Report of the British Association for* 1862, part I, p. 272.

XVII.

Die einachsigen Krystalle.

174. Gestalt der Wellenfläche in den einachsigen Krystallen.

Für die einachsigen Krystalle zerfällt (155) die Gleichung der Wellenfläche in die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a^2x^2 + b^2(y^2 + z^2) = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn die x-Achse der Achse des Krystalls parallel angenommen wird.

In den einachsigen Krystallen zerfällt also die Wellenfläche in eine Kugelfläche vom Radius b und ein Umdrehungsellipsoid, welches die Kugelfläche in den Endpunkten der Umdrehungsachse berührt. Die Halbachsen dieses Umdrehungsellipsoides sind b und a.

Ist wie beim Quarz $a < b$, so liegt die Kugelfläche ausserhalb des Ellipsoides und die Umdrehungsachse des letzteren ist die grosse Achse der Meridianellipse. Umgekehrt verhält es sich, wenn, wie beim Kalkspath, $a > b$; dann liegt die Kugelfläche innerhalb des Ellipsoides und die Umdrehungsachse des letzteren ist die kleine Achse der Meridianellipse.

175. Gesetze der Doppelbrechung in den einachsigen Krystallen.

Durch Anwendung der Huyghens'schen Construction findet man die durch das Experiment gegebenen Gesetze der Lichtbrechung in den einachsigen Krystallen. Im Folgenden ist stets vorausgesetzt, dass

das Licht aus Luft in den Krystall trete und dass die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft gleich Eins gesetzt sei.

1. Da einer der beiden Theile der Wellenfläche die Kugelgestalt hat, befolgt einer der beiden gebrochenen Strahlen das Gesetz des Descartes. Dieser Strahl heisst der ordentliche Strahl und wir bezeichnen seinen Brechungsexponenten durch n_0.

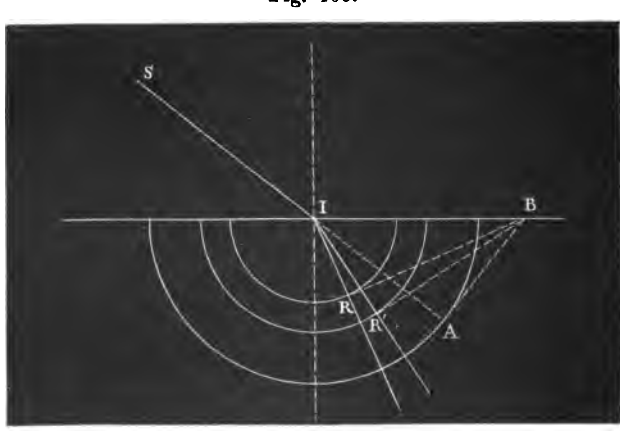
2. Ist die Einfallsebene ein Hauptschnitt, d. h. enthält sie die Achse des Krystalls, so ist diese Ebene eine Symmetrieebene, und die

Fig. 107.



zur Auffindung der gebrochenen Strahlen dienende Construction bleibt in dieser Ebene. In Fig. 107 bedeuten SI den einfallenden Strahl,

Fig. 108.



IR den ordentlich gebrochenen, IR' den ausserordentlich gebrochenen und IP die Richtung der Achse. Die beiden gebrochenen Strahlen

bleiben in der Einfallsebene, doch befolgt der ausserordentlich gebrochene nicht das Sinusgesetz.

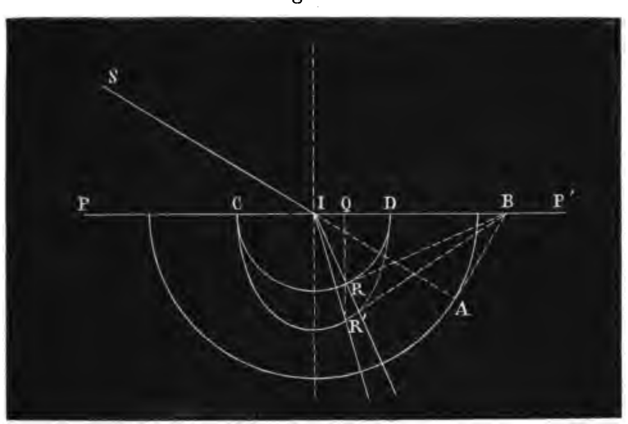
3. Sei die Trennungsfläche parallel der Achse und die Einfallsebene senkrecht zu derselben. Die Einfallsebene schneidet dann die beiden Theile der Wellenfläche in zwei Kreislinien, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Einfallspunkt ist und deren Halbmesser b für den sphärischen und a für den ellipsoidischen Theil der Wellenfläche sind (Fig. 108). Es folgt, dass in diesem Falle beide Strahlen in der Einfallsebene bleiben, und dass nicht nur der ordentliche, sondern auch der ausserordentliche Strahl das Sinusgesetz befolgt. Der Brechungsexponent des ausserordentlichen Strahles heisst in diesem Falle der ausserordentliche Brechungsexponent des Krystalls und wir bezeichnen ihn durch n_e.

Da die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles stets gleich b und die des ausserordentlichen, wenn der Strahl auf der Achse senkrecht steht, gleich a ist, so folgt:

$$n_o = \frac{1}{b}, \quad n_e = \frac{1}{a} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

4. Sei die Achse der Trennungsfläche parallel und liege in der Einfallsebene. Die beiden gebrochenen Strahlen bleiben in der Einfallsebene (Fig. 109). Es ist leicht, in diesem Falle eine Relation zwischen

Fig. 109.



den Brechungswinkeln des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles zu finden, welche Winkel wir durch r und r' bezeichnen wollen.

Sei, wie beim Kalkspath, $a > b$. Die Durchschnittslinie PP' der Einfallsebene und der Trennungsfläche ist parallel der Achse und fällt zusammen mit der kleinen Achse der Ellipse, in welcher der ellipsoidische Theil der Welle von der Einfallsebene geschnitten wird. Der Kreis CRD, in welchem der sphärische Theil der Welle von der Einfallsebene geschnitten wird, hat die kleine Achse CD der Ellipse zum

Durchmesser. Die beiden Punkte R und R', in welchen der Kreis und die Ellipse von den beiden die Richtungen der gebrochenen Strahlen bestimmenden Tangenten BR und BR' berührt werden, liegen auf einer zu CD senkrechten Geraden. Man hat also:

$$\frac{RQ}{R'Q} = \frac{b}{a},$$

und da andererseits

$$\frac{tang\, r}{tang\, r'} = \frac{R'Q}{RQ},$$

so erhält man:

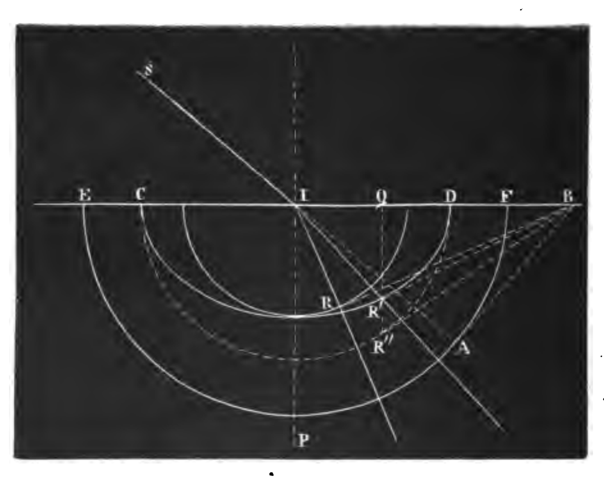
$$\frac{tang\, r}{tang\, r'} = \frac{a}{b} = \frac{n_o}{n_e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Man erhält für $a < b$ dieselbe Relation, doch ist dann CD die grosse Achse der Ellipse.

5. Bilden die Trennungsfläche und die Achse einen rechten Winkel, so ist jede Einfallsebene ein Hauptschnitt und die beiden gebrochenen Strahlen bleiben stets in der Einfallsebene.

In diesem Falle besteht eine bemerkenswerthe Relation zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel des ausserordentlichen Strahles. Nehmen wir als Ebene der Figur die Einfallsebene (Fig. 110)

Fig. 110.



und seien SI der einfallende Strahl, IP die Richtung der Achse, BE die Durchschnittslinie der Trennungsfläche und der Einfallsebene. Der Durchschnitt des ellipsoidischen Theiles der Welle mit der Ebene der Figur ist eine Ellipse $CR'D$, deren grosse Achse längs BE liegt, und die Huyghens'sche Construction vollzieht sich in einer Ebene. Um die Richtung des ausserordentlich gebrochenen Strahles zu erhalten,

beschreibt man von I als Mittelpunkt einen Kreis EAF mit einem Radius gleich Eins, verlängert den einfallenden Strahl SI bis zum Durchschnitte A mit diesem Kreise, legt in A eine Tangente AB an den Kreis und durch B eine Tangente BR' an die Ellipse. IR' ist der ausserordentlich gebrochene Strahl und PIR' der Brechungswinkel r'.

Dies vorausgesetzt, beschreiben wir von I als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich a einen Kreis $CR''D$ und legen durch B die Tangente BR'' an diesen Kreis. Die Punkte R' und R'' befinden sich auf einer Geraden, welche mit BE einen rechten Winkel bildet. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden durch Q und den Winkel $R''IP$ durch θ, so haben wir

$$\frac{tang\, r'}{tang\, \theta} = \frac{R''Q}{R'Q} = \frac{a}{b}.$$

Da ferner

$$sin\, \theta = a\, sin\, i,$$

wenn i den Incidenzwinkel bedeutet, so folgt

$$tang\, r' = \frac{a\, sin\, \theta}{b\, sin\, \theta} = \frac{a^2\, sin\, i}{b\sqrt{1 - a^2\, sin^2 i}}$$

und schliesslich

$$tang\, r' = \frac{n_0\, sin\, i}{n_e \sqrt{n_e^2 - sin^2 i}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

6. Bilden die Trennungsfläche und die Achse einen rechten Winkel und fällt der Strahl senkrecht ein, so bilden die beiden gebrochenen Strahlen nur einen einzigen Strahl parallel der Achse und es tritt nur ein einziger Strahl aus, welche Lage immer gegen den Strahl die zweite Begrenzungsfläche des Krystalls habe.

Man sieht auch, dass, welches immer die Lage der ersten Begrenzungsfläche des Krystalles sei, sobald einer der beiden gebrochenen Strahlen sich parallel der Achse fortpflanzt, dies auch der andere thut und dass also in den einachsigen Krystallen parallel der Achse keine Doppelbrechung stattfindet.

Die entwickelten Gesetze beziehen sich auf besondere Fälle der Huyghens'schen Construction und gestatten eine experimentelle Prüfung. In Bezug auf den allgemeinen Fall ist es stets möglich mit Hülfe der Huyghens'schen Construction den Brechungswinkel des ausserordentlichen Strahles und den Winkel der Brechungsebene dieses Strahles mit dem Hauptschnitte auszudrücken als Function des Incidenzwinkels, des Winkels zwischen der Einfallsebene und dem Hauptschnitte und des Winkels zwischen der Trennungsfläche und der Achse. Die Rechnungen, durch welche die entsprechenden Formeln abgeleitet werden, sind ziemlich verwickelt, und da dieselben ein mehr mathematisches Interesse haben, verweilen wir bei denselben nicht.

176. Attractive und repulsive Krystalle.

Wenn in einem einachsigen Krystalle der ausserordentliche Brechungsexponent grösser ist, als der ordentliche, d. i. wenn $b > a$, so nähert sich der ausserordentlich gebrochene Strahl der Achse mehr als der ordentlich gebrochene und scheint folglich von der Achse angezogen zu werden. Wenn umgekehrt der ordentliche Brechungsexponent der grössere ist, d. i. wenn $a > b$, so entfernt sich der ausserordentlich gebrochene Strahl mehr von der Achse als der ordentlich gebrochene und scheint von der Achse abgestossen zu werden. Hierauf beruht die von Biot herrührende Eintheilung der einachsigen Krystalle in attractive und repulsive, je nachdem der ausserordentliche Brechungsexponent grösser oder kleiner ist als der ordentliche. Fresnel hat vorgeschlagen, diese der Emissionstheorie angehörigen Bezeichnungen fallen zu lassen und die den beiden Gattungen angehörigen Krystalle als positive und negative Krystalle zu bezeichnen. In der That ist die Differenz zwischen der ordentlichen und ausserordentlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei den attractiven Krystallen stets positiv, und bei den repulsiven stets negativ.

Aus der Huyghens'schen Construction geht hervor, dass zwischen den Eigenschaften der attractiven und jenen der repulsiven Krystalle noch andere Verschiedenheiten bestehen:

1) In den attractiven Krystallen ist der Winkel der totalen Reflexion für den ausserordentlichen Strahl kleiner als für den ordentlichen. Bei den repulsiven verhält es sich umgekehrt.
2) In den attractiven Krystallen entsprechen dem ordentlichen Strahle stets zwei reflectirte Strahlen, während bei gewissen Incidenzen dem ausserordentlichen Strahle nur ein einziger entspricht. Bei den repulsiven Krystallen verhält es sich umgekehrt, es entsprechen dem ausserordentlichen Strahle stets zwei reflectirte Strahlen, dem ordentlichen bei gewissen Incidenzen nur einer.

Zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles in den einachsigen Krystallen besteht eine bemerkenswerthe Beziehung. Die Gleichung des ellipsoidischen Theiles der Wellenfläche ist

$$a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2) = a^2 b^2.$$

Sind ϱ der Radiusvector dieser Fläche und λ, μ, ν die Winkel desselben mit den Achsen, so kann man für diese Gleichung schreiben:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu)}{a^2 b^2},$$

oder, wenn $1 - \cos^2 \lambda$ für $\cos^2 \mu + \cos^2 \nu$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}{a^2 b^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2\lambda.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\varrho^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Diese Gleichung spricht das folgende Gesetz für die einachsigen Krystalle aus:

Die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles ist proportional dem Quadrate des Sinus des Winkels zwischen dem ausserordentlichen Strahle und der Achse des Krystalles.

Dieser Satz rührt von Biot her, welcher ihn in etwas anderer Weise gegeben hat, entsprechend dem Umstande, dass in der Emissionstheorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles $\frac{1}{b}$ und die des ausserordentlichen $\frac{1}{\varrho}$ ist.

Die eben entwickelte Relation zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden gebrochenen Strahlen wurde experimentell bestätigt durch Biot's Arbeiten über die chromatische Polarisation und später durch Fresnel mittelst eines Verfahrens, welches sich auf die Interferenz des polarisirten Lichtes gründete und welches wir weiter oben (135) beschrieben haben.

177. Schwingungsrichtung auf dem ordentlichen Strahle.

Nach (157) soll die Schwingungsrichtung eines sich in einem doppeltbrechenden Mittel fortpflanzenden Strahles gefunden werden, wenn man den Strahl auf die Ebene projicirt, welche die Wellenfläche in ihrem Durchschnittspunkte mit dem Strahle berührt. Diese Regel wird jedoch für den ordentlichen Strahl unbrauchbar, da dieser auf der Wellenfläche, welche eine Kugelfläche ist, senkrecht steht, und man muss sonach auf das Elasticitätsellipsoid Fresnel's zurückgehen, dessen Gleichung für einachsige Krystalle ist:

$$a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2) = 1.$$

Legen wir eine Ebene durch den Mittelpunkt dieses Ellipsoides und senkrecht auf den Strahl, dessen Schwingungsrichtung gefunden werden soll. Diese Ebene ist parallel der ebenen Welle, welche dem in Rede stehenden ordentlichen Strahle entspricht, und folglich sind die Schwingungen parallel einem der Durchmesser der Ellipse, in welcher das

Elasticitätsellipsoid von der gedachten Ebene geschnitten wird. Da nun beim Elasticitätsellipsoide der Aequatorealradius stets ein Maximum oder Minimum ist, so findet sich eine der Achsen jenes elliptischen Schnittes stets in der yz-Ebene und ist gleich $\frac{1}{b}$, und da alle ordentlichen Planwellen sich mit der constanten Geschwindigkeit b fortpflanzen, so ist es diese Achse, welcher die Schwingungen des ordentlichen Strahles parallel sind. Diese Schwingungen bilden also einen rechten Winkel sowohl mit dem Strahle als mit der x-Achse, d. i. mit der Achse des Mittels, und es folgt hieraus, dass auf dem ordentlichen Strahle die Schwingungen senkrecht zu der Ebene vor sich gehen, welche durch die Richtungen des Strahles und der Achse gelegt werden kann, und weiter, wenn man mit Fresnel annimmt, dass die Schwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht stehen, dass die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles jener Ebene parallel ist, welche durch den Strahl und durch die Achse geht.

178. Lage der Polarisationsebenen der beiden Strahlen.

Setzen wir zunächst voraus, die Einfallsebene sei ein Hauptschnitt, d. i. die Achse liege in der Einfallsebene. In diesem Falle stehen die Schwingungen des ordentlichen Strahles auf der Einfallsebene senkrecht. Der ausserordentliche Strahl liegt in derselben Ebene und ebenso seine Projection auf die tangirende Ebene des ellipsoidischen Theiles der Wellenfläche. Die Schwingungen des ausserordentlichen Strahles gehen also im Hauptschnitte vor sich. Also: Ist die Einfallsebene ein Hauptschnitt, so sind die beiden gebrochenen Strahlen rechtwinkelig polarisirt.

Man sieht leicht, dass dasselbe bei senkrechter Incidenz stets stattfindet, da in diesem Falle die beiden gebrochenen Strahlen in der durch den einfallenden Strahl und die Achse gehenden Ebene liegen.

Im Allgemeinen jedoch sind die beiden Strahlen nicht rechtwinkelig polarisirt. Da aber in allen bekannten Fällen die beiden gebrochenen Strahlen nahe an einander liegen, und da die Ebenen, welche einen Radiusvector der Wellenfläche und je eine längs diesem Radiusvector fortgepflanzte Schwingungsrichtung enthalten, stets auf einander senkrecht stehen (158), so stehen in allen Fällen die Polarisationsebenen der beiden gebrochenen Strahlen nahezu auf einander senkrecht.

Wir bemerken, dass die Polarisationsebene des ausserordentlichen Strahles im Allgemeinen diesen Strahl nicht enthält, wenigstens dann nicht, wenn man mit Fresnel als Polarisationsebene eine Ebene senkrecht zur Schwingungsrichtung versteht.

Es giebt einen einzigen Fall, in welchem die Schwingungsrichtung und die Lage der Polarisationsebene in den einachsigen Krystallen unbestimmt bleiben. Dies findet dann statt, wenn der Strahl parallel der Achse des Krystalls geht.

179. Das Gesetz von Malus oder des Cosinusquadrates.

Bei senkrechter Incidenz stehen die Schwingungen des ordentlichen Strahles auf dem Hauptschnitte senkrecht, während jene des ausserordentlichen Strahles mit demselben parallel sind. Bezeichnet man also durch α den Winkel zwischen der Polarisationsebene des einfallenden Strahles und dem Hauptschnitte, so bildet die Schwingungsrichtung des einfallenden Strahles mit jener des ordentlich gebrochenen Strahles einen Winkel gleich α und mit jener des ausserordentlich gebrochenen Strahles einen Winkel gleich $90^0 - \alpha$.

Nimmt man also die Amplitude des einfallenden Strahles als Einheit an, so ist die Amplitude des ordentlich gebrochenen Strahles gleich $\cos\alpha$ und jene des ausserordentlich gebrochenen Strahles gleich $\sin\alpha$. Da ferner die Intensität dem Quadrate der Amplitude proportional ist, so hat man, wenn durch I, O, E die Intensitäten des einfallenden, ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahles bezeichnet werden,

$$O = I\cos^2\alpha$$
$$E = I\sin^2\alpha.$$

Dies ist das nach Malus benannte Gesetz oder das Gesetz des Cosinusquadrates [1]). Dasselbe wurde von Arago durch zahlreiche Versuche verificirt, welche auf Grund eines später zu besprechenden Verfahrens angestellt wurden [2]).

180. Experimentelle Verification der Gesetze der Doppelbrechung in den einachsigen Krystallen.

Huyghens selbst begnügte sich damit, die Richtigkeit seiner Construction an einigen einfachen Fällen zu prüfen [3]). Seine Theorie war fast in Vergessenheit gerathen, als im Jahre 1802 Wollaston an die experimentelle Prüfung der Gesetze der Doppelbrechung ging [4]).

Sein Verfahren bestand darin, den Winkel der totalen Reflexion des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles zu messen. Indem er

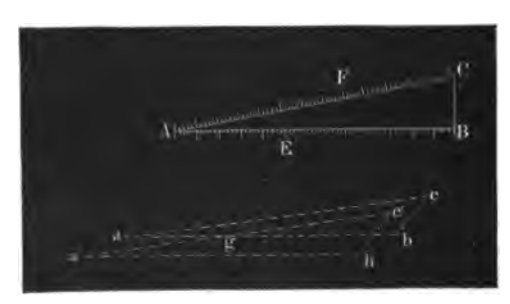
[1]) Malus, *Théorie de la double réfraction*, p. 205. [2]) *Oeuvres complètes d'Arago*, t. X, p. 168. [3]) *Traité de la lumière*, chap. V. [4]) *Phil. Trans.* 1802, p. 381.

den doppeltbrechenden Krystall successive mit verschiedenen Flüssigkeiten in Berührung brachte, erhielt er eine grosse Zahl numerischer Resultate, welche mit der Huyghens'schen Construction und den Fresnel'schen Gesetzen in hinreichender Uebereinstimmung standen.

Einige Jahre später, 1808, machte die Akademie der Wissenschaften zu Paris die Theorie der Doppelbrechung zum Gegenstande einer Preisaufgabe, und es war die Arbeit von Malus, welche den Preis davontrug[1]). In dieser Arbeit theilte Malus zwei Methoden der experimentellen Prüfung der Gesetze der Doppelbrechung mit. Nach der ersten Methode wird aus dem Krystalle ein Prisma geschnitten, dessen Seiten der Achse parallel sind, und bei senkrecht zur Achse einfallenden Strahlen nach der Methode des Minimums der Ablenkung der Brechungsexponent des ordentlichen und jener des ausserordentlichen Strahles bestimmt.

Die zweite von Malus angewendete Methode mittelst planparalleler Krystallplatten ist allgemeiner. Auf einer Kupferplatte wird ein sehr schmales rechtwinkeliges Dreieck ABC (Fig. 111) eingerissen, dessen Hypotenuse AC und grosse Kathete AB in Millimeter getheilt ist.

Fig. 111.



Die Kupferplatte wird horizontal gestellt und auf dieselbe ein dicker Kalkspathkrystall mit parallelen Begrenzungsflächen gelegt. Richtet man das Fernrohr eines Theodoliten nach einem Punkte G (Fig. 112) der oberen Fläche des Krystalls, so nimmt man zwei Bilder abc, $a'b'c'$ des Dreiecks wahr. Die Hypotenuse $a'c'$ des einen der beiden Bilder schneidet die Seite ab des anderen in einem Punkte g. Die an den Seiten des Dreiecks laufenden Theilungen lassen die Längen ag und $a'g$ unmittelbar ablesen. Trägt man auf der Seite AB des Dreiecks ABC eine Länge gleich ag ab und auf der Hypotenuse AC eine Länge AF gleich $a'g$, so hat man zwei Punkte E und F, welche so liegen, dass ein ordentlicher und ein ausserordentlicher Strahl, welche von diesen beiden Punkten ausgehen und sich in G treffen, nach ihrem Austritte

[1]) *Théorie de la double réfraction,* Paris 1810.

aus dem Krystalle nur einen einzigen Strahl GH bilden, welcher mit der Achse des Fernrohrs zusammenfällt. Würde umgekehrt HG einen einfallenden Strahl vorstellen, so würde sich derselbe beim Eintritte in

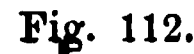
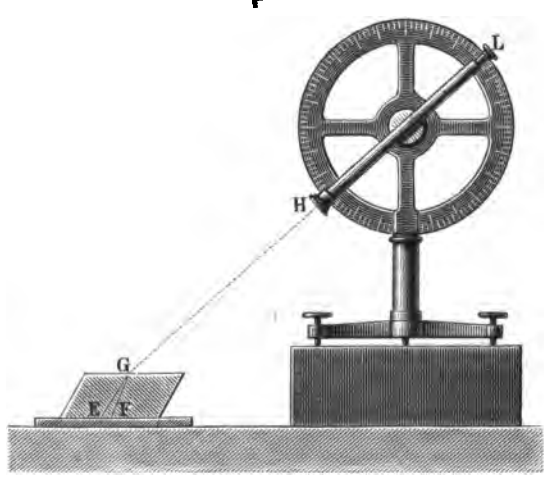


Fig. 112.



den Krystall in die beiden Strahlen GE und GF spalten. Ist die Lage des Punktes G auf der oberen Fläche des Krystalls, sowie die Dicke des Krystalls bekannt, so berechnet man leicht aus der Lage der Punkte E und F die Brechungswinkel der beiden Strahlen und den Winkel der Brechungsebene des ausserordentlichen Strahles mit dem Hauptschnitte. Andererseits ist der Einfallswinkel dem Winkel gleich, welchen die Achse des Fernrohrs mit der Verticalen bildet und fällt die Einfallsebene mit der verticalen, durch die Achse des Fernrohrs gehenden Ebene zusammen. Man hat also alle nöthigen Elemente, um die Resultate der Huyghens'schen Construction experimentell zu prüfen.

Der Punkt G wird durch zwei auf der oberen Fläche des Krystalls gezogene sich kreuzende Fäden gebildet. Um eine grössere Zahl von Messungen anzustellen ohne die Aufstellung des Theodoliten zu verändern, setzt man die Kupferplatte, welche den Krystall trägt, auf eine kleine horizontale um eine verticale Achse drehbare Platte und zwar derart, dass der Punkt G sich auf der Drehachse befindet. Letzteres wird dadurch erreicht, dass man das Fadenkreuz auf der oberen Fläche des Krystalls verschiebt, bis es während der Drehung der Scheibe stets an derselben Stelle des Gesichtsfeldes des Fernrohrs bleibt.

Malus beschränkte seine Messungen auf den Kalkspath. Indem er aus mehreren Versuchsreihen die Werthe von a und b berechnete, gelangte er zu den folgenden Resultaten:

Art der Beobachtung	*a*	*b*
1. Prisma, parallel der Achse geschnitten	0,67334	0,60374
2. Eintrittsfläche gegen die Achse geneigt. Einfallsebene parallel dem Hauptschnitte	0,67349	0,60387
3. Eintrittsfläche gegen die Achse geneigt. Einfallsebene senkrecht zum Hauptschnitte	0,67558	0,60575
4. Eintrittsfläche senkrecht zur Achse	0,67427	0,60457

Die gegenseitige Uebereinstimmung der für *a* und *b* mittelst verschiedener Methoden gefundenen Werthe bildet offenbar eine Bestätigung der Theorie. Zwar erstreckt sich die Uebereinstimmung nur auf die zwei ersten Decimalen, doch darf nicht vergessen werden, dass Malus mit weissem Lichte operirte.

Malus dehnte seine Messungen auch auf andere Krystalle aus, doch bediente er sich hier stets eines parallel der Achse geschnittenen Prismas, so dass ihm die Unterscheidung zwischen attractiven und repulsiven Krystallen entging.

Nachdem Biot mittelst der Phänomene der chromatischen Polarisation die Existenz der zweiachsigen Krystalle nachgewiesen hatte, über-

Fig. 113.

nahm er es gleichfalls, die Gesetze der Doppelbrechung an einer grossen Zahl von Krystallen zu prüfen. Ein aus einem Krystalle geschnittenes

Prisma wurde auf ein horizontales Tischchen H (Fig. 113) so gesetzt, dass die untere Fläche des Prismas etwas über den Rand des Tischchens vorstand. Das Tischchen war verschiebbar längs einem horizontal getheilten Stabe L, an welchem ein zweiter, verticaler, in Millimeter getheilter Stab R angebracht war. War die Einfallsebene ein Hauptschnitt, so lagen die beiden Bilder der Theilung R längs einer und derselben Geraden, und man konnte dem Tischchen eine solche Stellung geben, dass ein bestimmter Theilstrich des einen Bildes mit einem bestimmten Theilstriche des anderen zusammenfiel. Man erhielt so zwei Punkte A und B von solcher Lage, dass ein ordentlicher und ein ausserordentlicher Strahl, welche von diesen Punkten ausgegangen waren, nach ihrem Austritte aus dem Prisma einen einzigen Strahl CD bildeten, oder mit anderen Worten, man erhielt die beiden Punkte A und B, nach welchen die beiden von dem einfallenden Strahle DC herrührenden gebrochenen Strahlen gerichtet waren. Die Richtung des einfallenden Strahles CD wurde mittelst eines Fernrohres bestimmt, welches nach einem Punkte C der Eintrittsfläche gerichtet wurde.

War die Einfallsebene kein Hauptschnitt, so bediente sich Biot eines zweiten Stabes R', welcher in einem Punkte des Stabes R drehbar befestigt war, und brachte das ordentliche Bild eines Theilstriches von R mit dem ausserordentlichen Bilde eines Theilstriches von R' zur Coincidenz.

Abria [1]) bediente sich der Prismenmethode.

Ein aus einem einachsigen Krystalle beliebig geschnittenes Prisma wurde auf dem Tischchen des Spectrometers auf das Minimum der Ablenkung des ordentlichen Strahles irgend einer Farbe, z. B. der D-Linie, eingestellt und sodann der Winkel zwischen dem austretenden ordentlichen und dem austretenden ausserordentlichen Strahle einerseits abgelesen, andererseits nach den Fresnel'schen Gesetzen berechnet. Es ergab sich:

---

[1]) *Vérification de la loi d'Huyghens, par la méthode du prisme,* C. R. LXXVII, 1873. — *Lois de la double réflexion intérieure dans les cristaux biréfringents uniaxes.* C. R. LXXIX, 1253. — *Double réflexion intérieure dans les cristaux biréfringents uni-axes.* C. R. LXXX, 1875.

Winkel zwischen *O* und *E* nach dem Austritte		Differenz	
berechnet	beobachtet		
14° 11′ 37″	14° 10′ 30″	1′ 7″	Kalkspath.
13° 22′ 6″	13° 22′ 20″	14″	
3° 54′ 51″	3° 51′ 20″	3′ 31″	
4° 1′ 26″	3° 58′ 10″	3′ 16″	
11° 3′ 46″	11° 3′ 10″	36″	
12° 2′ 53″	12° 10′ 30″	7′ 37″	
13° 27′ 6″	13° 34′ 40″	7′ 34″	
12° 56′ 23″	12° 49′ 56″	6′ 33″	
5° 30′ 5″	5° 27′ 20″	2′ 45″	
5° 29′ 57″	5° 23′ 50″	6′ 7″	
45′ 55″	46′ 15″	20″	Quarz.
46′ 4″	46′ 25″	21″	
36′ 1″	35′ 53″	8″	
40′ 49″	41′	11″	
41′ 46″	40′ 5″	41″	
12″	10″—20″	—	Quarz, Achse parallel einer der Seiten der Basis.
43′ 18″	42′ 55″	23″	
33′ 42″	32′ 45″	57″	

Die Differenzen sind meist kleiner als $^1/_{100}$ der gemessenen Grösse und sehr annehmbar in Rücksicht auf die weitläufigen nothwendigen Rechnungen.

Abria wendete ferner die Methode der totalen Reflexion an.

Der in das Prisma tretende Strahl zerlegt sich in zwei Strahlen. Werden diese von der zweiten Fläche des Prismas total reflectirt, so zerlegt sich jeder derselben wieder in zwei Strahlen. Es treten also an der ersten Fläche des Prismas vier Strahlen aus, welche durch OO', OE', EO', EE' bezeichnet werden können. Abria berechnete die Winkel der vier austretenden Strahlen mit der Austrittsfläche und hieraus die Winkel, welche diese Strahlen unter einander bildeten. Die so erhaltenen Werthe wurden mit den experimentell gefundenen verglichen. Es ergab sich für ein Quarzprisma mit beliebig orientrirter Achse für den Winkel der Strahlen OO' und EE':

Rechnung	Beobachtung
11′ 13″	10′ 10″
29′ 57″	30′ 10″

und für OE' und EO'

Rechnung	Beobachtung
49′ 50″	50′ 20″
1⁰ 18′ 5″	1⁰ 19′ 10″
1⁰ 37′ 23″	1⁰ 37′ 30″

Für Kalkspath ergab sich:

	Rechnung	Beobachtung
OO', EE'	27′	22′
	8⁰ 15′	8⁰ 9′
	11⁰ 41′	11⁰ 43′
OE', EO'	16⁰ 49′	16⁰ 48′
	27⁰ 25′	27⁰ 29′

In einem anderen Falle war die Achse eines Quarzprismas parallel einer der Seiten und senkrecht zu den Kanten des Prismas, und es fielen die Strahlen senkrecht ein. Durch die Brechung an der ersten Fläche des Prismas entstehen zwei Strahlen. Jeder derselben wird an der zweiten Fläche des Prismas einfach reflectirt, und es treten nur zwei Strahlen aus, OO' und EE'.

Es ergab sich:

Winkel des Einfallslothes an der ersten Fläche mit der Achse, Richtung nach innen	Winkel zwischen den Strahlen OO' und EE'	
	Rechnung	Beobachtung
34° 53′ 25″	41′ 42″	41′ 25″
90°	1′ 12″	2′ 40″
90°	2′ 0″	2′ 40″
24° 57′ 5″	39′ 6″	38′ 40″
24° 57′ 5″	41′ 30″	41′ 30″
34° 53′ 5″	38′ 54″	38′ 35″

Schon vor Abria hatte G. G. Stokes die Prismenmethode angewendet und Messungen am Kalkspathe durchgeführt [1]). Bei der Bestimmung der Brechungsexponenten isotroper Mittel pflegt man die Methode des Minimums der Ablenkung anzuwenden. Dies ist jedoch nicht nothwendig. Man kann auch einen beliebigen Incidenzwinkel anwenden, diesen und den Austrittswinkel messen und hieraus den Brechungsexponenten bestimmen. Diese Methode wurde schon von Swan [2]) zur experimentellen Verification des Gesetzes der Brechung des ordentlichen Strahles im Kalkspathe angewendet. Man kann jedoch dieselbe Methode auch auf die ausserordentlich gebrochenen Strahlen anwenden. Ein doppelt brechendes Prisma liefert zwei Spectra. Man kann die Ablenkungen der beiden Bilder für die einzelnen Farben messen und berechnen und gelangt so zu einer experimentellen Prüfung der Gesetze der Doppelbrechung. Stokes fand nun, dass für Kalkspath die Huyghens'sche Construction die Gesetze der ausserordentlichen Brechung mit demselben Grade der Genauigkeit giebt, wie das Gesetz des Cartesius die Gesetze der ordentlichen Brechung. Kalkspath zeigt eine starke Doppelbrechung und müsste Abweichungen vom Gesetze besonders merklich erscheinen lassen.

Bei 15 Messungen am ausserordentlichen Strahle bei Richtungen desselben im Prisma, welche 30 bis 60 Grade mit der Achse bildeten, ergab sich eine Uebereinstimmung mit der aus dem Huyghens'schen Principe und den gemessenen Hauptbrechungsexponenten gezogenen Formel, welche nicht mehr als 0,00013 des gemessenen Brechungs-

---

[1]) *Proceedings of the Royal Society*, vol. XX, p. 443, 1872. [2]) *Transactions of the Royal Society of Edinburg*, vol. XVI, 275.

exponenten betrug, eine Grösse, welche innerhalb der Beobachtungsfehler lag. Der entsprechende Fehler der Ablenkung beträgt bei einem Prisma von 45⁰ beispielsweise 25 Secunden. Ebenso erhielt R. T. Glazebrook[1]) mittelst der Prismenmethode für Kalkspath eine Wellenfläche, welche von der Fresnel'schen nur um Grössen abweicht, welche innerhalb der Fehlerquellen der Beobachtungsmethode liegen.

Schliesslich hat W. Kohlrausch[2]) durch eingehende Messungen mittelst der Methode der Totalreflexion erwiesen, dass die Fresnel'sche Theorie der Doppelbrechung in optisch einachsigen Krystallen auf eine Gestalt der Lichtwellenfläche führt, welche innerhalb sehr geringer Messungsfehler experimentell bestätigt wird.

181. Experimentelle Verification des Gesetzes der Fortpflanzung des ordentlichen Strahles.

Nach Fresnel's Theorie muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles von der Fortpflanzungsrichtung unabhängig sein. Diese Consequenz der Theorie Fresnel's wurde von mehreren Physikern experimentell geprüft.

Brewster[3]) legte zwei Kalkspathprismen von genau gleich grossen brechenden Winkeln mit den Grundflächen aneinander, so dass sie zusammen nur ein einziges Prisma bildeten. Eines der beiden Prismen war parallel, das andere senkrecht zur Achse geschnitten. Indem er durch dieses Doppelprisma nach einer der Kante desselben parallelen Linie blickte, fand er, dass die durch die beiden Prismen entstandenen ordentlichen Bilder genau ein und dieselbe Gerade bildeten, woraus hervorging, dass der ordentliche Strahl in den beiden Prismen, obgleich gegen die Achse verschieden geneigt, doch genau dieselbe Brechung erfuhr. Dieses Verfahren ist dasselbe, dessen sich Fresnel bediente, um zu zeigen, dass in den zweiachsigen Krystallen keiner der beiden Strahlen ordentlich gebrochen wird.

Einige Jahre nach den Versuchen Brewster's maass Swan[4]) den ordentlichen Brechungsexponenten des Kalkspaths mittelst in verschiedenen Richtungen geschnittener Prismen nach der Methode des Mini-

---

1) Doppelbrechung und Dispersion im Kalkspath. *Proc. Roy. Soc.* XXIX, p. 205, 1879. 2) Wied. Ann. 1879. 3) 13. *Rep. of Brit. Assoc.*, p. 7. 4) *Edinb. trans.* XVI, 375.

mums der Ablenkung unter Anwendung des monochromatischen Lichtes der Salzflamme. Er erhielt die folgenden Resultate:

	Ordentlicher Brechungsexponent des Kalkspaths
Strahl, parallel zur Achse gebrochen	1,658367
„ senkrecht „ „ „	1,658366
„ „ „ „ „	1,658361
„ „ „ „ „	1,658384
„ unter 45° gegen die Achse gebrochen	1,658385
„ „ 60° „ „ „ „	1,658389

XVIII.

Die zweiachsigen Krystalle.

---

182. Die Gestalt der Wellenfläche in den zweiachsigen Krystallen.

Bei den zweiachsigen Krystallen sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der parallel zu den drei Elasticitätsachsen vor sich gehenden Schwingungen constant gleich a, b, c und die Gleichung der Wellenfläche ist:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(b^2 + c^2) x^2$$
$$- b^2(c^2 + a^2) y^2 - c^2(a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Wenn a, b, c von einander verschieden sind, wie dies bei den zweiachsigen Krystallen zutrifft, so ist die Wellenfläche eine zweitheilige Fläche vierten Grades, welche nicht in Flächen zweiten Grades zerfällt. Um uns eine Vorstellung von der Gestalt dieser Fläche zu bilden, suchen wir die Schnitte derselben mit den Coordinatenebenen.

Wir setzen voraus, dass

$$a > b > c.$$

Die Achse der x ist dann die Achse der grössten Elasticität, die Achse der z die Achse der kleinsten Elasticität und die Achse der y die Achse der mittleren Elasticität.

Setzen wir in der Gleichung der Wellenfläche der Reihe nach

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

so zerfällt der Schnitt der Wellenfläche mit der yz-Ebene in einen Kreis

$$y^2 + z^2 = a^2$$

und eine Ellipse

$$b^2 y^2 + c^2 z^2 = b^2 c^2;$$

der Schnitt mit der xz-Ebene in einen Kreis

$$x^2 + z^2 = b^2$$

und eine Ellipse

$$c^2 z^2 + a^2 x^2 = a^2 c^2;$$

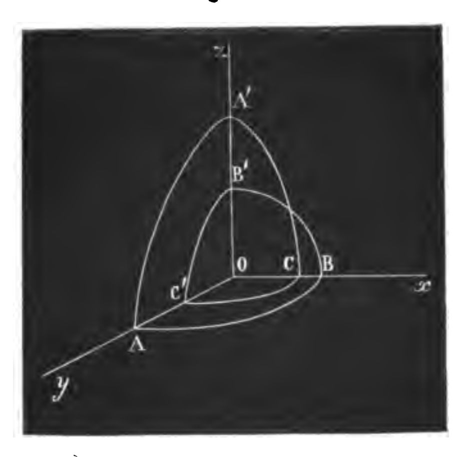
endlich der Schnitt mit der xy-Ebene in einen Kreis

$$x^2 + y^2 = c^2$$

und eine Ellipse

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Fig. 114.

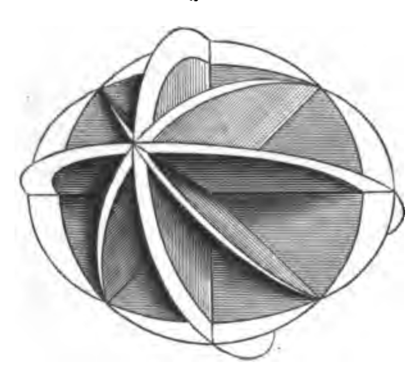


In der yz-Ebene liegt der Kreis ausserhalb der Ellipse, in der xy-Ebene innerhalb, und in der xz-Ebene, welche auf der Achse der mittleren Elasticität senkrecht steht, schneiden sich der Kreis und die Ellipse in vier Punkten, von welchen je zwei einander diametral gegenüberliegen. Es wird sich zeigen, dass diese vier Punkte singuläre Punkte der Wellenfläche sind.

In Figur 114 sind die Schnitte der Wellenfläche mit den Coordinatenebenen verzeichnet. Man hat

$$OA = OA' = a, \quad OB = OB' = b, \; OC = OC' = c.$$

Fig. 115.



Diese Schnitte heissen die Hauptschnitte der Wellenfläche, welche in Bezug auf jede der drei Ebenen der Hauptschnitte symmetrisch ist.

Die halbirende Gerade des spitzen Winkels der durch die singulären Punkte gehenden Radiusvectoren heisst die Mittellinie und kann mit der Achse der grössten oder jener der kleinsten Elasticität zusammenfallen.

Fig. 115 soll die Gestalt der Wellenfläche versinnlichen.

183. Gesetze der Doppelbrechung in den zweiachsigen Krystallen.

Ist die Einfallsebene senkrecht zu einer Elasticitätsachse, d. i. fällt sie mit einem Hauptschnitte zusammen, so ist die Huyghens'sche Construction symmetrisch bezüglich der Einfallsebene und folglich bleiben beide gebrochenen Strahlen in derselben. Ueberdies ist in diesem Falle einer der beiden Schnitte der Wellenfläche mit der Einfallsebene ein Kreis und folglich befolgt einer der beiden gebrochenen Strahlen das Gesetz des Cartesius, er heisst der ordentlich gebrochene Strahl. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles ist gleich $\frac{1}{a}$ für die Ebene der yz, $\frac{1}{b}$ für die Ebene der xz und $\frac{1}{c}$ für die Ebene der xy. Die drei Brechungsexponenten $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ heissen die Hauptbrechungsexponenten des Krystalles. Dieselben können nach der Methode des Minimums der Ablenkung bestimmt werden mittelst dreier Prismen, welche parallel den drei Elasticitätsachsen geschnitten sind, und durch sie ist der Krystall optisch bestimmt.

Ist bei einem zweiachsigen Krystalle die Eintrittsfläche des Strahles senkrecht zu einer Elasticitätsachse und fällt der Strahl senkrecht ein, so pflanzen sich die beiden gebrochenen Strahlen längs derselben Geraden fort, doch mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Es folgt hieraus, dass, wenn die Austrittsfläche der Strahlen zu diesen schief steht, die beiden Strahlen in verschiedenen Richtungen austreten.

Wenn die Einfallsebene senkrecht auf der Achse der grössten Elasticität steht, so verhält sich der Krystall wie ein attractiver Krystall; wenn auf der Achse der kleinsten Elasticität wie ein repulsiver Krystall; wenn aber auf der Achse der mittleren Elasticität, je nach der Incidenz wie ein attractiver oder repulsiver Krystall.

Um also das Zeichen eines zweiachsigen Krystalls angeben zu können, d. i. um auch diese Krystalle in attractive und repulsive eintheilen zu können, stellt man die folgende Betrachtung an. Nähert sich der Winkel der beiden Radiusvectoren, welche durch die singulären Punkte der Wellenfläche gehen, der Null, so nähern sich die Eigenschaften des zweiachsigen Krystalls jenen eines einachsigen, und zwar jenen eines repulsiven, wenn die beiden Radiusvectoren mit der Achse der grössten Elasticität zusammenfallen, d. i. wenn $b = c$ wird, und jenen eines attractiven, wenn die Radiusvectoren mit der Achse der kleinsten Elasticität zusammenfallen oder wenn $b = a$ wird. Man rechnet demnach einen zweiachsigen Krystall zu den attractiven oder positiven Krystallen, wenn die Mittellinie (182) mit der Achse der klein-

sten Elasticität zusammenfällt, und zu den repulsiven oder negativen, wenn mit jener der grössten Elasticität.

In einem Falle bleibt das Zeichen des Krystalls unbestimmt, wenn die beiden Radiusvectoren, welche die singulären Punkte verbinden, einen rechten Winkel bilden.

184. Schwingungsrichtung in den zweiachsigen Krystallen.

Das allgemeine Gesetz, welches die Schwingungsrichtungen auf einem Radiusvector der Wellenfläche giebt (152), zeigt, dass in den zweiachsigen Krystallen die Schwingungen der beiden Strahlen, welche sich parallel einer der Elasticitätsachsen fortpflanzen können, einen rechten Winkel bilden, und dass folglich diese beiden Strahlen, welche als von einem einzigen einfallenden Strahle herrührend gedacht werden können, rechtwinkelig polarisirt sind. Im Allgemeinen jedoch besteht bei den zweiachsigen Krystallen keine bestimmte Beziehung zwischen den Schwingungsrichtungen der beiden von einem einzigen einfallenden Strahle herrührenden gebrochenen Strahlen. Da jedoch diese beiden Strahlen stets einen kleinen Winkel einschliessen und da die Ebenen, welche durch einen Radiusvector der Wellenfläche und durch die beiden Schwingungsrichtungen gehen, welche sich längs diesem Radiusvector fortpflanzen können, einen rechten Winkel einschliessen, so folgt, dass die Polarisationsebenen der beiden gebrochenen Strahlen stets nahezu senkrecht auf einander stehen.

185. Experimentelle Verification der Gesetze der Doppelbrechung in den zweiachsigen Krystallen.

Fresnel war der Erste, welcher zeigte, dass in den zweiachsigen Krystallen keiner der beiden gebrochenen Strahlen das Gesetz des Cartesius befolgt, oder mit anderen Worten, dass es in den zweiachsigen Krystallen keinen ordentlichen Strahl giebt [1]).

Das erste Verfahren, dessen er sich bediente, gründet sich auf die Verschiebung der Interferenzstreifen bei Interposition einer durchsichtigen Platte (23). Er schnitt zwei Platten aus Topas in verschiedenen Richtungen von genau gleicher Dicke. Indem er die beiden Platten vor die beiden Oeffnungen der Vorrichtung zu Young's Zweispaltenversuch brachte, fand er fast stets eine merkliche Verschiebung der Interferenzfransen.

[1]) *Ann. de phys. et de chim.* (2), t. XX, p. 337.

Hierdurch ist bewiesen, dass die beiden gebrochenen Strahlen den Krystall mit Geschwindigkeiten durchsetzen, welche von der Richtung der Strahlen im Krystalle abhängig sind.

Auf Arago's Anregung wendete Fresnel noch die folgende Methode an. Man schneidet aus Topas planparallele Platten in verschiedenen Richtungen, klebt dieselben aufeinander und giebt der so entstehenden Säule die Gestalt eines Prismas. Blickt man durch dasselbe nach einer der brechenden Kante parallelen Geraden, so überzeugt man sich, dass bei keinem der beiden Bilder der Geraden die den einzelnen Platten entsprechenden Theile eine gerade Linie bilden, wie dies der Fall sein müsste, wenn einer der beiden Strahlen das Gesetz des Cartesius befolgen würde.

Rudberg[1]) maass die drei Hauptbrechungsexponenten des Arragonits und des farblosen Topases für die Hauptlinien des Spectrums und fand, dass in diesen Krystallen einer der beiden gebrochenen Strahlen stets das Gesetz des Cartesius befolgt, wenn die Einfallsebene einer der Hauptschnitte ist. Er schnitt zu diesem Zwecke Prismen parallel zu den Elasticitätsachsen. Heusser[2]) bestimmte nach demselben Verfahren die optischen Constanten einer Anzahl zweiachsiger Krystalle.

R. T. Glazebrook stellte Messungen an Arragonitkrystallen an[3]). Um die Fresnel'schen Gesetze zu prüfen, wurden aus zwei verschiedenen Arragonitkrystallen Prismen geschliffen und zunächst für die D-Linie die Hauptbrechungsexponenten gemessen. Es ergab sich mittelst des ersten Krystalls:

$$n_a = 1{,}68580 \qquad n_b = 1{,}68125 \qquad n_c = 1{,}53013$$

und mittelst des zweiten:

$$n_a = 1{,}68560 \qquad n_b = 1{,}68115 \qquad n_c = 1{,}53013.$$

Construirt man nun die Wellenfläche einerseits mittelst dieser Zahlen und der Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche, andererseits mittelst der directen von Glazebrook angestellten Messungen über die Fortpflanzung des Lichtes im Krystalle in verschiedenen Richtungen, so zeigt sich eine gute Uebereinstimmung.

V. v. Lang[4]) bestimmte die drei Hauptbrechungsexponenten des Gypses für verschiedene Fraunhofer'sche Linien. Für den Winkel der beiden optischen Achsen (186) ergaben sich aus der Beobachtung die Werthe A, neben welche die aus den gemessenen Hauptbrechungsexponenten nach den Fresnel'schen Gesetzen berechneten Werthe A' gesetzt sind.

---

[1]) *Pogg.* XVII, 1. [2]) *Pogg.* LXXXVII, 454. [3]) R. T. Glazebrook. Eine experimentelle Untersuchung über die normalen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen in einem zweiachsigen Krystall nebst einer Vergleichung der Resultate mit der Theorie. *Proc. Roy. Soc.* XXVII, 496. [4]) Grösse und Lage der optischen Elasticitätsachsen beim Gyps. Sitzb. d. Wien. Akad. 1877.

Linie	B	C	D	E	F	G	
A	57° 18′	57° 42′	58° 8′	58° 6′	37° 28′	56° 13′	Temp. = 18°
A′	54° 1′	54° 19′	54° 50′	55° 3′	54° 44′	52° 54′	
Differenz	3° 17′	3° 24′	3° 18′	3° 3′	2° 44′	3° 19′	

Die Uebereinstimmung dieser Zahlen kann befriedigend genannt werden, da die Differenzen ziemlich gleich gross sind; was aber den absoluten Werth derselben betrifft, so konnte eine grössere Uebereinstimmung nicht erwartet werden, da die Temperatur der entsprechenden Beobachtungsreihen nicht die gleiche war. Den oben angegebenen Zahlen ist die merkwürdige Thatsache zu entnehmen, dass der Winkel der optischen Achsen im Gypse für die Linie *D* ein Maximum hat.

Senarmont studirte wie Wollaston die Gesetze der Doppelbrechung mittelst der Erscheinungen der totalen Reflexion indem er eine Begrenzungsfläche des Krystalls mit einer brechbareren Flüssigkeit in Berührung brachte [1]). Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch erwies sich bei den verschiedensten Anordnungen als eine hinreichende.

Eine besondere Bestätigung erfuhr die Theorie Fresnel's durch die Erscheinungen der inneren und der äusseren conischen Refraction, welche von Hamilton [2]) berechnet und von Lloyd [3]) experimentell dargestellt wurden.

Schliesslich hat W. Kohlrausch [4]) in Fortsetzung einer früheren Arbeit (180) gezeigt, dass auch für die optisch zweiachsigen Krystalle die Fresnel'schen Gesetze der Lichtbewegung in Krystallen mit der Beobachtung durchweg im Einklang stehen.

186. Optische Achsen.

Die tangirenden Ebenen der Wellenfläche berühren diese im Allgemeinen in einem einzigen Punkte. Allein es giebt vier tangirende Ebenen, von welchen jede einzelne die Wellenfläche längs einer Curve berührt.

Betrachten wir den Schnitt der Wellenfläche mit der Ebene der xz, so zerfällt derselbe in einen Kreis

$$x^2 + z^2 = b^2$$

und eine Ellipse

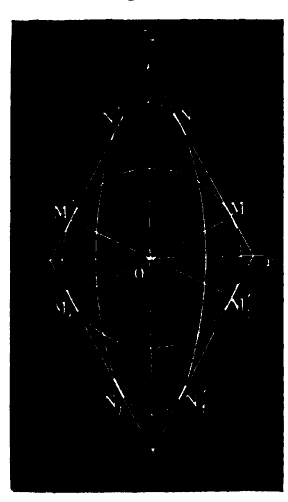
$$a^2 x^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2,$$

1) *C. R.* XLII, 65. — *Journ. de Liouville,* 1856, p. 305. 2) *Trans. of Ir. Acad.* XV, 69; XVI, 1, 94. 3) *Trans. of Jr. Acad.* XVII, 3. 4) Wied. Ann. 1879.

welche sich in vier Punkten schneiden (Fig. 116). Die beiden Curven haben die vier gemeinschaftlichen Tangenten MN, $M'N'$, M_1N_1, M_1', N_1'.

Um die Gleichungen dieser Tangenten zu erhalten, bezeichnen wir durch m den Coëfficienten der Neigung gegen die x-Achse einer Tangente des Kreises und durch m' jenen einer Tangente der Ellipse. Die Gleichungen einer Tangente des Kreises und einer solchen der Ellipse sind dann

Fig. 116.



$$z = mx \pm b\sqrt{1 + m^2}$$

und

$$z = m'x \pm \sqrt{c^2m'^2 + a^2}.$$

Für die gemeinschaftlichen Tangenten hat man $m = m'$ und

$$b^2(1 + m^2) = c^2m^2 + a^2$$

oder

$$m = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Die vier gemeinschaftlichen Tangenten sind also gegeben durch die Gleichung

$$z = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}\, x \pm b\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die zwei Geraden MM_1 und $M'M'_1$, welche auf den Tangenten senkrecht stehen, entsprechen der Gleichung

$$z = -\frac{1}{m}x = \pm\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sie stehen folglich auch senkrecht auf den Kreisschnitten des Fresnel'schen Elasticitätsellipsoides, dessen Gleichung ist:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

Aus den Eigenschaften dieses Ellipsoides folgt nun, dass jede ebene Wellenfläche, welche auf der Ebene der xz senkrecht steht und einer der vier gemeinschaftlichen Tangenten parallel ist, sich mit einer von der Schwingungsrichtung unabhängigen Geschwindigkeit fortpflanzt, und dass ihr folglich keine bestimmte Polarisation zukommt. Die Geraden MM_1 und $M'M'_1$ verhalten sich also analog der optischen Achse der einachsigen Krystalle und heissen demgemäss ebenfalls die optischen Achsen des Krystalls.

Die vier Ebenen, welche auf der Ebene der xz senkrecht stehen und durch die vier gemeinschaftlichen Tangenten gehen, berühren die Wellenfläche in je zwei Punkten. Allein es lässt sich zeigen, dass jede dieser Ebenen die Wellenfläche nicht nur in diesen zwei Punkten, son-

dern längs einer Curve berührt. Um diese Berührungscurve zu finden, schreiben wir die Gleichung der Wellenfläche:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Für jeden Punkt der Wellenfläche, dessen tangirende Ebene auf der Ebene der xz senkrecht steht, hat man

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

oder

$$y(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + b^2y(x^2 + y^2 + z^2) - b^2(a^2 + c^2)\, y = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$y = 0$$

und

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2b^2y^2 + (c^2 + b^2)z^2 - b^2(a^2 + c^2) = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt jene Berührungspunkte, welche in der xz-Ebene liegen. Die zweite stellt ein Ellipsoid dar. Eliminirt man y^2 aus dieser Gleichung und der Gleichung der Wellenfläche, so erhält man die Gleichung der Projection des Schnittes dieses Ellipsoides und der Wellenfläche auf die xz-Ebene. Man erhält die Gleichung

$$z + \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x + b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\Bigg)\Bigg(z - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x + b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\Bigg)$$
$$\times\Bigg(z + \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x - b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\Bigg)\Bigg(z - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x - b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\Bigg) = 0$$

welche nichts anderes vorstellt, als das System der vier gemeinschaftlichen Tangenten. Es folgt, dass die vier Ebenen, welche durch je eine dieser vier Tangenten gehen und auf der xz-Ebene senkrecht stehen, die Wellenfläche längs den Curven berühren, in welchen diese vier Ebenen von dem durch die Gleichung (3) gegebenen Ellipsoide geschnitten werden, und man sieht leicht, dass diese Curven Kreisschnitte dieses Ellipsoides sind. Es giebt also vier Ebenen, welche die Wellenfläche längs Kreislinien berühren, deren Ebenen auf den optischen Achsen senkrecht stehen. Diese Ebenen sind gegeben durch die Gleichung

$$z = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x \pm b\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}$$

und sind singuläre Tagentialebenen der Wellenfläche.

Also:

Es giebt vier Ebenen (singuläre Tangentialebenen), welche mit der Achse der mittleren Elasticität (y-Achse) parallel sind und die Wellenfläche in Kreisen berühren. Diese vier Ebenen sind parallel mit den zwei Kreisschnitten des Elasticitätsellipsoides und ihre durch den Mittel-

punkt gehenden Normalen schneiden die Berührungskreise und sind optische Achsen des Krystalls.

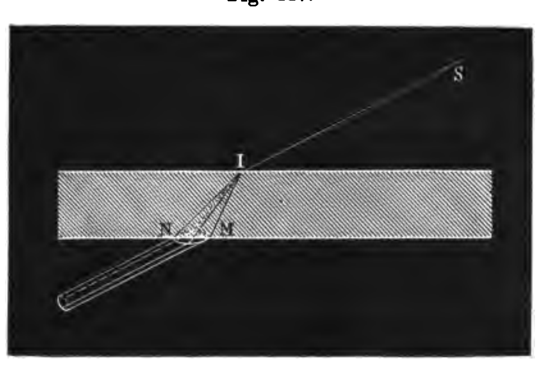
In der Figur 116 sind also MN, $M'N'$, $M_1 N_1$, $M_1' N_1'$ Durchmesser der vier Berührungskreise, deren Ebenen auf der Ebene der Figur senkrecht stehen.

187. Innere conische und cylindrische Refraction.

Nehmen wir nun an, ein Lichtstrahl trete in ein zweiachsiges Mittel, und vergegenwärtigen wir uns die Huyghens'sche Construction, durch welche die Richtung der gebrochenen Strahlen bestimmt wird. Fällt die Tangentialebene, welche nach dieser Construction an die Wellenfläche des zweiten Mittels gelegt wird, mit einer der vier singulären Tangentialebenen zusammen, so erhält man unendlich viele gebrochene Strahlen, welche eine Kegelfläche zweiten Grades bilden. Einer der gebrochenen Strahlen liegt stets parallel einer der optischen Achsen und steht senkrecht auf der kreisförmigen Basis der Kegelfläche. Diese Zerlegung eines einfallenden Strahles in ein gebrochenes conisches Strahlenbüschel bildet das Phänomen der inneren conischen Refraction, und die beiden optischen Achsen werden auch die Achsen der inneren conischen Refraction genannt.

Sind die beiden Begrenzungsflächen des doppeltbrechenden Mittels unter einander parallel, so sind, wie sich leicht aus der Huyghens'schen Construction und der Gestalt der Wellenfläche ergiebt, sämmtliche an der zweiten Begrenzungsfläche austretenden Strahlen parallel dem einfallenden Strahle und bilden folglich eine Cylinderfläche zweiten Grades (Fig. 117).

Fig. 117.



Man findet die Schwingungsrichtung auf jedem der gebrochenen Strahlen, indem man den Strahl auf die Tangentialebene der Wellenfläche projicirt, d. i. auf die kreisförmige Basis der Kegelfläche,

welche von den gebrochenen Strahlen gebildet wird. Ist (Fig. 118) $MM'M''$ diese kreisförmige Basis, M der Punkt, in welchem der auf der Ebene der kreisförmigen Basis senkrecht stehende, mit der optischen Achse parallele Strahl die Peripherie des Kreises trifft, so fällt die Schwingungsrichtung eines durch einen beliebigen Punkt M' gehenden Strahles mit der Projection desselben auf die Ebene des Kreises zusammen, d. i. mit den Geraden MM'. Es folgt, dass zwei Strahlen, welche die Peripherie des Kreises in zwei diametral einander gegenüber liegenden Punkten treffen, rechtwinkelig gegen einander polarisirt sind.

Fig. 118.

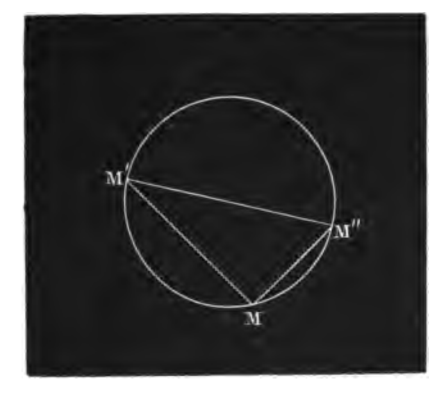


Fig. 119 zeigt die Schwingungsrichtungen in den verschiedenen Punkten des Berührungskreises.

Alle diese Consequenzen der Theorie wurden auf Einladung Hamilton's von Lloyd experimentell geprüft und bestätigt gefunden. Lloyd wählte für seine Versuche den Arragonit, theils weil der Theorie nach bei diesem Krystalle der Oeffnungswinkel des Kegels grösser sein sollte, als bei den meisten anderen, theils weil die drei Hauptbrechungsexponenten desselben von Rudberg mit grosser Sorgfalt gemessen worden waren.

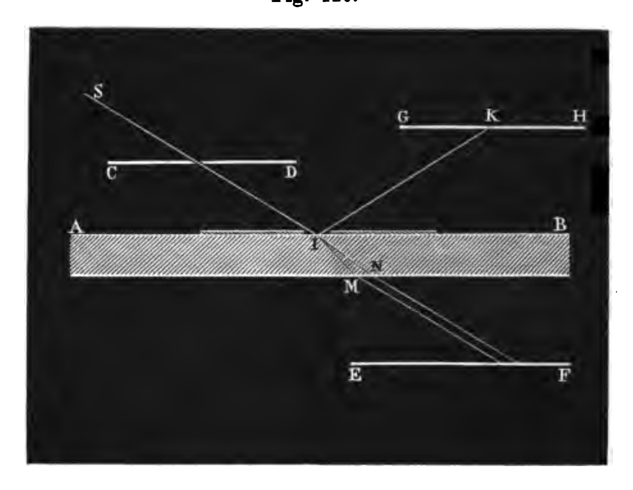
Fig. 119.



Er schnitt eine Platte so aus diesem Krystall, dass die beiden Begrenzungsflächen auf der Richtung der Mittellinie senkrecht standen, was mittelst der Erscheinungen der chromatischen Polarisation geprüft wurde, und liess auf dieselbe ein dünnes Strahlenbündel SI (Fig. 120 a. f. S.) fallen, welches erst durch die Oeffnung eines Schirmes CD und dann durch eine sehr kleine Oeffnung I eines mit der Platte fest verbundenen Metallblättchens trat. Der Incidenzwinkel konnte durch Verschiebung der Platte AB in einer zu ihren

Begrenzungsflächen parallelen Richtung variirt werden. Die austretenden Strahlen wurden mittelst eines Schirmes *EF* aufgefangen und pro-

Fig. 120.



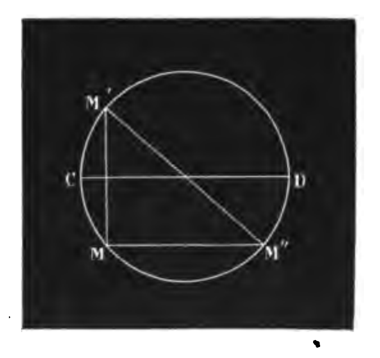
jicirten sich im Allgemeinen als zwei leuchtende Punkte. Bei einem bestimmten Incidenzwinkel jedoch erweiterten sich die beiden Punkte, um sich zu einem leuchtenden Ringe zu verbinden. Dieser Ring behielt in Uebereinstimmung mit der Theorie dieselbe Grösse für alle Distanzen des Schirmes *EF*, und zeigte sich um so grösser, je dicker die Platte genommen wurde.

Um den Incidenzwinkel zu messen, fing Lloyd den an der ersten Begrenzungsfläche reflectirten Strahl mittelst eines Schirmes *GH* auf und legte den Punkt *K* fest, in welchem der Schirm vom reflectirten Strahlenbündel getroffen wurde. Er entfernte hierauf den Krystall und maass mittelst eines geeignet aufgestellten Theodoliten den Winkel *SIK*, welcher doppelt so gross ist, als der Incidenzwinkel. Er fand für den der inneren conischen Refraction entsprechenden Incidenzwinkel $15^0\ 40'$, während die Rechnung $15^0\ 19'$ giebt. Er maass gleicherweise die Oeffnung des Conus *MIN*, welcher von den gebrochenen Strahlen im Innern des Krystalls gebildet wird und fand $1^0\ 50'$, während die Rechnung $1^0\ 55'$ giebt.

Um das Gesetz der Polarisation der austretenden Strahlen experimentell festzustellen, genügt es, das austretende cylindrische Strahlenbündel durch ein Nicol treten zu lassen. Man sieht dann, dass von zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen des Ringes die eine vollständig dunkel erscheint, während die andere ein Maximum der Helligkeit zeigt, und dass die Helligkeit von diesem Punkte aus zu beiden Seiten bis zum gegenüber liegenden Punkte continuirlich abnimmt. Diese Erscheinung ist leicht mit dem theoretisch gefundenen Gesetze in

Einklang zu bringen. Sei (Fig. 121) MCD der leuchtende Ring und M der Punkt, durch welchen jener Strahl geht, der im Innern des Krystalls der optischen Achse parallel ist. Ist CD die Richtung des Hauptschnittes des Analyseurs und zieht man MM' und MM'' senkrecht und parallel zu CD, so ist ersichtlich, dass der durch M' gehende Strahl senkrecht, und der durch M'' gehende parallel zum Hauptschnitte schwingt. Es muss also der Strahl M' ausgelöscht erscheinen, während der Strahl M'' ein Maximum der Intensität zeigt. Dieselben Erscheinungen zeigen sich, wenn man das Licht vor seinem Eintritte in den Krystall polarisirt. Die sich auf die Polarisation der austretenden Strahlen beziehenden Experimente rühren hauptsächlich von Beer her[1]).

Fig. 121.



188. Aeussere conische Refraction.

Verbinden wir (Fig. 122) die vier singulären Punkte I, I', I_1, I'_1 durch die Geraden II_1 und $I'I_1'$, so haben wir zwei Richtungen, welche die Achsen der äusseren conischen Refraction heissen.

Fig. 122.



Die Coordinaten ξ, η, ζ der singulären Punkte, in welchen sich der Kreis

$$x^2 + z^2 = b^2$$

und die Ellipse

$$a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2$$

schneiden, sind:

$$\xi = \pm c\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \eta = 0,$$

$$\zeta = \pm a\sqrt{\frac{b^2 - c^3}{a^2 - c^2}},$$

und die Gleichungen der Geraden II_1 und $I'I_1'$:

1) Pogg. LXXXV, 67.

$$z = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da das Verhältniss $\frac{a}{c}$ stets nahe gleich 1 ist, fallen diese Geraden nahezu mit den optischen Achsen oder den Achsen der inneren conischen Refraction zusammen.

Aus der Gleichung (1) geht überdies hervor, dass, wie die Achsen der inneren conischen Refraction auf den Kreisschnitten des Elasticitätsellipsoides senkrecht stehen, so die Achsen der äusseren conischen Refraction auf den Kreisschnitten des zweiten Ellipsoides, dessen Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Durch jeden der singulären Punkte lassen sich zwei Tangenten an den Kreis und die Ellipse legen, und jene zwei Ebenen, welche durch diese Tangenten gehen und auf der xz - Ebene senkrecht stehen, sind Tangentialebenen der Wellenfläche. Es soll nun gezeigt werden, dass es für jeden der singulären Punkte der Wellenfläche nicht nur zwei, sondern unendlich viele tangirende Ebenen giebt, welche einen Conus bilden.

Sei

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Wellenfläche und

$$A(x - \xi) + B(y - \eta) + C(z - \zeta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den singulären Punkt I geht. Diese Ebene schneidet die Wellenfläche in einer Curve, deren Projection auf die xz - Ebene ist:

$$F\left(x, -\frac{Ax + Cz - A\xi - B\eta - C\zeta}{B}, z\right) = 0$$

oder

$$u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Tangente dieser Projection im Punkte x', z' ist:

$$\frac{du}{dx}(x' - x) + \frac{du}{dz}(z' - z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Andererseits hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{dF}{dx} - \frac{A}{B}\frac{dF}{dy} \\ \frac{du}{dz} &= \frac{dF}{dz} - \frac{C}{B}\frac{dF}{dy} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Setzt man in $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ für x, y, z die den singulären Punkten entsprechenden Werthe ξ, η, ζ, so erhält man

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0$$

und

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0.$$

Die Gleichung (4) nimmt also, wenn man den Berührungspunkt mit dem singulären Punkte zusammenfallen lässt, die Form 0 = 0 an. Dies beweist, dass ein ebener durch einen singulären Punkt gehender Schnitt der Wellenfläche in diesem Punkte zwei Tangenten hat. Zieht man also auf der Wellenfläche durch einen singulären Punkt beliebige Curven, und legt man durch den singulären Punkt Tangenten an diese Curven, so bilden die Tangenten eine Kegelfläche, deren Tangentialebenen zugleich die Tangentialebenen des singulären Punktes der Wellenfläche sind. Die vom Centrum auf diese Ebenen gefällten Normalen bilden eine zweite Kegelfläche, welche, wie wir nun zeigen wollen, vom zweiten Grade ist.

Bemerken wir zu diesem Zwecke, dass der Richtungscoëfficient $\frac{dz}{dx}$ der Tangente der Curve (3) im Allgemeinen gegeben ist durch

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}.$$

Für den singulären Punkt wird dieser Ausdruck $\frac{0}{0}$, und sein wahrer Werth ist:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dx\,dz}\frac{dz}{dx}}{\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dx\,dz}}$$

oder

$$\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung reell und von einander verschieden, so schneidet die Ebene (2) die Wellenfläche, und der Schnitt hat im singulären Punkte zwei Tangenten, nämlich die beiden Geraden, in welchen die Ebene den Berührungskegel schneidet. Sind die beiden Wurzeln der Gleichung (6) unter einander gleich, oder ist

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

so ist der singuläre Punkt für die Projection der Schnittcurve und folglich für diese selbst ein Rückkehrpunkt. Diese Curve hat dann im sin-

gulären Punkte eine einzige Tangente, und die schneidende Ebene ist in diesem Falle eine Tangente des Berührungskegels. Ertheilt man also in der Gleichung (7) den Coordinaten x, y, z die dem singulären Punkte entsprechenden Werthe, so erhält man zwischen den Parametern A, B, C der Schnittebene eine Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass diese Ebene den Berührungskegel tangirt.

Um diese Rechnung durchzuführen, differenziren wir die Gleichungen (5) und erhalten

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{A}{B}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{A^2}{B^2}\frac{d^2F}{dy^2},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2F}{dz^2} - 2\frac{C}{B}\frac{d^2F}{dy\,dz} + \frac{C^2}{B^2}\frac{d^2F}{dy^2},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = \frac{d^2F}{dx\,dz} - \frac{C}{B}\frac{d^2F}{dx\,dy} - \frac{A}{B}\frac{d^2F}{dy\,dz} + \frac{AC}{B^2}\frac{d^2F}{dy^2}.$$

Wir suchen nun die Werthe, welche die zweiten Derivirten der Function F annehmen, wenn man x, y, z durch ξ, η, ζ ersetzt. Wir erhalten:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 8a^2c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \qquad \frac{d^2F}{dy^2} = -(a^2-b^2)(b^2-c^2),$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} = 8a^2c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \qquad \frac{d^2F}{dy\,dz} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dz} = 4ac\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}, \qquad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 0,$$

und hieraus

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 8a^2c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2} - \frac{A^2}{B^2}(a^2-b^2)(b^2-c^2),$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 8a^2c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} - \frac{C^2}{B^2}(a^2-b^2)(b^2-c^2),$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz} = 4ac\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} - \frac{AC}{B^2}(a^2-b^2)(b^2-c^2).$$

Setzen wir die letzteren Werthe nach (7), so wird

$$a^2-c^2+(b^2-c^2)\frac{A^2}{B^2}+(a^2-b^2)\frac{C^2}{B^2}-\frac{a^2+c^2}{ac}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\frac{AC}{B^2}=0 \quad (8)$$

Wir haben andererseits

$$a^2-b^2 = \frac{(a^2-c^2)\xi^2}{c^2}, \qquad b^2-c^2 = \frac{(a^2-c^2)\zeta^2}{a^2}$$

und folglich nimmt die Gleichung (8) die Form an

$$a^2-c^2+\frac{(a^2-c^2)A^2\zeta^2}{a^2B^2}+\frac{(a^2-c^2)C^2\xi^2}{c^2B^2}-\frac{(a^2-c^2)(a^2+c^2)\xi\zeta AC}{a^2c^2B^2} = 0$$

oder

$$a^2c^2B^2 + c^2A^2\zeta^2 + a^2C^2\xi^2 - (a^2 + c^2)\xi\zeta AC = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese letzte Gleichung drückt die Bedingung dafür aus, dass die Ebene (2) den Berührungskegel tangirt.

Seien nun x', y', z' die Coordinaten des Fusspunktes eines vom Centrum auf eine der tangirenden Ebenen gefällten Perpendikels. Wir haben

$$A = \frac{Cx'}{z'}, \qquad B = \frac{Cy'}{z'}.$$

Setzt man dies nach (9), so wird diese Gleichung

$$a^2c^2y'^2 + c^2\zeta^2x'^2 + a^2\xi^2z'^2 - (a^2 + c^2)\xi\zeta x'z' = 0 \quad . \quad . \quad (10)$$

Da der Punkt I, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, auf der Ellipse liegt, welche einen Theil des Schnittes der Wellenfläche mit der xz-Ebene bildet, hat man:

$$a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 = a^2c^2,$$

und die Gleichung (10) kann auf die Form gebracht werden:

$$a^2c^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (a^2 + c^2)\xi\zeta x'z' + a^2\xi^2x'^2 + c^2\zeta^2z'^2$$

oder

$$a^2c^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (\xi x' + \zeta z')(a^2\xi x' + c^2\zeta z') \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Fusspunkte der vom Centrum auf die den Berührungskegel tangirenden Ebenen gefällten Perpendikel finden sich andererseits auf einer Kugelfläche, deren Durchmesser OI ist und deren Gleichung

$$\left(x' - \frac{\xi}{2}\right)^2 + y'^2 + \left(z' - \frac{\zeta}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

sich in Folge der Relation

$$\xi^2 + \zeta^2 = b^2$$

auf

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi x' + \zeta z' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

reducirt.

Aus den Gleichungen (11) und (12) ergiebt sich durch Division:

$$a^2\xi x' + c^2\zeta z' = a^2c^2,$$

die Gleichung einer Ebene, welche auf der xz-Ebene senkrecht steht.

Die Fusspunkte der Perpendikel, welche vom Centrum auf die tangirenden Ebenen des Berührungskegels gefällt werden, finden sich also gleichzeitig auf einer Kugel und auf einer Ebene, liegen also auf einer Kreislinie. Diese Kreislinie geht ersichtlicher Weise durch den Punkt I und durch den Fusspunkt P eines Perpendikels vom Centrum auf die Tangente IT' der Ellipse.

Wir sehen also schliesslich, dass die Perpendikel vom Centrum auf die den Berührungskegel tangirenden Ebenen eine Kegelfläche zweiten

Grades bilden, welche durch einen Kreis geht, dessen Ebene die xz-Ebene längs der durch den singulären Punkt gehenden Tangente der Ellipse senkrecht schneidet, und dessen Durchmesser das Stück IP dieser Tangente ist, und schliessen hieraus, dass der Berührungskegel selbst ein Kegel zweiten Grades ist.

Es folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dass sich längs einem Radiusvector der Wellenfläche, welcher durch einen singulären Punkt geht, eine unendliche Menge Strahlen mit ein und derselben Geschwindigkeit fortpflanzen können, welchen eine unendliche Menge Planwellen entspricht, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen und auf den Seiten eines Kegels zweiten Grades senkrecht stehen.

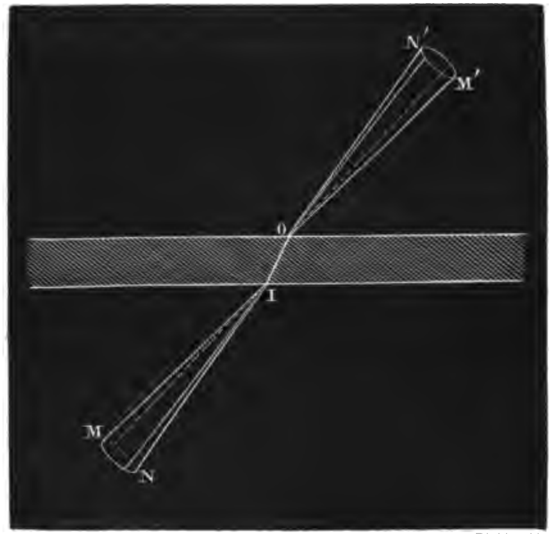
Um die Schwingungsrichtung eines sich längs OI fortpflanzenden Strahles zu erhalten, projicirt man den Strahl auf die zugehörige Planwelle, d. i. man zieht die Gerade zwischen dem Punkte I und dem Fusspunkte der vom Centrum auf die Planwelle gefällten Normale.

Zieht man also in dem Kreise, dessen Durchmesser IP ist und dessen Ebene auf der xz-Ebene senkrecht steht, alle durch I gehenden Sehnen, so hat man die Schwingungsrichtungen aller sich längs OI fortpflanzenden Strahlen.

189. Die Experimente von Lloyd.

Pflanzt sich in einem zweiachsigen Krystalle ein Strahl OI (Fig. 123) parallel einer der Achse der äusseren conischen Refraction fort, so er-

Fig. 123.

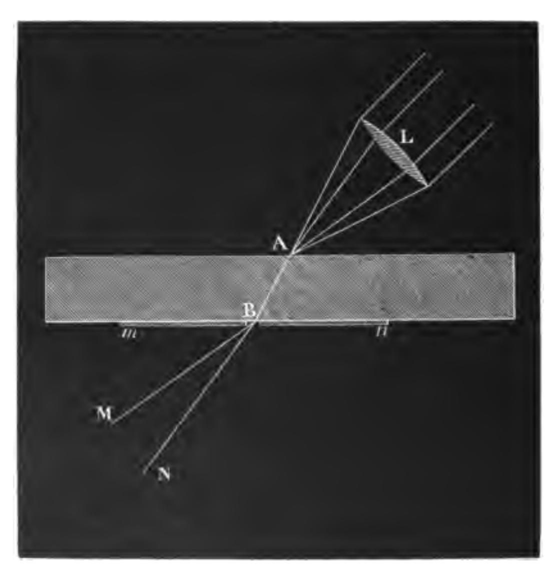


giebt sich aus der Huyghens'schen Construction, da dem Durchschnittspunkte des Strahles *OI* mit der Wellenfläche des Krystalles eine unendliche Menge tangirender Ebenen entspricht, auch eine unendliche Menge austretender Strahlen, welche eine Kegelfläche *MIN* bilden. Diese Fläche ist, wie sich durch Rechnung zeigen lässt, vom vierten Grade, und nähert sich bei wenig energischer Doppelbrechung einer Kegelfläche zweiten Grades.

Ist der Krystall durch zwei parallele Ebenen begrenzt, so kann der Strahl *OI* angesehen werden als hervorgehend aus einer unendlichen Menge einfallender Strahlen, welche eine Kegelfläche *M'ON'* bilden, deren Seiten beziehungsweise den Seiten der Kegelfläche *MIN* parallel sind. Es ist jedoch zu bemerken, dass jedem der einfallenden Strahlen zwei gebrochene Strahlen entsprechen, von welchen der eine stets auf *OI* fällt, während der andere irgendwie gerichtet ist, so dass der einfallenden Strahlenkegelfläche *M'ON'* im Krystalle eine Kegelfläche gebrochener Strahlen entspricht und überdies ein einziger Strahl *OI*, welcher mit unendlich vielen anderen Strahlen *OI* zusammenfällt.

Lloyd hat die äussere conische Refraction ebenfalls am Arragonit experimentell dargestellt. Er sammelte mittelst einer Linse *L* (Fig. 124)

Fig. 124.



die Sonnenstrahlen in einem Punkte *A* der ersten Begrenzungsfläche einer Arragonitplatte, deren zweite Begrenzungsfläche durch ein Metallblatt, *m n*, bedeckt war, in welchem sich eine sehr kleine Oeffnung *B* befand.

Das aus der Oeffnung *B* tretende Strahlenbüschel nahm bei einer bestimmten Lage dieser Oeffnung die Gestalt einer Kegelfläche an,

welche sich auf einen Schirm als Lichtring projicirte. Die Dimensionen des Ringes vergrösserten sich mit wachsender Entfernung des Schirmes vom Krystalle. Die austretende Kegelfläche unterschied sich wenig von einer Umdrehungsfläche. Der Oeffnungswinkel derselben betrug $2^0\ 59'$, während die Theorie $3^0\ 0'\ 58''$ ergab. Die äussere conische Refraction trat ein, als der Incidenzwinkel der Achse des einfallenden Strahlenkegels $15^0\ 58'$ betrug, während die Rechnung $15^0\ 25'\ 8''$ ergab.

Die Strahlen des austretenden Conus sind in verschiedenen Ebenen polarisirt. Ist IM (Fig. 123) der Strahl, welchen man erhält, wenn man an die Wellenfläche eine tangirende Ebene senkrecht zu OI legt, und IN ein beliebiger austretender Strahl, so liegt die Schwingungsrichtung dieses Strahles in der Ebene, welche durch die beiden Strahlen IN und IM gelegt werden kann. Dieses Gesetz findet man experimentell bestätigt, wenn man den austretenden Conus mittelst eines Analyseurs untersucht.

190. Verschiedene Achsensysteme.

Wir haben bei den zweiachsigen Krystallen drei Achsensysteme unterschieden: die drei Achsen der Elasticität, die zwei Achsen der inneren und die zwei Achsen der äusseren conischen Refraction.

Wir haben andererseits gesehen, dass bei den einachsigen Krystallen die optischen Achsen die folgenden drei wesentlichen Eigenschaften besitzen:

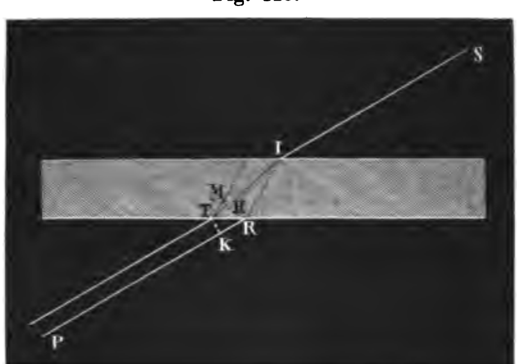
1. Jede durch die Achse gelegte Ebene ist eine Symmetrieebene des Krystalls.
2. Ein einfallender Strahl wird längs der optischen Achse einfach gebrochen und tritt ebenso aus.
3. Eine zur Achse senkrechte Planwelle pflanzt sich mit einer constanten, von ihrer Polarisation unabhängigen, Geschwindigkeit fort.

Bei den zweiachsigen Krystallen besitzt keine einzige Richtung gleichzeitig sämmtliche der aufgezählten Eigenschaften. Die Elasticitätsachsen und die Achsen der äusseren conischen Refraction besitzen keine einzige dieser Eigenschaften. Obzwar sich parallel jeder der Elasticitätsachsen zwei von demselben einfallenden Strahle herrührenden Strahlen fortpflanzen können, so kommt denselben doch verschiedene Geschwindigkeit zu und sie trennen sich folglich beim Austritte, wenn die Austrittsfläche gegen die Eintrittsfläche geneigt ist. Längs einer Achse der äusseren conischen Refraction pflanzt sich zwar eine unendliche Menge Strahlen mit derselben Geschwindigkeit fort, allein diese entsprechen verschiedenen einfallenden Strahlen und zeigen beim Austritte Gangunterschiede.

Die Achsen der inneren conischen Refraction haben wenigstens dies mit der einzigen Achse der einachsigen Krystalle gemein, dass eine zur Achse senkrechte Planwelle sich mit einem constanten, von der Polarisationsrichtung unabhängigen Geschwindigkeit fortpflanzt und dass die Strahlen, welche das austretende cylindrische Strahlenbündel bilden, keine Gangunterschiede zeigen.

Seien, um dies nachzuweisen (Fig. 125), *SI* der einfallende Strahl, *RIT* das conische von den gebrochenen Strahlen gebildete Büschel, *IR*

Fig. 125.



der zu einer der Achsen der inneren conischen Refraction parallele Strahl. Beschreiben wir vom Punkte *I* aus eine Wellenfläche, welche durch *R* geht und legen wir in diesem Punkte an dieselbe eine tangirende Ebene. Der Punkt *H*, in welchem diese Ebene den Strahl *IT* trifft, liegt auf der Wellenfläche und folglich haben die beiden Strahlen *SIR* und *SIH* dieselbe optische Länge. Legen wir nun durch *T* eine Ebene senkrecht zur Richtung der austretenden Strahlen. Von dieser Ebene *TK* aus entstehen keine neuen Gangunterschiede. Es genügt also zu zeigen, dass die Wege *HT* und *RK* in gleichen Zeiten zurückgelegt werden. Ziehen wir nun durch *T* die Gerade *TM* parallel zu *RI* und verlängern *RH* bis *M*, so steht *TM* auf der Ebene *RM* senkrecht. Jeder Strahl, welcher sich im Inneren des Krystalls in der Richtung einer der Achsen der inneren conischen Refraction fortpflanzt, und folglich auf der Wellenfläche senkrecht steht, befolgt das Gesetz des Cartesius und wird so gebrochen, dass die Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten proportional sind. Folglich sind die Längen *MT* und *RK* optisch gleichwerthig. Andererseits liegen *M* und *H* auf ein und derselben von *T* aus construirten Wellenfläche und folglich sind *HT* und *RK* ebenfalls optisch gleichwerthig.

Die innere conische Refraction bringt also ein Bündel parallel austretender Strahlen hervor, welche keine Gangunterschiede zeigen und welche folglich bei den Experimenten der chromatischen Polarisation

keine Farbenerscheinungen hervorbringen. Aus diesem Grunde hauptsächlich werden die **Achsen der inneren conischen Refraction** als **optische Achsen** bezeichnet.

191. Weitere Beziehungen.

Jeder Richtung normaler Fortpflanzung entsprechen zwei Systeme ebener Wellen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Diese beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0,$$

welche der Elasticitätsfläche angehört und in welcher l, m, n, r die Winkel der Richtung der normalen Fortpflanzung mit den Elasticitätsachsen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Planwelle bedeuten. Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$r^4 - [(b^2 + c^2)\cos^2 l + (a^2 + c^2)\cos^2 m + (a^2 + b^2)\cos^2 n]\, r^2$$
$$+ b^2 c^2 \cos^2 l + a^2 c^2 \cos^2 m + a^2 b^2 \cos^2 n = 0$$

und bezeichnet man ihre beiden Wurzeln durch r'^2, r''^2, so hat man

$$r'^2 + r''^2 = (b^2 + c^2)\cos^2 l + (a^2 + c^2)\cos^2 m + (a^2 + b^2)\cos^2 n \quad . \quad (1)$$
$$r'^2 r''^2 = b^2 c^2 \cos^2 l + a^2 c^2 \cos^2 m + a^2 b^2 \cos^2 n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Sind andererseits θ', θ'' die Winkel der Richtung normaler Fortpflanzung mit den optischen Achsen, D und $180^0 - D$ die Winkel der optischen Achsen mit der Achse x der grössten Elasticität, so hat man

$$\cos D = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \sin D = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$
$$\cos\theta' = \cos D \cos l + \sin D \cos n,$$
$$\cos\theta'' = -\cos D \cos l + \sin D \cos n,$$

woraus folgt

$$\cos l = \frac{\cos\theta' - \cos\theta''}{2\cos D} = \frac{\cos\theta' - \cos\theta''}{2}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

$$\cos n = \frac{\cos\theta' + \cos\theta''}{2\sin D} = \frac{\cos\theta' + \cos\theta''}{2}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}.$$

Setzt man diese Werthe von $\cos l$ und $\cos n$ nach (1) und (2) und bedenkt, dass $\cos^2 m = 1 - \cos^2 l - \cos^2 n$, so erhält man

$$r'^2 + r''^2 = a^2 + c^2 - \frac{(\cos\theta' - \cos\theta'')^2}{4}(a^2 - c^2) + \frac{(\cos\theta' + \cos\theta'')^2}{4}(a^2 - c^2)$$
$$= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos\theta' \cos\theta'',$$

$$r'^2 r''^2 = a^2c^2 - \frac{(a^2-c^2)c^2}{4}(\cos\theta' - \cos\theta'')^2 + \frac{(a^2-c^2)a^2}{4}(\cos\theta' + \cos\theta'')^2$$

$$= a^2c^2 + \frac{(a^2-c^2)^2}{4}(\cos^2\theta' + \cos^2\theta'') + \frac{(a^2-c^2)(a^2+c^2)}{2}\cos\theta'\cos\theta'',$$

also

$$(r'^2 - r''^2)^2 = (r'^2 + r''^2)^2 - 4r'^2r''^2$$
$$= (a^2 + c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2\cos^2\theta'\cos^2\theta'' - 4a^2c^2$$
$$- (a^2 - c^2)^2(\cos^2\theta' + \cos^2\theta'')$$
$$= (a^2 - c^2)^2 (1 - \cos^2\theta') (1 - \cos^2\theta'')$$
$$= (a^2 - c^2)^2 \sin^2\theta' \sin^2\theta''$$

und schliesslich

$$r'^2 - r''^2 = (a^2 - c^2)\sin\theta'\sin\theta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung wurde zuerst von Sylvester gefunden [1]).

Durch Addition und Subtraction der für $r'^2 + r''^2$ und $r'^2 - r''^2$ gefundenen Ausdrücke ergiebt sich:

$$r_1^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\theta' - \theta'')$$

$$r_2^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\theta' - \theta'')$$

Man kann mittelst der optischen Achsen auch die beiden Schwingungsrichtungen bestimmen, welche einer bestimmten Richtung normaler Fortpflanzung entsprechen.

Diese Schwingungsrichtungen sind parallel den Achsen des Schnittes des Elasticitätsellipsoids mit einer zur Richtung der normalen Fortpflanzung senkrechten Ebene. Dieser elliptische Schnitt wird von beiden Kreisschnitten des Elasticitätsellipsoids längs zweier Durchmesser der Ellipse geschnitten, welche den Durchmessern der Kreise und folglich auch untereinander gleich und gegen die Achsen der Ellipse gleich geneigt sind. Die optischen Achsen stehen auf den Kreisschnitten senkrecht und projiciren sich folglich auf die Ebene des elliptischen Schnittes längs der Durchmesser, welche auf den erwähnten Durchmessern senkrecht stehen und folglich wie diese gegen die Achsen der Ellipse gleich geneigt sind. Diese Projectionen sind die Durchschnitte der Ebene der Ellipse mit den Ebenen, welche durch je eine der optischen Achsen und die Richtung der normalen Fortpflanzung gehen. Wir gelangen also zu dem folgenden Satze:

Die Ebenen, welche gleichzeitig eine bestimmte Richtung normaler Fortpflanzung und je eine der entsprechen-

[1]) Phil. Mag. 35, XI, 1837, p. 461, 537. — XII, 1838, p. 341, 73.

den Schwingungsrichtungen enthalten, halbiren die Winkel der Ebenen, welche dieselbe Richtung normaler Fortpflanzung und je eine der optischen Achsen (Achsen der inneren conischen Refraction) enthalten.

Dieser Satz wurde zuerst von Mac Cullagh gefunden[1]).

192. Fortsetzung.

Die Gleichung der Wellenfläche wird, wie wir gesehen haben (155), aus der Gleichung der Elasticitätsfläche erhalten, wenn man in der letzteren Gleichung für r^2, l, m, n, a^2, b^2, c^2 beziehungsweise $\frac{1}{\varrho^2}$, λ, μ, ν, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ setzt.

Ersetzt man gleicherweise in den Ausdrücken

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

welche die Cosinus der Winkel der optischen Achsen oder der Achsen der inneren conischen Refraction mit der x-Achse darstellen (188), a^2, b^2, c^2 bezüglich durch $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, so erhält man:

$$\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

die Cosinus der Winkel der Achsen der äusseren conischen Refraction mit der x-Achse.

Sind also ϱ' und ϱ'' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zweier sich in derselben Richtung fortpflanzender Strahlen, u' und u'' die Winkel zwischen dieser Richtung und den Achsen der äusseren conischen Refraction, so führt eine der vorhergehenden analoge Rechnung zu einer Relation, welche man unmittelbar dadurch erhält, dass man in (3) r', r'', θ', θ'' beziehungsweise durch $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$, u', u'' ersetzt. Hierdurch erhält man:

$$\frac{1}{\varrho'^2} - \frac{1}{\varrho''^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \sin u' \sin u''.$$

Da die Achsen der äusseren conischen Refraction auf den Kreisschnitten des zweiten Ellipsoids senkrecht stehen (188), so gelangt man (158) zu dem folgenden Satze:

---

[1]) *Tr. of the R. Irish* etc. XVI, 1830, part. II, p. 65.

Die beiden Ebenen, welche irgend einen Radiusvector der Wellenfläche und je eine diesem Radiusvector entsprechende Schwingungsrichtung enthalten, halbiren die Winkel der beiden Ebenen, welche denselben Radiusvector und je eine Achse der äusseren conischen Refraction enthalten.

Dieser Satz wurde schon von Biot aus seinen Versuchen abgeleitet, zum ersten Male aber von Sylvester bewiesen.

XIX.

Beugung in doppeltbrechenden Mitteln.

193. Verallgemeinerte Berechnung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen.

Wir haben bei der mathematischen Behandlung der Beugungsphänomene stets die Voraussetzung gemacht, dass die einfallenden sowohl als die gebeugten Strahlen sich in demselben isotropen Medium fortpflanzen, dass also die einfallenden und gebeugten Wellen sich mit constanter von ihrer Fortpflanzungsrichtung vollkommen unabhängiger Geschwindigkeit bewegen. Man kann ferner auch den Fall betrachten, dass sich die gebeugten Wellen mit einer anderen, jedoch immer noch constanten Geschwindigkeit fortpflanzen, als die einfallenden, dass also die beugende Oeffnung an der Grenze zweier isotroper Medien sich befindet [1]).

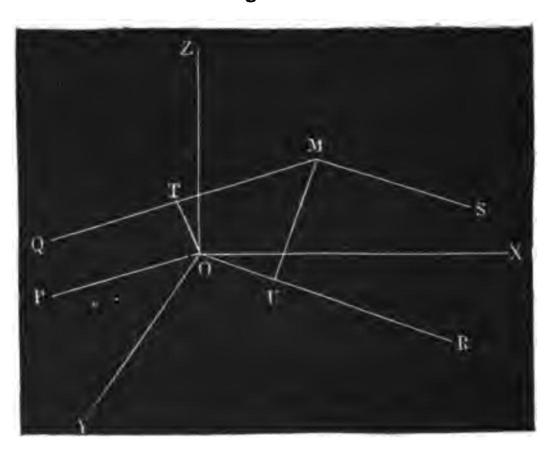
Auf ähnliche Weise lassen sich ferner die Beugungsphänomene mathematisch entwickeln, sobald die Voraussetzung gemacht wird, dass eines der beiden Medien oder beide doppeltbrechend sind [2]).

Um die betreffenden Formeln entwickeln zu können, wollen wir annehmen, dass die Ebene der beugenden Oeffnung (Fig. 126 a. f. S.) mit der XZ-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems zusammenfalle. Sowohl durch den Coordinatenmittelpunkt O, als auch durch einen den Coordinaten x, z entsprechenden Punkt M der Oeffnung legen wir gerade Linien PO, TM parallel mit der Normal der einfallenden ebenen Welle. Ebenso legen wir durch diese Punkte parallele Linien OR und MS in irgend einer Richtung (Beugungsrichtung). Denken wir uns eine Ebene senkrecht zu dieser Richtung, so werden in

[1]) L. Ditscheiner, Wien. Ber. L, 296. [2]) L. Ditscheiner, Wien. Ber. 1866.

einem gegebenen Momente von den einzelnen Punkten der Beugungsöffnung elementare Lichtbewegungen bis zu dieser Ebene gelangt sein und auf derselben im Allgemeinen verschiedene Phasen haben. Wir wollen eine solche zu OR senkrechte Ebene mit den auf ihr vorhandenen Bewegungszuständen die gebeugte Wellenebene nennen. Dieselbe pflanzt sich mit einer ihrer Richtung und Polarisation entsprechenden Geschwindigkeit parallel zu sich selbst fort. Die durch O gelegte einfallende und die durch M gelegte gebeugte Wellenebene schneiden die durch M und O gelegten entsprechenden Normalen in den Punkten T und U, so zwar, dass OT senkrecht auf MQ und MU senkrecht auf OR steht.

Fig. 126.



Bezeichnen wir mit l, m, n die Winkel, welche die Normale der einfallenden und mit l', m', n' diejenigen, welche die Normale der gebeugten Wellenebene mit den Coordinatenachsen OX, OY, OZ bildet, so ist

$$MT = x \cos l + z \cos n,$$
$$OU = x \cos l' + z \cos n'.$$

Bezeichnen wir ferner mit v und v' die Geschwindigkeiten der einfallenden und der gebeugten Wellenebene, welche Geschwindigkeiten wohl zu unterscheiden sind von jenen der einfallenden und der gebeugten Strahlen, so erscheint v als Function von l, m, n und v' als Function von l', m', n', und die Zeit, welche die einfallende Wellenebene braucht, um von jener Lage, in welcher sie durch O geht, in jene Lage zu gelangen, in welcher sie durch M geht, ist:

$$t_1 = \frac{x \cos l + z \cos n}{v}$$

und ebenso die Zeit, welche die gebeugte Wellenebene gleicherweise von O bis U braucht:

$$t_2 = \frac{x \cos l' + z \cos n'}{v'}.$$

Es ist somit auf der durch U gehenden gebeugten Wellenebene die Zeitdifferenz zwischen den Bewegungen in M und U:

$$t' = \frac{x \cos l + z \cos n}{v} - \frac{x \cos l' + z \cos n'}{v'}$$

$$= x\left(\frac{\cos l}{v} - \frac{\cos l'}{v'}\right) + z\left(\frac{\cos n}{v} - \frac{\cos n'}{v'}\right) \quad . \quad . \quad (A)$$

Drücken wir also die von O herrührende gebeugte Lichtbewegung durch

$$y = \sin \frac{2\pi}{T} t$$

aus, so ist die von M herrührende durch

$$y = \sin \frac{2\pi}{T}(t - t')$$

auszudrücken. Die von einem bei M gelegenen Flächenelemente ausgehende Bewegung ist dann

$$y = \sin \frac{2\pi}{T}(t - t')\, dx\, dz,$$

also die von der ganzen beugenden Oeffnung gelieferte resultirende Bewegung

$$Y = \int\int \sin \frac{2\pi}{T}(t - t')\, dx\, dz,$$

wobei die Integration über die ganze beugende Oeffnung auszudehnen ist. Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden:

$$Y = \sin \frac{2\pi t}{T} \int\int \cos \frac{2\pi t'}{T}\, dx\, dz - \cos \frac{2\pi t}{T} \int\int \sin \frac{2\pi t'}{T}\, dx\, dz$$

und wenn

$$\int\int \cos \frac{2\pi t'}{T}\, dx\, dz = A, \quad \int\int \sin \frac{2\pi t'}{T}\, dx\, dz = B, \quad \frac{B}{A} = \tang \vartheta$$

gesetzt wird,

$$Y = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \vartheta\right).$$

Die resultirende Intensität ist sonach

$$J = A^2 + B^2 = \left[\int\int \cos \frac{2\pi t'}{T}\, dx\, dz\right]^2 + \left[\int\int \sin \frac{2\pi t'}{T} \qquad \right]^2$$

oder schliesslich

$$J = \left[\int\int \cos\frac{2\pi}{T}\left(x\left(\frac{\cos l}{v}-\frac{\cos l'}{v'}\right)+z\left(\frac{\cos n}{v}-\frac{\cos n'}{v'}\right)\right)dx\,dz\right]^2 + \left[\int\int \sin\frac{2\pi}{T}\left(x\left(\frac{\cos l}{v}-\frac{\cos l'}{v'}\right)+z\left(\frac{\cos n}{v}-\frac{\cos n'}{v'}\right)\right)dx\,dz\right]^2 \quad (B)$$

Dieser Ausdruck für J repräsentirt die Intensität eines Punktes, welcher durch die Summe der von jedem einzelnen Punkte der beugenden Oeffnung ausgegangen und in irgend einem Momente auf einer Ebene, deren Normale OR ist, sich befindenden elementaren Bewegungen durch Interferenz in Oscillation geräth. Diese Interferenz kann in der folgenden Weise experimentell verwirklicht gedacht werden. Sämmtliche auf einer zu OR senkrechten Ebene in irgend einem Momente vorhandenen elementaren Bewegungen pflanzen sich während einer bestimmten Zeit bis zu einer zweiten, ebenfalls zu OR senkrechten Ebene fort, wie sich leicht aus der Construction der Elementarwellen ergiebt, und zwar mit jener Geschwindigkeit, mit welcher sich zu OR senkrechte Planwellen fortpflanzen; mit anderen Worten, die gebeugte Welle pflanzt sich parallel zu sich selbst fort. Gelangt dieselbe durch eine ebene Trennungsfläche (Fläche des Krystalls) in ein isotropes Mittel (Luft), so findet eine Brechung statt, die gebeugte Welle ändert ihre Richtung, doch bleibt die Normale derselben in der Einfallsebene, und jetzt stehen, was früher nicht der Fall war, die Strahlen auf der Wellenebene senkrecht. Werden dieselben durch das Objectiv eines Fernrohres, dessen Achse den Strahlen parallel ist, im Focus gesammelt, so interferiren sie daselbst mit ihren ursprünglichen Phasendifferenzen.

Bisher haben wir die Geschwindigkeiten v und v' als gegeben angesehen für jene Richtungen, in welchen sich die einfallende und die gebeugte Welle fortpflanzen, ohne irgend einen bestimmten Zusammenhang zwischen diesen Geschwindigkeiten und Fortpflanzungsrichtungen vorauszusetzen. Wir haben also auch jene allgemeinste Relation gewonnen, aus welcher wir die Beugungserscheinungen für jedes beliebige Medium ableiten können, wenn nur für dieses Medium jener Zusammenhang bekannt ist. Der einfachste Fall in dieser Beziehung tritt ein, wenn in beiden Medien das Licht sich nach allen Richtungen mit derselben constanten Geschwindigkeit fortpflanzt. Setzen wir in (B): $l = n = \frac{\pi}{2}$, $v = v' = const$, so gelangen wir zu der schon in (75) abgeleiteten Gleichung zurück. Andere einfache Fälle sind die, wo das Gitter in der Trennungsebene zweier einfach brechenden Medien oder eines solchen und eines doppeltbrechenden liegt. Hier sind v und v' oder eine dieser Grössen constant. Im allgemeinen Falle hat man v und v' als Functionen der Fortpflanzungsrichtung anzusehen.

Um die Relationen für doppeltbrechende Medien erhalten zu können, ist es vorerst nothwendig, die Lage der Elasticitätsachsen zu fixiren. Wir denken uns ein zweiachsiges Medium, dessen Elasticitätsellipsoid auf seine eigenen Achsen bezogen durch die Gleichung (150)

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

gegeben ist. Da wir $a > b > c$ annehmen wollen, ist die Ebene der Elasticitätsachsen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$ auch die Ebene der optischen Achsen und wenn s den Winkel bedeutet, welchen die optischen Achsen mit der Elasticitätsachse $\frac{1}{c}$ bilden, so ist (191):

$$\cos s = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad \sin s = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \qquad (C)$$

Die Elasticitätsachsen, deren Grössen durch $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ gegeben sind, mögen mit den Coordinatenachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bilden.

Fig. 127.

In Fig. 127 sei $OXYZ$ das rechtwinkelige Coordinatensystem, a und c seien die Durchschnitte der Elasticitätsachsen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$ mit einer um O als Mittelpunkt gelegten Kugel, A_1 und A_2 die Durchschnitte der optischen Achsen mit dieser Kugel. Bezeichnen wir die Winkel, welche diese optischen Achsen mit den Coordinatenachsen bil-

den, mit a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2, so ergeben sich leicht aus der Figur folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos a_1 &= \cos\alpha_1 \sin s + \cos\alpha_3 \cos s \\ \cos b_1 &= \cos\beta_1 \sin s + \cos\beta_3 \cos s \\ \cos c_1 &= \cos\gamma_1 \sin s + \cos\gamma_3 \cos s \end{aligned}\right\} \qquad \text{. . . . . } (D)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a_2 &= -\cos\alpha_1 \sin s + \cos\alpha_3 \cos s \\ \cos b_2 &= -\cos\beta_1 \sin s + \cos\beta_3 \cos s \\ \cos c_2 &= -\cos\gamma_1 \sin s + \cos\gamma_3 \cos s \end{aligned}\right\}$$

Wenn wir die Winkel der Wellennormale mit den Coordinatenachsen durch l, m, n bezeichnen, so werden die Winkel θ' und θ'', welche diese Wellennormale mit den beiden optischen Achsen OA_1 und OA_2 bildet, gegeben sein durch

$$\begin{aligned} \cos\theta' &= \cos l \cos a_1 + \cos m \cos b_1 + \cos n \cos c_1 \\ \cos\theta'' &= \cos l \cos a_2 + \cos m \cos b_2 + \cos n \cos c_2 \end{aligned} \qquad \text{. . . } (E)$$

Die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v_α und v_β, welche der Richtung unserer Wellennormale entsprechen, folgen nach den Gesetzen der Lichtfortpflanzung in doppeltbrechenden Medien (191) aus

$$\begin{aligned} v_\alpha^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\theta' + \theta'') \\ v_\beta^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\theta' - \theta'') \end{aligned} \qquad \text{. . . . . . } (F)$$

Jede dieser Wellen hat aber eine bestimmte Schwingungsebene. Die beiden Schwingungsebenen stehen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel jener beiden Ebenen, welche durch die Wellennormale und je eine der optischen Achsen gehen (191).

Man wird also in einem gegebenen Falle v_α und v_β mittelst (*C*), (*D*), (*E*) und (*F*) berechnen und die erhaltenen Werthe in (*B*) substituiren, um durch Ausführung der daselbst angezeigten Integrationen die Intensität der gebeugten Wellen in gegebenen Richtungen zu erhalten.

Für optisch einachsige Medien vereinfachen sich die erhaltenen Gleichungen dadurch, dass $a = b$ gesetzt werden kann. Es ist dann diejenige Elasticitätsachse, welche mit den Coordinatenachsen die Winkel α_3, β_3, γ_3 bildet, die einzige optische Achse. Der Winkel s wird sonach o, also auch

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \alpha_3 \\ b_1 &= b_2 = \beta_3 \\ c_1 &= c_2 = \gamma_3 \\ \theta' &= \theta''. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die beiden einer bestimmten Normale entsprechenden gebeugten Wellen fortpflanzen, sind dann nach (F):

$$v_\alpha = a$$

$$v_\beta = \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)(\cos l \cos \alpha_3 + \cos m \cos \beta_3 + \cos n \cos \gamma_3)^2}.$$

Eine genauere experimentelle Prüfung hat dieser Theil der Diffractionstheorie noch nicht erfahren.

XX.

Dispersion in den doppeltbrechenden Mitteln.

194. Dispersion in den einachsigen Krystallen.

Die experimentellen Resultate, welche wir über die Dispersion in den einachsigen Krystallen besitzen, verdanken wir grossentheils den Arbeiten Rudberg's, welcher mittelst parallel zur Achse geschnittener Prismen die ordentlichen und ausserordentlichen Brechungsindices des Kalkspathes und des Quarzes für eine Anzahl Fraunhofer'sche Linien bestimmte [1]).

Seine Resultate sind in der folgenden Tafel enthalten.

Ordentliche und ausserordentliche Brechungsindices des Kalkspathes und des Quarzes nach Rudberg.

Linie	Kalkspath		Quarz	
	ordentlich	ausser-ordentlich	ordentlich	ausser-ordentlich
B	1,65308	1,48391	1,54090	1,54990
C	1,65452	1,48455	1,54181	1,55085
D	1,65850	1,48635	1,54418	1,55328
E	1,66360	1,48868	1,54711	1,55631
F	1,66802	1,49075	1,54965	1,55894
G	1,67617	1,49453	1,55425	1,56365
H	1,68330	1,49780	1,55817	1,56772

1) Pogg. XIV, 45.

Später dehnte Mascart die Messungen auf den ultravioletten Theil des Spectrums aus. Seine Resultate enthält die folgende Tafel:

Ordentliche und ausserordentliche Brechungsindices des Kalkspathes und des Quarzes nach Mascart.

Linie	Kalkspath		Quarz	
	ordentlich	ausser-ordentlich	ordentlich	ausser-ordentlich
A	1,65012	1,48285	1,53902	1,54812
B	1,65296	1,48409	1,54099	1,55002
C	1,65446	1,48474	1,54188	1,55095
D	1,65846	1,48654	1,54423	1,55338
E	1,66354	1,48885	1,54718	1,55636
F	1,66793	1,49084	1,54966	1,55897
G	1,67620	1,49470	1,55429	1,56372
H	1,68330	1,49777	1,55816	1,56770
L	1,68706	1,49941	1,56019	1,56974
M	1,68966	1,50054	1,56150	1,57121
N	1,69441	1,50256	1,56400	1,57381
O	1,69955	1,50486	1,56668	1,57659
P	1,70276	1,50628	1,56842	1,57822
Q	1,70613	1,50780	"	1,57998
R	1,71155	1,51028	"	1,58273
S	1,71580	"	"	"
T	1,71939	"	"	"

Aus dieser Tafel ist ersichtlich, dass beim Kalkspath und Quarz das Verhältniss $\frac{b}{a}$ sich um so mehr von der Einheit unterscheidet, je brechbarer der betreffende Strahl ist. Hierdurch finden sich die folgenden von Malus bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung [1]) beobachteten Erscheinungen erklärt.

1. Fällt ein Strahl senkrecht auf eine der natürlichen Begrenzungsflächen eines Kalkspathrhomboëders, so erfährt der ordentliche Strahl weder Brechung noch Dispersion. Der ausserordentliche Strahl jedoch erscheint abgelenkt und zwar der violette Theil mehr als der rothe.

[1]) *Théorie de la double réfraction*, 201.

2. Bei kleinen Incidenzwinkeln erscheinen beide Strahlen abgelenkt und zwar liegt beim ordentlichen Strahle der violette Theil dem Einfallslothe näher, beim ausserordentlichen der rothe.

3. Bei einer Incidenz von ungefähr 40 Graden erscheinen beide Strahlen abgelenkt, doch zeigt der ausserordentliche Strahl keine merkliche Dispersion.

4. Bei noch grösserer Incidenz erscheint sowohl beim ausserordentlichen als beim ordentlichen Strahle violett näher am Einfallslothe als roth.

Alle diese Resultate ergeben sich mittelst der Huyghens'schen Construction, wenn man bemerkt, dass die Excentricität des ellipsoidischen Theiles der Wellenfläche von violett gegen roth abnimmt.

Wir lassen noch die Resultate der von Van der Willigen angestellten Messungen folgen [1]).

Die Messungen, auf welche sich die folgenden Angaben beziehen, sind angestellt an einem linksdrehenden Quarzprisma, dessen brechende Kante parallel der optischen Achse lief und einem ebenso geschliffenen Kalkspathprisma, und wurde auch die Temperatur gemessen.

Linie	Quarz		Kalkspath	
	ordentlich	ausserordentlich	ordentlich	ausserordentlich
	23,6°	23,8°	24,5°	22,8°
A	1,53914	1,54806	1,65003	1,48268
B	1,54097	1,54998	1,65299	1,48399
C	1,54185	1,55085	1,65448	1,48463
D	1,54419	1,55329	1,65844	1,48639
E	1,54715	1,55633	1,66352	1,48874
F	1,54966	1,55895	1,66792	1,49076
G	1,55422	1,56365	1,67617	1,49456
H	1,55811	1,56769	1,68331	1,49780

Die Abweichungen der an verschiedenen Prismen derselben Substanz gefundenen Brechungsindices beschränken sich auf die letzte Decimale und man kann annehmen, dass die Werthe, wenigstens in den

[1]) Van der Willigen, *Sur la réfraction du quarz et du spath d'Islande. Musée Teyler,* II, (3) 153, III, (1) 34.

helleren Theilen des Spectrums bis auf eine Einheit der fünften Decimale richtig sind.

Aus den Beobachtungen ergeben sich die folgenden Formeln für den Quarz:

$$n_o = 1{,}530619 + 547303\,\lambda^{-2} - 3272828\,(10)^6\lambda^{-4} + 23367880\,(10)^{12}\lambda^{-6}$$
$$n_e = 1{,}539153 + 574448\,\lambda^{-2} - 3629156\,(10)^6\lambda^{-4} + 26298880\,(10)^{12}\lambda^{-6}$$

und für Kalkspath:

$$n_o = 1{,}636521 + 839744\,\lambda^{-2} - 3630057\,(10)^6\lambda^{-4} + 31953000\,(10)^{12}\lambda^{-6}$$
$$n_e = 1{,}477223 + 319587\,\lambda^{-2} - 100577\,(10^6)\,\lambda^{-4} + 2881530\,(10)^{12}\lambda^{-6}$$

195. Dispersion in den zweiachsigen Krystallen.

Wir verdanken ebenfalls Rudberg zwei Reihen von Messungen über die Dispersion in den zweiachsigen Krystallen. Dieselben beziehen sich auf den Aragonit, welcher negativ ist, und auf den farblosen Topas, welcher positiv ist [1]). Er bestimmte die drei Hauptbrechungsexponenten dieser beiden Krystalle für eine Anzahl Fraunhofer'scher Linien mittelst parallel zu den drei Elasticitätsachsen getheilter Prismen. Die folgende Tafel enthält die von Rudberg gefundenen Werthe für die Hauptbrechungsexponenten $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$:

Linien	Aragonit			Topas		
	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$
B	1,52749	1,67631	1,68061	1,60840	1,61049	1,61791
C	1,52820	1,67779	1,68203	1,60935	1,61144	1,61880
D	1,53013	1,68157	1,68589	1,61161	1,61375	1,62109
E	1,53264	1,68634	1,69084	1,61452	1,61668	1,62408
F	1,53479	1,69053	1,69515	1,61701	1,61914	1,62652
G	1,53882	1,69836	1,70318	1,62154	1,62365	1,63123
H	1,54226	1,70509	1,71011	1,62539	1,62745	1,63506

Berechnet man mit Hülfe dieser Werthe die Winkel zwischen den optischen Achsen und den Elasticitätsachsen, so erkennt man, dass die optischen Achsen für die verschiedenen Farben eine verschiedene Lage

1) Pogg. XVII, 1.

haben, was man auch mittelst der Erscheinungen der chromatischen Polarisation nachweisen kann.

Beim Aragonit vergrössert sich der spitze Winkel zwischen den optischen Achsen von roth gegen violett, beim Topas ist es umgekehrt. Bei diesen beiden Krystallen befinden sich die den verschiedenen Farben entsprechenden optischen Achsen in ein und derselben Ebene. Anders verhält es sich beispielsweise beim Borax, wo die Ebene der optischen Achsen ihre Lage mit der Farbe verändert. Beim Gyps hat der Winkel der optischen Achsen, wie V. v. Lang gefunden hat, für die Linie *D* ein Maximum. Wir werden diese Phänomene genauer besprechen, wenn von der chromatischen Polarisation die Rede sein wird.

Wir fügen noch die Resultate der Messungen bei, welche V. v. Lang am Gypse durchgeführt hat [1]).

Linie	Gyps		
	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$
B	1,517457	1,519457	1,527264
C	1,518345	1,520365	1,528138
D	1,520717	1,522772	1,530483
E	1,523726	1,525794	1,533482
F	1,526303	1,528352	1,530074
G	1,530860	1,532801	1,540716

[1]) Grösse und Lage der optischen Elasticitätsachsen beim Gyps. Sitzb. d. Wien. Akad. 1877.

Bibliographie.

Doppelbrechung.

1670. **Erasmus Bartholin**, *Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici*, Amsterdam.
1690. **Huyghens**, *Traité de la Lumière*, Leyden.
1704. **Newton**, *Optics*, III.
1710. **Lahire**, Observations sur une espèce de talc, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1710, p. 341.
1739. **Dufay**, Observations sur la double réfraction du spath d'Islande, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1739, p. 81.
1762. **Beccaria**, Account of the Double Refraction in Crystals, *Phil. Tr.*, 1762, p. 486.
1772. **Beccaria**, Observations sur la double réfraction du cristal de roche, *Journ. de phys. de Rozier*, II, 504.
1788. **Hauy**, Sur la double réfraction du spath d'Islande, *Mém. de l'anc. Acad. des sc.*, 1788, p. 34. — *Ann. de chim.*, (1), XVII, 140.
1797. **Link**, Ueber die Verdoppelung der Bilder in durchsichtigen Steinen. *Crelle's Journal*, 1797. — *Ann. de chim.*, (1), XXVIII, 84.
1801. **Hauy**, *Mineralogie*, I, p. 271.
1802. **Wollaston**, On the Oblique Refraction of Iceland Crystal, *Phil. Trans.*, 1802, p. 381.
1804. **Hauy**, *Traité de Physique*, II, p. 347.
1809. **Laplace**, Sur le mouvement de la lumière dans les corps diaphanes, *Mém. de l'Arcueil*, II, 311. — *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, X, 306.
1809. **Young**, Review of Laplace's Mémoire sur les lois de la réfraction extraordinaire dans les milieux diaphanes, *Quarterly Review*, November 1809. — *Miscell. Works*, I, p. 228.
1810. **Malus**, *Théorie de la double réfraction*, Paris. — *Mém. des sav. étrang.*, II, 303.
1810. **Malus**, Mémoire sur l'axe de réfraction des cristaux et des substances organisées, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XI.
1812. **Biot**, Mémoire sur la découverte d'une propriété remarquable dont jouissent les forces polarisantes de certains cristaux, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII. (Attractive und repulsive Krystalle.)
1812. **Biot**, Sur les deux genres de polarisation exercée par les cristaux doués de la double réfraction, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII.
1813. **Biot**, Examen comparé de l'intensité d'action que la force répulsive extraordinaire du spath d'Islande exerce sur les molécules des diverses couleurs, *Mém. d'Arcueil*, III, 371. — *Ann. de chim.*, (1) XCIV, 281.

1813. Brewster, On the Double Refraction of Chromate of Lead, *Phil. Trans.*, 1813, p. 105.

1813. Brewster, On the Existence of Two Dispersive Powers in all Doubly Refracting Crystals, *Phil. Trans.*, 1813, p. 107.

1815. Biot, Observations sur la nature des forces qui produisent la double réfraction, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIV.

1815. Ampère, Démonstration d'un théorème d'où l'on peut déduire toutes les lois de la réfraction ordinaire et extraordinaire, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIV, 235.

1816. Biot, Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière pour reconnaître l'état de combinaison ou de cristallisation dans un grand nombre de cas où le système cristallin n'est pas immédiatement observable, *Mém. de l'Acad. des sc.*, I, 275.

1817. Young, Theoretical Investigations Intented to Illustrate the Phoenomena of Polarisation, *Supplement der Encyclopaedia Britannica.*

1817. Young, Article Chromatics, *Supplement der Encyclopaedia Britannica.*

1817. Brewster, Sur la différence qui existe entre les propriétés optiques de l'aragonite et celles du spath calcaire, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), VI, 104.

1818. Bernhardi, Ueber Polarität und doppelte Strahlenbrechung der Krystalle, *Schweigger's Journ.*, XXV, 247.

1818. Brewster, On the Laws of Polarisation and Double Refraction in Crystallized Bodies, *Phil. Tr.*, 1818, p. 199.

1819. Biot, Mémoire sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés, *Mém. de l'Acad. des sc.*, III, 177.

1819. Brewster, On the Action of Crystallized Surfaces on Light, *Phil. Trans.*, 1819, p. 145.

1820. Soret, Observations sur les rapports qui existent entre les axes de double réfraction et la forme des cristaux, *Mém. de la Soc. de phys. de Genève*, t. I.

1820. Soret, Note sur le mica, *Mém. de la Soc. de phys. de Genève*, t. I.

1821. Fresnel, Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 179, 312. — *OEuvres complètes*, I, p. 629.

1821. Navier, Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, *Mém. de l'Acad. des sc.*, VII, 375.

1821. Fresnel, Mémoire sur la double réfraction, *Mém. de l'Acad. des sc.*, VII, 45. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2) XXVIII, 263.

1821. Brewster, On the Connexion between the Primitive Forms of Crystals and the Number of their Axes of Double Refraction, *Mém. of the Wenerian Soc.*, III, 50, 337.

1821. Brewster, On the Connexion between the Optical Structure and Chimical Composition of Minerals, *Edinb. Phil. Journ.*, V, 1.

1822. Arago, Rapport sur un Mémoire de Fresnel relatif à la double réfraction, *OEuvres complètes*, X, p. 445. — *Ann. de chim. et de phys.* (2), XX, 337.

1822. Brewster, Observations on the Relation between the Optical Structure and the Chimical Composition of the Apophyllit and other Minerals of the Zeolite Family, *Edinb. Phil. Journ.*, VII, 13.

1823. Poisson, Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 250.

1823. Brewster, On the Optical Properties of Sulphate of Carbon, Carbonate of Barytes and Sulphate of Potash with Inferences Respecting

the Structure of Doubly Refracting Crystals, *Edinb. Phil. Journ.* VIII, 133.

1823. Martin, An Essay on the Nature and Wonderfull Properties of Iceland Crystal Respecting its Unusual Refraction of Light, *Edinb. Phil. Journ.*, VIII, 150.

1824. Hamilton, Theory of Systems of Rays, *Ir. Trans.*, XV, 69; XVI, 1, 94.

1825. Mitscherlich, Ueber die Ausdehnung der krystallischen Körper durch die Wärme, *Abh. der Berlin. Akad.*, 1825, p. 201.

1828. Rudberg, Untersuchungen über die Brechung des farbigen Lichts im Bergkrystall und im Kalkspath, *Pogg. Ann.*, XIV, 45.

1828. Ampère, Mémoire sur la détermination de la surface des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les trois directions principales, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXIX, 113.

1828. Cauchy, Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction où de répulsion mutuelle, *Exerc. de Math.*, III, 188.

1829. Cauchy, Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très-petites distances et sur la théorie de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 549.

1829. Cauchy, Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, *Exerc. de Math.*, IV, 129.

1830. Poisson, Mémoire sur la propogation du mouvement dans les milieux élastiques, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLIV, 423. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 549. — *Journ. de l'Éc. Polytechn.*, XX, Heft 1.

1830. Cauchy, Mémoire sur la théorie de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 293.

1830. Cauchy, Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle à la théorie de la lumière, *Exerc. de Math.*, V, 19.

1831. Rudberg, Untersuchungen über die Brechung des farbigen Lichts im Arragonit und im farblosen Topase, *Pogg. Ann.*, XVII, 1. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLVIII, 225.

1831. Mac-Cullagh, On the Double Refraction of Light in a Crystallized Medium According to the Principles of Fresnel, *Ir. Trans.*, XVI, 31.

1831. Brewster, Account of Remarkable Peculiarity in the Structure of Glauberit, which has one Axe of Double Refraction for Violet and two for Red Light, *Edinb. Trans.*, XI, 273.

1832. Duhamel, Mémoire sur les vibrations d'un système quelconque de points matériels, *Journ. de l'Éc. Polytechn.*, XXIII, Heft 1.

1832. Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik, *Pogg. Ann.*, XXV, 418.

1832. Rudberg, Ueber die Veränderung, welche die Doppelbrechung in Krystallen durch Temperaturerhöhung erleidet, *Pogg. Ann.*, XXVI, 291.

1833. Arago, De la loi d'après laquelle un faisceau de lumière polarisée se partage entre l'image ordinaire et l'image extraordinaire quand il traverse un cristal doué de la double réfraction, *OEuvres complètes* X, p. 152.

1833. Lloyd, On the Phaenomena Presented by Light in its Passage along the Axes of Biaxial Crystals, *Ir. Trans.*, XVII, 3.

1834. Neumann, Ueber die optischen Achsen und die Farben zweiachsiger Krystalle im polarisirten Licht, *Pogg. Ann.*, XXXIII, 257.

1834. **Lamé**, Mémoire sur les lois de l'équilibre de l'éther dans les corps diaphanes, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LV, 332.

1834. **Lamé**, Mémoire sur les vibrations lumineuses des corps diaphanes, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LVII, 211.

1834. **Hamilton**, On a General Method in Dynamics by which the Study of the Motions of all Free Systems of Attracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of a Central Relation or Characteristic Function, *Phil. Trans.*, 1834, p. 247; 1835, p. 95.

1835. **Talbot**, On the Nature of Light, *Phil. Mag.*, (3), VII, 113. — *Inst.*, III, 131.

1835. **Cauchy**, Mémoire sur la dispersion de la lumière, *Nouv. Exerc. de Math.*, 1.

1836. **Mossotti**, Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, Turin.

1836. **Cauchy**, Notes sur la théorie de la lumière, *C. R.*, II, 182, 207, 341.

1837. **Kelland**, On the Laws of Transmission of Light and Heat in Uncrystallized Media, *Phil. Mag.*, (3), X, 336.

1838. **Hamilton**, On the Propagation of Light in Crystallized Media, 8. *Rep. of Brit. Assoc.*, — *Inst.*, VII, 230.

1838. **Cauchy**, Mémoire sur la propagation du mouvement par ondes planes dans un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très-petites distances, *C. R.*, VI, 865.

1838. **Cauchy**, Mémoire sur les vibrations de l'éther dans un milieu ou dans un système de deux milieux, lorsque la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tout sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée, *C. R.*, VII, 751.

1838. **Blanchet**, Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini cristallisé d'une manière quelconque, *C. R.*, VII, 310, 723. — *Journ. de mathém. de Liouville*, V, 1.

1838. **Radicke**, Analyse der Arbeiten Cauchy's, *Dove's Repertorium*, III, 142.

1839. **Plücker**, Wellenfläche, *Crelle's Journ.* XIX, 1, 91.

1839. **Poggendorff**, Ueber die konische Refraction, *Pogg. Ann.* XLVIII, 461.

1839. **Sturm**, Bericht über eine Abhandlung **Blanchet's**: Sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini, *Inst.*, VII, 1.

1839. **Earnshaw**, On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether, *Cambr. Trans.*, VII.

1839. **Cauchy**, Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XVIII, 153.

1839. **Cauchy**, Note sur la nature des ondes lumineuses, *C. R.*, VIII, 582.

1839. **Cauchy**, Mémoire où l'on montre comment une seule et même théorie peut fournir les lois de la propagation de la chaleur et de la lumière, *C. R.*, IX, 283.

1839. **Poisson**, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XVIII, 3.

1840. **Moigno**, Analyse des travaux de Cauchy sur la théorie mathématique de la lumière, *Inst.*, VIII, 12, 19, 31, 39, 59, 75, 95, 127.

1840. **Cauchy**, Mémoire sur les deux systèmes d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système de points matériels, *C. R.*, X, 905. — *Exerc. d'Anal. et de Phys. mathém.*, I, 288.

1841. **Cauchy**, Note sur la surface des ondes lumineuses, *C. R.*, XIII, 184, 319.

1841. **Blanchet**, Extrait d'un Mémoire sur la délimitation de l'onde dans la propagation générale des mouvements vibratoires, *C. R.*, XII, 1165.

1841. **Blanchet**, Note sur les mouvements très-petits qui subsistent entre les différentes nappes de l'onde dans la propagation d'un mouvement central, *C. R.*, XIII, 958, 1151.

1841. **Green**, On the Propagation of Light in Crystallized Media, *Cambr. Trans.*, VII, II. Theil, 120.

1841. **Potter**, On Conical Refraction in Biaxial Crystals, *Phil. Mag.*, (3), XIX.

1842. **Cauchy**, Sur les principales différences qui existent entre les ondes sonores et les ondes lumineuses, *C. R.*, XV, 813.

1842. **Blanchet**, Mémoire sur la délimitation de l'onde dans la propagation des mouvements vibratoires, *Journ. Liouville*, VII, 13.

1842. **Mac Cullagh**, On the Laws of Double Refraction, *Phil. Mag.*, (3), XXI, 407.

1843. **Brewster**, On the Ordinary Refraction in Iceland Crystal, *13. Rep. of Brit. Assoc.*, 7. — *Inst.*, XII, 86.

1843. **Nougarède de Fayet**, *Des hypothèses sur la lumière et l'éther*, Paris.

1844. **Blanchet**, Mémoire sur les ondes successives, *Journ. de Liouville*, IX, 73.

1844. **Broch**, Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung, *Dove's Repert.* V, 88, 152.

1845. **Moon**, On Fresnel's Theory of Double Refraction, *Phil. Mag.*, (3), XXVII, 553; XXVIII, 134.

1845. **Laurent**, Sur la théorie mathématique de la lumière, *C. R.*, XX, 360, 1076, 1593, 1597. — *Inst.*, XIII, 143, 192.

1845. **Cauchy**, Note sur les communications de M. Laurent, *C. R.*, XX, 1180.

1845. **Laurent**, Note sur les ondes liquides et Remarques sur les assimilations qu'on a faites de ces ondes aux ondulations lumineuses, *C. R.*, XX, 1713. — *Inst.*, XIII, 215.

1845. **Laurent**, Sur les mouvements atomiques, *C. R.*, XXI, 438. — *Inst.*, XIII, 311.

1845. **Laurent**, Sur les mouvements vibratoires de l'éther, *C. R.*, XXI, 529. — *Inst.*, XIII, 311.

1845. **Laurent**, Recherches sur la théorie mathématique des mouvements ondulatoires, *C. R.*, XVI, 1160.

1846. **Broch**, Besondere Gesetze der Wellenbewegung, *Dove's Repert.*, VII, 1.

1846. **Waterson**, On the Physics of the Media which are Composed of Elastic. Molecules in a State of Motion, *Phil. Mag.*, (3), XXIX, 50.

1846. **Smith**, On Fresnel's Theory of Double Refraction, *Phil. Mag.*, (3), XXVIII, 48.

1846. **Jesuiticus**, Remarks on a Paper by M. Moon: On Fresnel's Theory of Double Refraction, *Phil. Mag.*, (3), XXVIII, 144.

1846. **Moon**, Reply to Jesuiticus, *Phil. Mag.*, (3), XXVIII, 215.

1846. **Stokes**, On a Formula for Determining the Optical Constants of Doubly Refracting Crystals, *Mathem. Journ. of Cambr.*, I.

1846. **Faraday**, Thoughts on Ray-Vibrations, *Phil. Mag.*, (3), XXVIII, 345. — *Inst.*, XIV, 274.

1846. **Airy**, Remarks on Dr. Faraday's Paper on Ray-Vibrations, *Phil. Mag.*, (3), XXVIII, 532.

1847. **Cauchy**, Note sur la polarisation chromatique, *C. R.*, XXV, 331.

1847. Ettinghausen, Ueber die Differentialgleichungen der Lichtschwingungen, *Wien. Ber.*, II, 122. — *C. R.*, XXIV, 801. — *Inst.*, XV, 151.

1847. Challis, A Theory of the Polarization of Light on the Hypothesis of Undulations, *Phil. Mag.*, (3), XXX, 315, 265. — *Inst.*, XVI, 59.

1847. O'Brien, On the Symbolical Equation of Vibratory Motion of an Elastic Medium whether Crystallized or Uncrystallized, *Phil. Mag.*, (3), XXXI, 376.

1847. Swan, Experiments of the Ordinary Refraction of Iceland Spar, *Edinb. Trans.*, XVI, 375.

1848. Cauchy, Sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements simples du fluide éthéré, *C. R.*, XXVIII, 621.

1848. Mac Cullagh, An Essay toward a Dynamical Theory of Crystalline Reflexion and Refraction, *Ir. Trans.*, XXI, 17.

1849. Challis, A Theory of the Transmission of Light through Transparent Media, *Phil. Mag.*, (3), XXXIV, 225.

1849. Plücker, Ueber die Fessel'sche Wellenmaschine, *Pogg. Ann.*, LXXVIII, 421.

1849. Angström, *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction des cristsux à trois axes obliques*, Upsal.

1849. Marx, Zur Geschichte der Lehre von der doppelten Strahlenbrechung, *Pogg. Ann.*, LXXVIII, 272.

1849. Cauchy, Sur la recherche des intégrales qui représentent les mouvements infiniment petits des corps homogènes, et spécialement les mouvements par ondes planes, *C. R.*, XXIX, 606.

1849. Cauchy, Sur les vibrations infiniment petites des systèmes de points matériels, *C. R.*, XXIX, 643.

1849. Cauchy, Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther contenu dans un corps cristallisé, *C. R.*, XXIX, 728. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXII, 599.

1849. Cauchy, Sur les systèmes isotropes de points matériels, *C. R.*, XXIX, 761. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXII, 615.

1850. Cauchy, Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système, *C. R.*, XXX, 17.

1850. Cauchy, Mémoire sur la propagation de la lumière dans les milieux isophanes, *C. R.*, XXX, 33.

1850. Cauchy, Mémoire sur les vibrations de l'éther dans les milieux qui sont isophanes par rapport à une direction donnée, *C. R.* XXX, 93.

1850. Cauchy, Mémoire sur un système d'atomes isotropes autour d'un axe et sur les deux rayons lumineux que propagent les cristaux à un axe, *C. R.*, XXXI, 111.

1850. Cauchy, Mémoires sur les équations différentielles du mouvement de l'éther dans le cristauxs à un et à deux axes optiques, *C. R.*, XXXI, 338.

1851. Beer, On the Deduction of Fresnel's Construction from the Formulae of Cauchy for the Motion of Light, *Phil. Mag.*, (4), II, 297. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 347.

1851. Beer, Ueber eine neue Art die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in zweiachsigen Medien darzustellen, *Grunert's Archiv*, XVI, 223.

1852. Beer, Note über die innere konische Refraction, *Pogg. Ann.*, LXXXIII, 194. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 114.

1852. Beer, Ableitung der Intensitäts- und Polarisationsverhältnisse des Lichtes bei der inneren konischen Refraction, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 67.

1852. Walton, On the Family of the Wave-Surface, *Thompson's Mathem. Journ.*, 1852, p. 105.

1852. Heusser, Untersuchung über die Brechung des farbigen Lichts in einigen krystallinischen Medien, *Pogg. Ann.*, LXXXVII, 434. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVII, 251.

1852. Codazza, Sulle induzioni molecolari prodotte dalle undulazioni longitudinali dell' etere, *Giornale dell'Istituto Lombardo*, t. IV.

1852. Petzval, Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre. — Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer, *Wien. Ber.*, VII, 134.

1852. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, leçons XVII bis XXIV.

1853. Rankine, A General View of an Oscillatory Theory of Light, *Phil. Mag.*, (4), VI, 413. — 23. *Rep. of Brit. Assoc.*, 9. — *Inst.*, XXII, 24.

1853. Power, Theory of the Reciprocal Action between the Solar Rays and the Different Media by which they are Reflected, Refracted or Absorbed, *Phil. Trans.*, 1854, p. 11. — *Proceed. of R. S.*, VI, 316. — *Phil. Mag.*, (4), VI, 218. — *Inst.*, XXI, 391.

1853. Walton, On a Physical Property of the Wave-Surface, *Thompson's Journ. of Mathem.*, 1853, p. 33.

1853. Haughton, Notes on Molecular Mechanics. — Propagation of Plane Waves, *Thompson's Journ. of Mathem.*, 1853, p. 159; 1854, p. 129.

1853. De Senarmont, Commentaire au Mémoire de Fresnel sur la double réfraction, *Journ. de l'Éc. Polytechn.*, XXXV, Heft 1.

1853. Beer, Beiträge zur Dioptrik und Katoptrik krystallinischer Mittel mit einer optischen Axe, *Pogg. Ann.* LXXXIX, 56.

1853. Grailich, Bewegung des Lichtes in optisch einachsigen Zwillingskrystallen, *Wien. Ber.*, XI, 817; XII, 230.

1854. Reusch, Note über das viergliedrige schwefelsaure Nickeloxydul, *Pogg. Ann.*, XCI, 317. — *Inst.*, XX, 147.

1854. Haughton, Notes on molecular mechanics. N. 3, *Thomson J.*, 1854, p. 129.

1854. Haidinger, Annähernde Bestimmung der Brechungsexponenten am Glimmer und Pennin, *Pogg. Ann.*, XCV, 493, 620. — *Wien. Ber.*, XIV, 330. — *Inst.*, XXIII, 48.

1854. Billet, Sur les trois cas de non-division par double réfraction que peuvent présenter les cristaux uniaxes biréfringents et sur les faces qui peuvent les offrir, *C, R.*, XXXIX, 733. — *Inst.*, XXII, 358.

1854. Bravais, Recherches sur les cas de non-bifurcation des rayons réfractés dans les cristaux à un axe, *Inst.*, XXII, 413.

1855. Zech, Die Eigenschaften der Wellenfläche der zweiachsigen Krystalle mittels der höheren Geometrie abgeleitet, *Crelle's Journ.*, LII, 243; LIV, 72; LV, 94.

1855. Haidinger, Die conische Refraction am Diopsid nebst Bemerkungen über einige Erscheinungen der conischen Refraction am Aragon, *Wien. Ber.*, XVI, 113. — *Pogg. Ann.*, XCVI, 469. — *Inst.*, XXIII, 251.

1855. Billet, Sur une nouvelle manière d'étudier la marche du rayon extraordinaire dans le spath d'Islande, *C. R.*, XLI, 514. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LV, 250.

1856. De Senarmont, Sur la réflexion totale de la lumière extérieurement à la surface des cristaux biréfringents, *Journ. de Liouville*, 1856, p. 305.

1856. De Senarmont, Recherches sur la double réfraction, *C. R.*, XLII, 65. — *Inst.*, XXIV, 13.

1856. Gerling, Ueber eine mechanische Vorrichtung zur Darstellung der Wellenbewegung, *Tageblatt der Naturforscher in Wien*, 1856, p. 125. — *Inst.*, XXV, 6.

1856. Violette, *Études optiques sur le formiate de strontiane*, Lille.

1857. Stefan, Allgemeine Gleichungen über oscillatorische Bewegungen, *Pogg. Ann.*, CII, 365.

1857. Prescott, On the Wave-Surface, *Quarterly Journ. of Mathem.* II, 1.

1858. Zech, Notiz über die innere conische Refraction, *Pogg. Ann.*, CIV, 188.

1858. Cayley, On the Wave-Surface, *Quarterly Journ. of Mathem.* III, 16, 142.

1858. Galopin, *Thèse sur l'équation de la surface des ondes lumineuses dans les milieux biréfringents*, Genève.

1858. Wace, On the Coincidence of the two Rays in Doubly Refracting Media, *Quarterly Journ. of Mathem.*, III, 47.

1858. von Lang, Ueber die Minimumablenkung der Lichtstrahlen durch doppeltbrechende Prismen, *Wien. Ber.*, XXXIII, 155.

1858. Babinet, Sur la duplication des images au travers des prismes biréfringents à faces parallèles, *C. R.*, XLVII, 400.

1858. J. Grailich und V. v. Lang, Untersuchung über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. Orientirung der optischen Elasticitätsachsen des rhombischen Systems. *Wien. Ber.* XXVII, 3; XXXI, 85. — *Inst.*, 1858, p. 433.

1858. J. Grailich und V. v. Lang, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. Ueber die Beziehungen zwischen Krystallform, Substanz und physikalischem Verhalten, *Wien. Ber.* XXXIII, 369.

1859. von Lang, Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten von Galmey und unterschwefelsaurem Natron, *Wiener Berichte*, XXXVII, 379.

1859. Challis, On the Theory of Elliptically Polarized Light, *Phil. Mag.*, (4), XVII, 285.

1859. Stoney, Note on the Propagation of Waves, *29. Report of British Assoc.*, 9.

1859. Briot, Théorie mathématique de la lumière. — Propagation de la lumière dans les milieux cristallisés, *C. R.*, XLIX, 888.

1859. Walton, Note on a Geometrical Property of the Wave-Surface, *Quarterly Journ. of Mathem.*, IV, 151.

1859. Bertrand, Sur la surface des ondes, *C., R.*, XLVII, 817.

1860. Eisenlohr, Ueber die Erklärung des Verhaltens des Lichtes in Krystallen, *Pogg. Ann.*, CIX, 215.

1860. Carey Lea, On the Optical Properties of Picrate of Manganese, *Sillim. Journ.*, (2), XXX, 402. — *Phil. Mag.*, (4), XXI, 477.

1860. Walton, On the Obliquity of a Ray in a Biaxial Crystal, *Quarterly Journ. of Mathem.*, IV, 1.

1860. D'Estocquois, Note sur la double réfraction, *C. R.*, L, 992.

1860. Clifton, On the Conical Refraction of a Straight Line, *Quarterly Journ. of Mathem.*, III, 360.

1861. Schrauf, Erklärung des Vorkommens optisch zweiachsiger Substanzen im rhomboëdrischen Systeme, *Pogg. Ann.*, CXIV, 221.

1861. De Saint-Venant, Sur le nombre des coefficients inégaux des formules donnant les composantes des pressions dans l'intérieur des corps solides élastiques, *C. R.*, LIII, 1107.

1861. von Lang, Ueber die Gesetze der Doppelbrechung, *Wien. Ber.*, XLIII, 627.

1861. **Walton**, On a Property of Conjugate Planes of Polarisation in a Biaxial Crystal, *Quarterly Journ. of Mathem.*, IV, 243.

1861. **D'Estocquois**, Sur l'ellipsoïde d'élasticité: *Cosmos*, XIX, 49.

1861. **Briot**, Note sur la théorie de la lumière, *C. R.*, LII, 393.

1861. **Pichot**, Note sur la vérification expérimentale des lois de la double réfraction, *C. R.*, LII, 356. — *Inst.*, XXIX, 115.

1862. **P. Desains**, Description et discussion de quelques expériences de double réfraction, *C. R.*, LIV, 457.

1862. **Walton**, On certain Analytical Relations between Conjugate Wave-Velocities, Ray-Velocities and Planes of Polarisation, *Quarterly Journ. of Mathem.*, V, 127.

1862. **Walton**, Note on the Inclination of the Optic Axes to the Ray-Axes of a Biaxial Crystal, *Quarterly Journ. of Mathem.*, V, 317.

1862. **Walton**, Theorems Concerning Wave-Velocities and Ray-Slownesses in a Biaxial Crystal, *Quarterly Journ. of Mathem.*, V, 360.

1862. **Stokes**, Note on Internal Radiation, *Proceed. of R. S.*, XI, 537. — *Phil. Mag.*, (4), XXIV, 474.

1862. **Challis**, Explanation of Phaenomena of Light on the Hypothesis of Undulations, *Phil. Mag.*, (4), XXIV, 462.

1862. **Stewart**, On Internal Radiation in Uniaxial Crystals, *Phil. Mag.*, (4), XVIII, 328.

1862. **Stokes**, Report on Double Refraction, *22. Rep. of Brit. Assoc.*, 253.

1862. **Schrauf**, Ueber die Abhängigkeit der Fortpflanzung des Lichtes von der Körperdichte, *Pogg. Ann.*, CXVI, 193.

1863. **L. Lorenz**, Ueber die Theorie des Lichts, *Pogg. Ann.*, CXVIII, 101.

1863. **Challis**, The Theory of Double Refraction on the Undulatory Hypothesis of Light, *Phil. Mag.*, (4), XXVI, 466.

1863. **Walton**, On the Equiradial Wave-Cone of the Wave-Surface, *Quarterly Journ. of Mathem.*, VI, 78.

1863. **Walton**, On the Equiradial Curve of the Wave-Surface, *Quarterly Journ. of Mathem.*, VI, 144.

1863. **Wild**, Photometrische Untersuchungen, *Pogg. Ann.*, CXVIII, 139. *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 238. (Verification des Gesetzes von Malus).

1863. **Mathieu**, Mémoire sur la propagation des ondes, *C. R.*, LVI, 255.

1863. **Galopin**, Note sur la théorie de la double réfraction, *Archives de Genève*, (2), XVIII, 131. — *C. R.*, LVII, 291.

1863. **De Saint-Venant**, Sur la théorie de la double réfraction, *C. R.*, LVII, 387.

1864. **Müttrich**, Bestimmung des Krystallsystems und der optischen Constanten des weinsteinsauren Kalinatrons, *Pogg. Ann.*, CXXXI, 193, 398. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), II, 495.

1864. **Pfaff**, Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Doppelbrechung, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 179.

1864. **Fizeau**, Recherches sur la dilatation et la double réfraction du verre échauffée, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), II, 148. — *C. R.*, LVIII, 923.

1864. **Reusch**, Die zwei Hauptbrechungscoëfficienten des Eises, *Pogg. Ann.*, CXXI, 573. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4) II, 500.

1864. **Pochhammer**, Ueber die optischen Achsen der allgemeinen Wellenfläche von Cauchy und Neumann, *Pogg. Ann.*, CXXI, 139. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), I, 499.

1864. **Cavan**, Ueber das Zusammenfallen des ordentlich gebrochenen und

des ausserordentlich gebrochenen Strahles in einachsigen Krystallen der Richtung nach, *Grunert's Archiv*, XLI, 199.
1864. Cotton, Preliminary Note on the Connexion between the Form and Optical Properties of Crystals, *24. Report of British Assoc.*, 10.
1864. Christoffel, Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte, *Journ. Crelle*, LXIII, 273.
1864. Lorenz, Ueber die Theorie des Lichts, *Pogg. Ann.*, CXXI, 579. — *Mondes*, VI, 542.
1864. Briot, *Essai sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris.
1865. Boussinesq, Essai sur la théorie de la lumière, *C. R.*, LXI. 19.
1865. Stefan, Theorie der doppelten Brechung, *Wien. Ber.*, L, (2), 505. — *Inst.*, 1865, 199. — *Z. S. f. Mathem.*, 1865, 430.
1865. Sarrau, Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux, *C. R.*, LX, 1174.
1865. Challis, Supplementary considerations relating to the undulatory theory of light, *Phil. Mag.*, (4), XXIX, 329.
1866. E. Mathieu, Note sur la surface de l'onde, *Liouville J.*, (2), XI, 298 bis 304.
1866. L. Ditscheiner, Theorie der Beugungserscheinungen in doppeltbrechenden Medien, *Wien. Ber.*, LIV, 2, p. 523 bis 553. — *Mondes*, XII, 608 bis 610.
1867. Boussinesq, Théorie nouvelle des ondes lumineuses, *C. R.*, LXV, 235. — *Liouville J.*, (2), XIII, 313.
1868. Boussinesq, Études sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux, *Liouville J.*, (2), XIII, 340.
1868. Boussinesq, Addition au mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses, *Liouville J.*, (2), XIII, 425.
1868. A. Schrauf, Ueber schiefwinkelige optische Elasticitätsaxen, *Pogg. Ann.*, CXXXV, 43.
1868. R. A. Mees, Ueber die von C. Briot aufgestellte Dispersionstheorie, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 118. — *Mondes*, (2), XVIII, 303.
1869. C. Neumann, Ueber die Aetherbewegung in Krystallen, *Math. Ann.*, I, 325, II, 182.
1869. Van der Willigen, Sur la réfraction du quarz et du spath d'Islande, *Musée Teyler*, II, (3), 153, III, (1), 34.
1872. De St. Venant, Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXV, 335.
1872. Boussinesq, Sur les lois qui régissent à une première approximation les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque, *Liouville J.*, (2), XVII, 167.
1872. G. Stokes, On the law of the extraordinary refraction in iceland spar, *Philos. Mag.*, (4), XLIV, 316. — *Proc. Roy. Soc.*, XX, 443. — *Nature*, VI, 255, *Institut*, 1872, 376.
1873. E. Sarrau, Observations relatives à l'analyse faite par M. de Saint-Venant des diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses, *Ann. de chim.*, (4), XXVIII, 266.
1873. J. Boussinesq, Exposé synthétique des principes d'une théorie nouvelle des ondes lumineuses, *Ann. de chim.*, (4), XXX, 539.
1873. J. Boussinesq, Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées dans un Mémoire précédent, *Liouville, J.*, (2), XVIII, 361.
1873. Abria, Vérification de la loi d'Huyghens par la methode du prisma,